高等数学自学辅导

杨万禄　滕桂兰　编

天津大学出版社

高等学校专科教材

高等数学自学辅导

杨万禄　滕桂兰　编

天津大学出版社

（津）新登字 012 号

高等数学自学辅导

杨万禄　　滕桂兰　　编

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河北省昌黎县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168 毫米 1/32 印张：10 5/8 字数：275 千字

1991 年 7 月第一版　　1995 年 9 月第五次印刷

印数：27101—37100

ISBN　7-5618-0265-X

O·30　定价：7.60 元

前　言

《高等数学自学辅导》是根据“全国普通高等理工院校成人教育研究会数学研究组”通过的专科“高等数学”课程的基本要求编写的。

考虑到成人在学习高等数学过程中，往往感到抽象难懂，特别是解题时缺少思路不知如何下手，为了帮助学员学习高等数学这门课程，我们编写这本《高等数学自学辅导》。该书在选材、例题、结构形式上都尽量适应成人自学的特点，因此它可作为函授、电大、职工大学、业余大学的学员学习高等数学的自学辅导书。

本书各章由以下五部分组成。

一、内容提要

简要列出本章所学的主要内容，帮助学生总结归纳本章的要点。内容提要包括：定义、定理、性质、主要公式等。

二、基本要求

明确学习本章的基本要求，具体规定每一部分内容应掌握的程度，指出学习本章的重点与难点。

三、自学中应注意的几个问题

针对各章的某些基本概念、重点、难点和学生自学中容易出现的问题作进一步的阐述和解释，帮助学生对这些内容加深理解，减少在自学中的困难。

四、例题分析

例题深广度的选择，体现该部分的基本内容和具体要求。通过例题分析，可以帮助学生加深对基本概念和定理的理解；指导他们运用基本概念、基本理论和基本方法分析问题、解决问题，

开阔思路，举一反三，提高解题的能力；同时减少学生作习题时所遇到的困难。

五、复习思考题

复习思考题，可供学生在复习时检查自己对所学的基本内容掌握情况，同时也达到巩固基本概念的目的。

本书是学员学习“高等数学”的一本辅助性的参考教材，配合教学要求和教学进度学员可参看其相应部分。我们希望通过《高等数学自学辅导》能使广大的学员在掌握高等数学的基本内容，提高基本计算能力方面起到一定的作用。

书中标有*号的内容、例题，不做一般要求，可供有余力的学员选读。

本书共分十三章。第一、二、三、八、九、十、十一章由杨万禄编写。第四、五、六、七、十二、十三章由滕桂兰编写。

本书在编写过程中得到天津大学成人教育学院和天津大学出版社的热情支持，在此表示深切的感谢。

由于我们教学经验和水平有限，再加之编写时间仓促，错误和不妥之处在所难免，恳切希望读者批评指正。

编者

1990年10月

目　　录

第一章 函 数

函数是高等数学研究的主要对象，它是高等数学中最重要的基本概念之一，也是学习微积分的基础。

一 内 容 提 要

（一）常量与变量

1．常量与变量

在某一过程中，保持一定数值的量叫常量，可以取不同数值的量叫变量．

2．连续变量的变化范围的表示方法

表示变量的变化范围可以用区间或不等式，现将其含义列成下表。

区 间	不等式表示	含 义
$(-\infty, +\infty)$	$-\infty<x<-\infty$	全体实数
$(a, +\infty)$	$a<x<+\infty$	大于a的全体实数
(a, b)	$a<x<b$	大于a小于b的全体实数
$[a, b]$	$a\leqslant x\leqslant b$	大于或等于a但小于或等于b的全体实数

此外还有 $(a, b]$，$[a, b)$，$(-\infty, b)$，$[a, +\infty)$ 等，其含义请读者自己讨论．

（二）绝对值与邻域

1．绝对值

（1）定义：任意实数 a 的绝对值用符号“$|a|$”表示，定义

为

$$|a| = \begin{cases} a & a \geqslant 0; \\ -a & a < 0. \end{cases}$$

由定义可知，任何一个实数 a 的绝对值是非负的。

（2）绝对值的性质

1° $|ab| = |a| \cdot |b|$

2° $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

3° $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

4° $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$

5° $|x-a| < \delta \Longleftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$

2. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，满足不等式

$$|x-a| < \delta$$

的实数x的全体称为点 a 的 δ 邻域，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。

（三）函数

1. 函数的定义

设在某个过程中，有两个变量x和y，如果当变量x在实数的某一范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律，总有确定数值和它对应，则变量 y 称为变量x的函数，记作$y = f(x)$。其中变量x称为自变量，变量 y 称为因变量。

2. 定义域

自变量取值的全体称为函数的定义域。若函数由解析式子给出，不考虑函数的实际意义，则函数定义域就是使解析式子有意义的自变量的一切实数值。

3. 函数的表示法

（1）公式法：两个变量之间的函数关系是借助公式直接给出的，即称为函数的公式表示法或解析法，这种方法便于理论上研

究，但不直观。

（2）**图示法**：借助于平面坐标系，将变量之间的关系用图形表示出来。这种方法直观，但准确度不高。

（3）**表格法**：用表格的方法把变量之间的函数关系表示出来，此种表示法给了自变量的值，可以直接查到对应的函数值，但缺乏直观性，不便于理论上的研究。

4. 函数的符号

$y=f(x)$，表示y是x的函数，"f"表示y与x之间的对应规律，即函数关系。在同一个问题里有时会同时有几个函数，这时就要用不同的函数记号如$F(x)$，$g(x)$，$\varphi(x)$等分别表示，或用$f_1(x)$，$f_2(x)$，……

（四）函数的性质

1. 函数的单值性与多值性

如果自变量在定义域内任取一个确定值时，函数只有一个确定值和它对应，则称为单值函数。若有两个或两个以上的函数值与之对应，则称为多值函数。

以后凡是没有特别说明的，本书中函数都是指单值函数。

2. 函数的有界性

若存在正数M，使函数$f(x)$在区间$\mathscr{X}$内都满足不等式$|f(x)|\leqslant M$，则称为函数$f(x)$在区间$\mathscr{X}$内有界。若这样的M不存在，则称$f(x)$在$\mathscr{X}$内无界。

3. 函数的单调性

若对于(a, b)内任意两点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a, b)内是单调增加的。

若对于(a, b)内任意两点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在(a, b)内是单调减少的。同样可以在无限区间上定义单增或单减函数。

4. 函数的奇偶性

函数$f(x)$在对称区间$(-a, a)$内有定义，对任意点x有

$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内为奇函数。

若$f(x)$ 在对称区间 $(-a, a)$ 内，对任意点x有 $f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内为偶函数。

奇函数的图形对称于坐标原点，偶函数的图形对称于y轴。

5. 函数的周期性

若对$f(x)$ 存在一个不为零的数 l，使得关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于定义域内的任何x值都成立，则$f(x)$称为周期函数。l是$f(x)$的周期，通常 l 是指满足上式的最小正数。

（五）反函数

1. 反函数定义

设y是x的函数$y=f(x)$，如果把y当作自变量，x当作因变量，则由关系式$y=f(x)$所确定的函数$x=\varphi(y)$称为函数$y=f(x)$的反函数，或记为 $x=f^{-1}(y)$，而$y=f(x)$ 称为直接函数。

在反函数定义中，自变量写成y，函数写成x，这与我们用x表示自变量，y表示函数的习惯不合，所以一般把按定义得到的反函数$x=\varphi(y)$（或$x=f^{-1}(y)$）中的x与y两个字母互换写成$y=\varphi(x)$（或$y=f^{-1}(x)$）。

2. 反函数的图形

反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与直接函数$y=f(x)$ 的图形画在同一个直角坐标系中，两个图形对称于直线$y=x$。

（六）初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数：它们是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。为了学习方便，把基本初等函数的图形及简单性质列成表。（见附表）

2. 复合函数

设y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数$u=\varphi(x)$，且

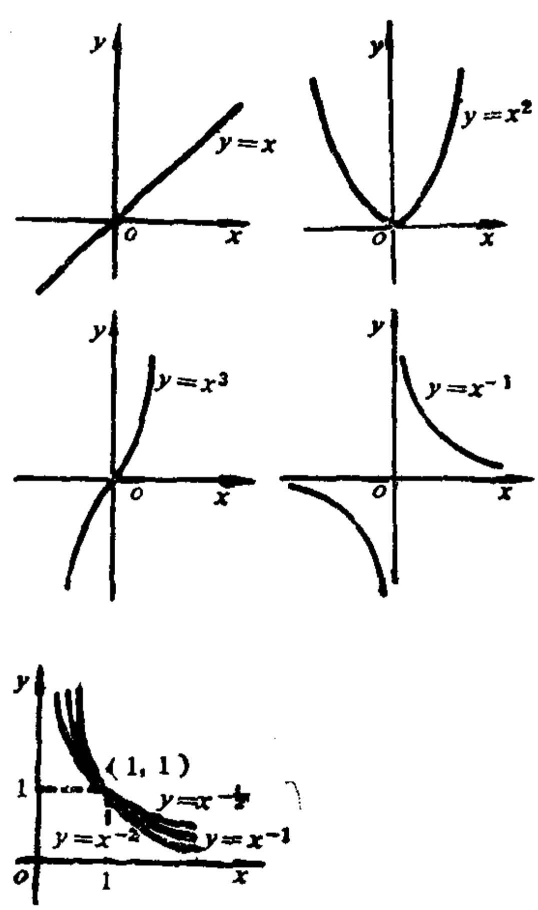
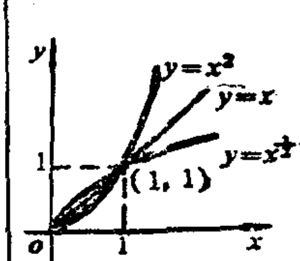
$\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分使 $f(u)$ 有意义，则 y 成为 x 的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$。这个函数叫做由函数 $y=f(u)$，及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数。其中 u 称为中间变量。

3. 初等函数

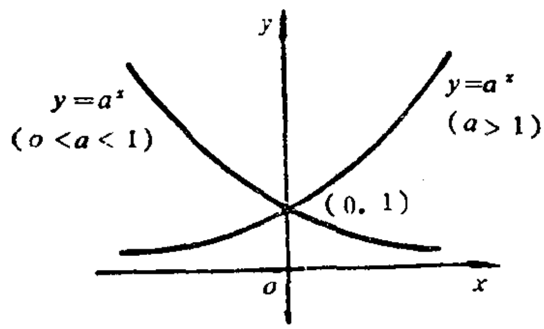
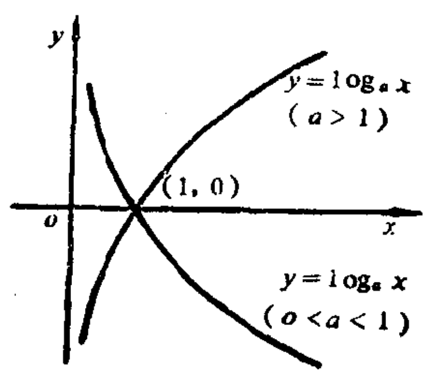
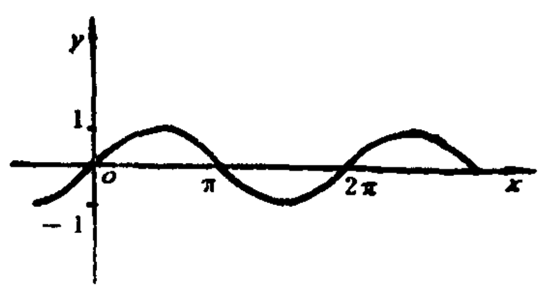
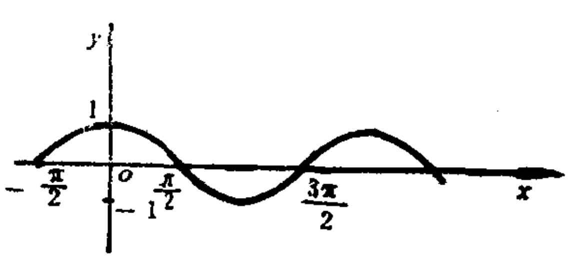
初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合步骤所构成，并用一个式子表示的函数。

分段函数不是用一个解析式子表示，所以不是初等函数，又称为非初等函数。

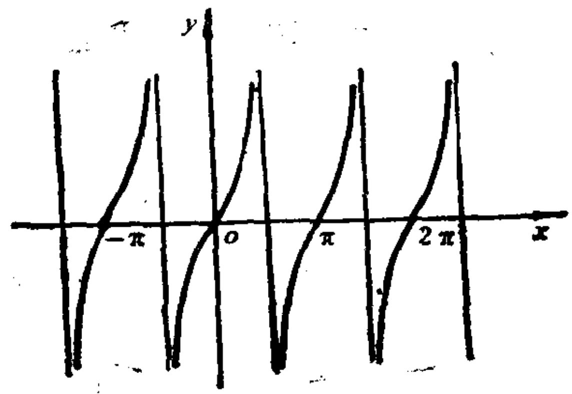
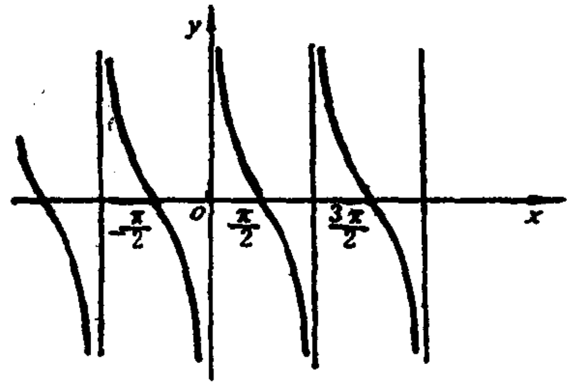
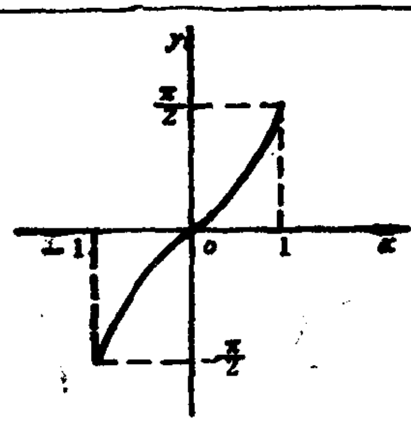
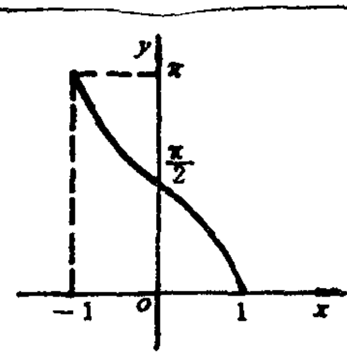
附　　表

名称	公式	图形	简单性质
幂函数	$y=x^{\mu}$ (μ为实数)		1. $\mu>0$时，图形过(0, 0)及(1, 1)两点，在$(0,+\infty)$内是增函数 2. $\mu<0$时，图形过(1, 1)点，在$(0,+\infty)$内是减函数。 

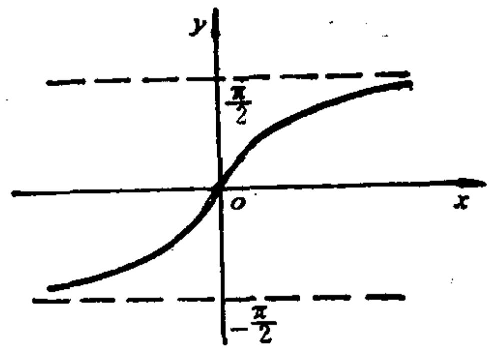
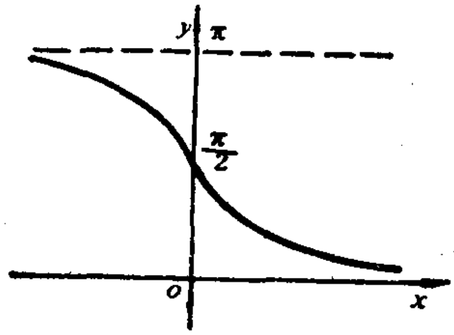
续表

名称	公式	图形	简单性质
指数函数	$y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$		定义域：$(-\infty, +\infty)$。 1．过(0，1)点。 2．$a^x>0$。 3．当$a>1$时，a^x单调增；当$0<a<1$时，a^x单调减。
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$		定义域：$(0, +\infty)$。 1．过(1，0)点 2．当$a>1$时，$y=\log_a x$单调增； 当$0<a<1$时，$y=\log_a x$单减。
三角函数	$y=\sin x$		定义域：$(-\infty, +\infty)$。 1．图形对称原点， 2．以2π为周期， 3．$\lvert\sin x\rvert\leqslant1$
	$y=\cos x$		定义域：$(-\infty, +\infty)$。 1．图形对称y轴， 2．以2π为周期， 3．$\lvert\cos x\rvert\leqslant1$。

续表

三角函数	$y=\mathrm{tg}\,x$		定义域：$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$。 1．图形对称于原点， 2．以π为周期， 3．在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内单调增。
	$y=\mathrm{ctg}\,x$		定义域：$x\neq k\pi$。 1．图形对称于原点， 2．以π为周期， 3．在$(0,\ \pi)$内单调减。
反三角函数	$y=\arcsin x$		定义域：$[-1,\ 1]$ 1．图形对称于原点。 2．$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 3．单调增。
	$y=\arccos x$		定义域：$[-1,\ 1]$ 1．$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$， 2．单调减。

续表

名称	公式	图形	简单性质
反三角函数	$y=\mathrm{arctg}\,x$		定义域：$(-\infty, +\infty)$。 1．图形对称于原点， 2．$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{arctg}\,x<\frac{\pi}{2}$， 3．单调增。
	$y=\mathrm{arcctg}\,x$		定义域：$(-\infty, +\infty)$。 1．$0<\mathrm{arcctg}\,x<\pi$， 2．单调减。

三　基　本　要　求

1．掌握绝对值的定义及简单性质，并能用不等式和绝对值表示实数的范围，会解绝对值不等式。

2．理解函数的概念，着重理解函数的定义域及对应规律两个要素，并能掌握函数符号意义及其用法。

3．了解函数的有界性、单调性、奇偶性与周期性。

4．熟练地掌握基本初等函数的定义域、图形及其简单性质。

5．搞清楚复合函数与初等函数，会正确分析复合函数的复

合过程。会求初等函数的定义域。

6．了解反函数、分段函数的概念。

重点

1．函数概念。

2．基本初等函数及其性质。

难点

复合函数及其分析复合函数是由怎样的基本初等函数复合而成的。

三　自学中应注意的几个问题

（一）函数概念

1．函数的两要素：函数概念的核心内容是函数的定义域和对应规律，称它们是函数的两个要素。掌握函数的两要素是学习函数概念的基本要求．我们说给出一个函数就是给出了一个函数的定义域和对应规律．两个函数只要它们的对应规律和定义域都相同，则就是同一个函数，而与函数中自变量和因变量用什么字母表示无关。

例如，$f(x)=\lg x^2$与$g(x)=2\lg x$是两个不同的函数。因为$f(x)$的定义域是$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$，而$g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，两者定义域不同．当只考虑$x>0$的情况下，这两个函数则是相同的。

确定函数的定义域通常是按下面两种情况考虑：

（1）实际问题由实际意义确定．例如，初速度为零的自由落体时间t与路程s的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

定义域为$0\leqslant t\leqslant T$，此时t的取值范围是由实际问题所确定的，t既不能为负值又不能无限制地增大。

（2）函数由解析式子给出，不考虑其实际意义，函数的定义域就是使解析式子有意义的自变量的一切实数值。

2. **函数符号**：正确理解和熟练运用函数符号是学习高等数学的一个基本功，通过做题逐步的理解和熟悉它。

若没有具体给出函数关系，函数符号“$y=f(x)$”就代表 y 是 x 的抽象函数，指出变量 x 与 y 存在一个函数关系，此外并无更多的含义。若函数关系具体给出，如 $f(x)=2x^2-3x+1$，这时 $f(x)$ 就代表一个具体函数，等式两端的 x 是同一个量。f 表示确定的对应规律，即

$$f(\quad)=2(\quad)^2-3(\quad)+1$$

3. **函数的表示法**：在两个变量中，只要给出定义域和对应规律，这两个变量就构成一个函数关系。至于函数的表达方式，在定义中并没有限制。公式法、图示法、表格法都是表示函数的方法。因为它们都能把函数的两个要素清楚的表示出来。用公式法表示函数，也不能认为只是用一个式子表示。函数的对应规律也可能用两个或几个式子表示，这就是分段函数。

（二）基本初等函数

初等函数是高等数学研究的主要对象，而初等函数是由基本初等函数构成的，因此，必须熟练掌握基本初等函数性质与图形。基本初等函数的性质（有界性、增减性、奇偶性、周期性）在它的图形上都清楚地体现出来。因此熟悉基本初等函数的图形是掌握函数性质的一个重要方法。

（三）复合函数

对于复合函数应着重理解以下几点：

1. 复合函数的定义。复合函数的通俗说法是函数里面套函数，中间变量是个函数而不是自变量。形成复合函数的中间变量，可以是一个、两个或是更多个。复合函数只是函数的一种表达形式，而不是一类新的函数。

2. 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数。例如

$y=\sqrt{1-x}$，$x=1+e^t$就不能复合成一个函数。因为函数$x=1+e^t$的值域（$x>1$）都落在$y=\sqrt{1-x}$的定义域之外。

3. 必须正确掌握复合函数的复合和分解过程。分解复合函数时，每一步必须都是基本初等函数或是基本初等函数的四则运算。（掌握这一点对以后求复合函数的导数是非常重要的）

（四）反函数

1. 若$x=\varphi(y)$是$y=f(x)$的反函数，则$y=\varphi(x)$也是$y=f(x)$的反函数。这是因为把函数$x=\varphi(y)$中的y换成x，x换成y就变成了$y=\varphi(x)$，因此函数$x=\varphi(y)$与$y=\varphi(x)$两者的定义域和对应规律都是相同的（自变量与因变量用什么字母是无关紧要的），所以$x=\varphi(y)$与$y=\varphi(x)$表示同一个函数，它们都是$y=f(x)$的反函数。

2. 若$x=\varphi(y)$是$y=f(x)$的反函数，则$y=f(x)$也是$x=\varphi(y)$的反函数，两者互为反函数。

3. $y=f(x)$与它的反函数$y=\varphi(x)$在同一直角坐标系下，两者的图形对称于直线$y=x$。而$y=f(x)$与$x=\varphi(y)$则是同一个图形。

四　例题分析

（一）绝对值与不等式

例1. 已知$0<|x+2|\leqslant 3$，试用区间表示变量x的变化范围

解　由$0<|x+2|\leqslant 3$，可得到

$$-3\leqslant x+2\leqslant 3,\quad x\neq -2.$$

即

$$-5\leqslant x\leqslant 1,\quad x\neq -2.$$

变量x的变化区间为$[-5, -2)$，$(-2, 1]$。

例2. 解绝对值不等式

（1）$|x+a|\geqslant b$；　　（2）$|x+1|<|x|$。