预测数学基础

陈玉祥
张汉亚
编

中国科技咨询服务中心
预测开发公司

预测数学基础

陈玉祥　张汉亚　编

中国科技咨询服务中心

预测开发公司

一九八四年六月

编者的话

近年来，预测技术发展迅速，尤其是定量预测技术，广泛地吸收和借鉴各学科的成果，发展了许多有效的方法。这些方法的应用，大部分都涉及到数学，特别是线性代数、概率、数理统计等方面知识的应用。为了配合当前普及预测技术、培训预测人员的需要，我们编写了这本教材，主要读者对象为具有高中、中专水平的计划和管理人员，适宜作为各类技术经济预测培训班的基础知识教材。

本教材线性代数和概率部分主要参考了罗崇蕙、朱铉道编写的有关教材，谨向有关作者表示感谢。限于我们的水平，编写时间仓促，书中定有许多缺点和不足之处，恳请各方面读者批评指正。

目　录

第一章　线性代数基本知识

本章主要介绍行列式、矩阵，以及如何解线性方程组等一些基本的线性代数知识。这些知识在多元线性回归分析、经济计量模型的求解中都常常遇到，是数量经济分析中必不可少的。

一、　行列式及其性质

在工程和经济分析中，有很多问题往往归结到求解一个线性方程组的问题。下面我们先讨论方程组，由此引出二阶和三阶行列式的定义和计算，然后推广到高阶行列式。

（一）　二阶行列式

我们先来求解一个包含两个未知量x、y的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中a、b、c是常数。先以b_2乘第一个方程，以b_1乘第二个方程，然后两式相减，便消去了y，即得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\ x = c_1b_2 - c_2b_1 \tag{1.2}$$

以a_2乘第一个方程，以a_1乘第二个方程，然后两式相减，即得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\ y = a_1c_2 - a_2c_1 \qquad (1.3)$$

上述两式中x或y的系数$a_1b_2 - a_2b_1$称为二阶行列式，用以下记号来表示：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

容易看出（1.2）式右边是把D中的a_1，a_2依次换成了c_1，c_2。同样（1.3）式右边是把D中的b_1,b_2换成c_1，c_2。于是（1.2），（1.3）两式的右边依次为两个二阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

假若$D \neq 0$，则由（1.2），（1.3）可得

$$x = \frac{D_1}{D} \quad ; \quad y = \frac{D_2}{D} \qquad (1.4)$$

把（1.4）中的x，y值代入方程组（1.1）可以验证它是适合（1.1）的。是方程组（1.1）的唯一的一组解。

例1.1　解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 4 = -5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$$

所以

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-5}{2} \qquad y = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{2}$$

（二） 三阶行列式

给定一个三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

像前面方法一样，先从第一、第二两方程中消去z，再从第一、第三两方程中消去z，最后从所得的两个方程中消去y，就得到

$$\begin{aligned} &(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 \\ &- a_3b_2c_1)x = (k_1b_2c_3 - k_1b_3c_2 + k_2b_3c_1 \\ &- k_2b_1c_3 + k_3b_1c_2 - k_3b_2c_1) \end{aligned} \tag{1.6}$$

我们把x的系数称做三阶行列式，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

容易看出，（1.6）式右边刚好是将D中的a_1，a_2，a_3分别换成k_1，k_2，k_3而得到的结果，所以其右边是

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

这样（1.6）式就可以写成

$$Dx = D_1$$

同理可以得到

$$Dy = D_2$$

$$Dz = D_3$$

这里D_2是将D中的b_1，b_2，b_3分别换成k_1，k_2，k_3所得到的行列式。D_3将是D中的c_1，c_2，c_3分别换成k_1，k_2，k_3所得到的行列式。

若$D \neq 0$，则有

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D} \tag{1.7}$$

把（1.7）代入方程组（1.5），可以验证它们是适合（1.5）的，所以是线性方程组（1.5）唯一的一组解。

（三） 三阶行列式的展开

如果研究一下三阶行列式的构造，我们会发现展开行列式的规则。

在行列式D的下面，另写第一行，第二行，则成

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

取在实线上的三元素作乘积，冠以（+）号，则得三项

$$+a_1b_2c_3, \quad +a_2b_3c_1, \quad +a_3b_1c_2$$

又取在虚线上的三元素作乘积，冠以（－）号，则得另外三项

$$-a_3b_2c_1,\quad -a_1b_3c_2,\quad -a_2b_1c_3$$

行列式D的展开式为

$$D=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$

此法便于记忆，可以依此计算（仅限于二阶、三阶）行列式，称为“对角线展开法”。

例1.2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

解 $D=1\times2\times2+2\times1\times3+3\times2\times1-3\times2\times3-1\times1\times1-2\times2\times2$

$=4+6+6-18-1-8=-11$

例1.3 解下列线性方程组

$$\begin{cases}2x-4y+z=1\\ x-5y+3z=2\\ x-y+z=-1\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-10-1-12+5+6+4$$

$$=-8$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=11$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

所以方程组的解为

$$x = \frac{-11}{8} \qquad y = \frac{-9}{8} \qquad z = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

（四） 行列式的性质

从上面看可知，求解线性方程组（1.1），（1.5），主要是计算D，D_1，D_2，D_3。为了便于计算行列式，需要研究一下行列式的性质。下面以三阶行列式为例进行说明。这些性质对任意阶的行列式都是成立的，这一点后面我们就不再赘述了。

在三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

中，a_1, a_2, a_3，b_1, b_2, b_3，c_1, c_2, c_3叫做行列式的元素。横排称为行，纵排称为列。a_1，b_1，c_1是第一行，a_2，b_2，c_2是第二行，a_3，b_3，c_3是第三行。a_1，a_2，a_3；b_1，b_2，b_3；c_1，c_2，c_3依次是第一、第二、第三列。

如果把行列式D的行列互换，而不改变各行各列的顺序，得到行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

D'叫做D的转置行列式。

性质 1 行列式与它的转置行列式相等。

这个性质说明了行列式中行、列地位的对称性。由此可知：行列式中有关行的性质对列也同样成立；反过来也对。因此，下面各性质都只提及行。

性质 2 交换行列式的任意两行或两列，行列式仅改变符号。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质 3 行列式中的某行的所有元素乘上某数k等于用k乘该行列式。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质 4 如果行列式的某行的各元素都是二项之和，那么这个行列式等于两个行列式之和。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_1 & b_2+d_2 & c_2+d_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质5　把行列式中任一行的元素乘以同一数后，加到另一行的对应元素上去，行列式不变。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

以上五个性质，根据行列式的定义是不难证明的，请读者验证，这里就不给出了。根据上述行列式性质可以得到如下结论：

推论1　若行列式有两行相同，则此行列式等于零。

推论2　若行列式中有一行为零，则此行列式等于零。

推论3　若行列式中有两行成比例，则此行列式等于零。

（五）高阶行列式

在前面解二元、三元线性方程组中，引出了二阶、三阶行列式。

为了说理方便起见，我们用 a_{ij} 表示行列式中第 i 行第 j 列的元素。利用这种记法可把二阶、三阶行列式写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.8}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.9}$$

在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，划去 a_{ij} $(i-1,2,3;j-1,2,3)$ 所在的行和列的元素，余下

的元素按原来的次序构成一个二阶行列式，称为元素a_{ij}的**余子式**，记作M_{ij}；并称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的**代数余子式**，记作A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如，元素a_{23}的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

由三阶行列式的展开式（1.9），不难得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

即一个三阶行列式可以表示成第一行的元素与对应于它们的代数余子式的乘积之和。也就是说，一个三阶行列式可以由相应的三个二阶行列式来定义。

如果我们把由单独一个元素a组成的行列式看作是a本身，并称之为一阶行列式，即$|a|=a$（这里，$|a|$表示行列式，而不是绝对值），那么，由（1.8）式可知，二阶行列式实际上也可以由相应的两个一阶行列式来**定义**：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

仿此，把四阶行列式定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

在定义了四阶行列式后，可以类似地用5个四阶行列式来定义五阶行列式，依此类推，一般地，可用n个n－1阶行列式来定义n阶行列式。这种定义方法叫做递归定义法。我们用

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示一个n阶行列式，其中元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$都是数。

定义 设n－1阶行列式已经定义，则规定n阶行列式