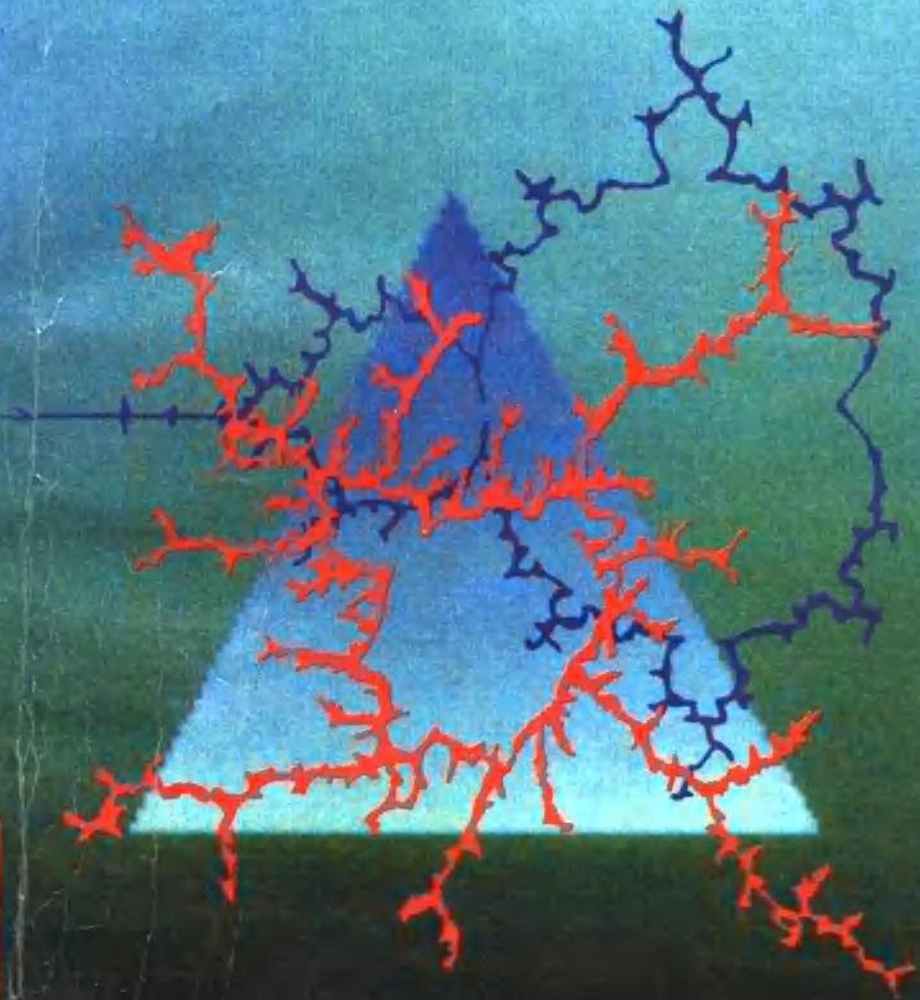
新兴边缘学科·青年科学家丛书

分形几何与动力系统

汪富泉　李后强　著



分形几何与动力系统

汪富泉　李后强　著

黑龙江教育出版社

1993年·哈尔滨

(黑)新登字第5号

分形几何与动力系统

汪富泉　李后强　著

责任编辑:韩殿发
封面设计:安振家

黑龙江教育出版社出版(哈尔滨市道里区九站街1号)
齐齐哈尔铁路印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
开本850×1168毫米1/32·印张7.625·插页2·字数176千
1993年10月第1版·1993年10月第1次印刷
印数:1—1.800

ISBN　7-5316-2044-8/O·7　定价:5.30元

内容提要

分形几何与动力系统开创了二十世纪数学的新阶段。它们之间有着密切联系：一方面，很多分形集都来自混沌动力系统；另一方面，分形与分维又为动力系统提供了简洁的几何语言。本书系统地介绍了分形几何与混沌动力系统理论及其相互联系。全书共分七章，主要内容有：分形几何产生的背景及其思想方法；病态结构的分形性质；维数理论；分形集的分类；动力系统与分形集；多重分形理论，分形方法论及对分形发展的展望；并对递归集、胖分形、混沌与分形吸引子的几何、朱力亚集、曼德尔布罗特集、多重分形的热力学与相变等方面的最新理论进行了较详细的论述。

本书力求做到反映分形与混沌动力系统理论的概貌又不至过于高深，很多证明都略去了，是一部介于理论与应用之间的著作，可供数学及其应用的学者、有关方面的科学工作者和大专院校师生阅读。可以作为研究生教材。

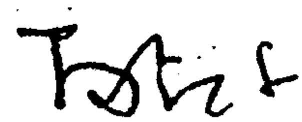
序

当今世界正经历着巨大的变革，人类社会正准备迎接世纪之交，这是一个极富挑战又充满机遇的特定历史时期。

现代青年是跨世纪的一代。在新旧世纪交替的历史时期，我国青年科技工作者肩负着光荣而又艰巨的历史使命。党中央把培养造就一支强大的高水平的青年科技中坚力量提高到重要的战略高度。邓小平同志指出，经济改革，他最关心的是人才问题；科技改革，他最关心的仍然是人才问题。江泽民同志在十四大报告中指出，“科学技术是第一生产力。振兴经济首先要振兴科技。只有坚定地推进科技进步，才能在激烈的竞争中取得主动。”“在世界高科技领域中，中华民族要占有应有的位置。”可以说，世界各国的竞争，就是各国综合实力的竞争；而综合实力的竞争最核心的是经济实力的竞争；经济实力的竞争，关键又是科技的竞争，特别是高科技的竞争；而高科技的竞争归根到底，就是高层次专门人才的竞争。众所周知，青年就是希望，青年就是未来，高科技的发展需要青年。

经过四十多年的艰苦奋斗，我国科技事业已取得了较好的发展。我们已经拥有一支包括青年在内的一千多万人的科技队伍，在许多科技领域已取得了重要的成就，青年为这些成就作出了巨大的贡献。青年一代应接好班，在已有的成就基础上，奋力拚搏，创造出无愧于时代的光辉业绩。

时代呼唤科学，科学呼唤青年。青年科技人才的培养是一项巨大的复杂的社会发展工程，需要全社会的理解和支持，需要创造一个青年科学人才成长的良好的环境和风尚。黑龙江教育出版社计划推出新兴边缘学科“青年科学家丛书”，目的是为30岁左右的优秀青年科技人员登上科学殿堂架梯搭桥，提供一个出版理论学术著作的基地，这是我们培养跨世纪科技人才的一个举措，值得鼓励和赞赏。“嘤其鸣矣，求其友声。”希望这套丛书能引起广大读者的兴趣，为我国科技事业的发展做出一点贡献。



杨叔子

中国科学院学部委员

华中理工大学校长、教授、博士生导师

1993年5月16日于武汉

目　录

第一章

引论

几何学是一门源远流长，多姿多彩的学科.在人类理性文明中，它是当之无愧的老大哥.数千年来，无论是在思想领域的突破上，还是在科学方法论的创建上，几何学总是扮演着开路先锋的角色.从古典的欧氏几何、解析几何、球面几何、非欧几何、射影几何、微分几何一直到近代的黎曼几何、代数几何、复几何、辛几何、一般拓扑学、代数拓扑学、微分拓扑学等等无一不是这样.直到现在，它仍然是一门方兴未艾，蓬勃发展的学科，依然保持着生机与活力.今天，被誉为开创了二十世纪数学重要阶段的分形几何学，已发展成为科学的方法论——分形论，并被应用到各色俱备的自然科学领域及一些工程技术和社会科学领域之中，这又是一个有力的佐证.

§1 形状研究与几何学的发展

分形集由三个要素确定，第一个要素是形状.物质世界的形体千姿百态.几何学正是研究这些形体或“空间”的学科.

几何学是随着人们对形体认识的逐渐深化和新的研究方法的

提出而逐步发展的.在古代，人们通过对简单、基本的几何形体的观察、分析，认识到许多几何量与几何性质.世界文明古国如中国、埃及、巴比仑、玛雅等，经过实验观察与分析综合，掌握了一套可观的空间知识.例如我国古代，很早就发现了重要的勾股定理，并建立了一套简易测量的方法.这一时期的几何学可称之为实验几何学.古希腊文明继承了古埃及和巴比仑在实验几何学上的知识，进而运用逻辑推理的办法，把几何学的研究推进到高度系统化、理论化的境界.使得人类对于形的认识和理解在深度与广度上都获得蓬勃发展.这一时期的几何学即推理几何学.欧几里德所著的《几何原理》是希腊几何学一部集大成的代表作，流传至今.

以推理几何学的知识为基础，把空间的几何结构代数化(亦即数量化)，从而把空间图形的研究从定性推进到定量的深度.这是笛卡尔和费马创立的解析几何学的重要贡献.由于很多数学的应用，往往要求把对事物的理解推进到有效可算的定量层面，因此解析几何学拓广了数学的应用范围，同时它也促进了分析学的蓬勃发展.

微积分为空间形体的研究提供了有力的工具.欧拉、蒙日、高斯等运用分析学研究空间中曲线和曲面的局部性质，创立了微分几何学.为了计算曲线和曲面上的几何量，如长度、角度、面积等，必须在曲面上引入测度.因有可计算性，微分几何已成为机件加工、飞机、船舶外形设计的工具.

在黎曼之前，人们总是把曲面看成欧氏空间中的形体.黎曼独具慧眼，将曲面看成独立的几何实体，从而开创了黎曼几何学。爱因斯坦正是运用黎曼几何建立了相对论.60年代以来，随着大范围分析的发展，微分算子理论、复变函数理论进入黎曼几何之中，它已成为现代数学的一个重要分支并深刻地影响着理论物理，如引力理论、高能物理和规范场等.

为了研究形体的空间位置关系和形态变化，拓扑学应运而生．并产生了一般拓扑学、代数拓扑学、微分拓扑学等分支．

欧氏的《几何原理》并非白璧无瑕．从其一问世到罗巴切夫斯基为止，许多几何学家都对其中的“平行公设”的“不证自明”感到不自在．一两千年间，曾有许多几何学家穷毕生之精力，力图洗刷这一“污点”．罗巴切夫斯基和鲍耶总结前人试证失败的教训，开创了非欧几何的一派——罗巴切夫斯基几何学．后面我们还将看到，许多几何学家为清除《几何原理》的瑕疵而构造的反例，正是分形几何学的先声．

19 世纪中叶以后，几何学的种类如雨后春笋般不断涌现．1872 年，克莱茵就各种新几何学的发展作出总结，指出它们结构上的一般原则．他强调变换群在古典几何学中的主导地位，将变换群作为几何分类的基础．在这种观点下，几何学被看作是图形对某种变换群为不变性质的学科．例如欧氏几何、球面几何、非欧几何中的保长变换群；圆与角的几何中的保圆保角变换群；射影几何中的射影变换群等等．一种几何结构有一个相应的自同构群，它是由所有保持结构的变换所组成的群．因为所有古典几何结构都是高度对称的、匀齐的，所以其自同构群具有统治整个图形（或全空间）的影响力，其几何性质在这个变换群下保持不变，而任何这种不变量都是几何量．因此，几何学也就被看成研究某一变换群作用之下的不变量的科学．克莱茵的思想对后世的几何学具有深远的影响，可以说，分形几何学也是在这种思想影响下诞生的．表面看来，分形几何研究的图形极不规则，杂乱无章，但在不同尺度下观察和分析，可以发现它们在尺度上的对称性．对其定义一个标度变换群，分形集是这个变换群的不变集，而分维就是这个变换群作用下的不变量．

§2 机遇与自然界的几何形态

机遇(或随机性)是分形集的第二个要素,自然界的几何形态与随机性有关.

传统几何的空间结构具有高度对称性和匀齐性. 直观地说,这些几何学研究的图形是相当规则和光滑的. 如直线、圆、椭圆、平面、球面、光滑微分流形等. 它们只是某些自然形态的简化和近似. 虽然如此,它们在某些研究中仍是不可缺少的. 例如,圆和抛物线可作为某些微分方程的解曲线,对这些曲线几何性质的认识可帮助理解相应的微分方程. 又如,行星运动的轨道并非严格的椭圆,地球也不是真正的圆球,但在预测行星的运动,或研究地球的引力场时,用椭圆和球来近似,效果也是够理想的. 然而,自然界的真实形态是千变万化,复杂纷繁的. 难怪弗里曼·戴桑诙谐地说:

"自然界给数学家们开了个玩笑. 19 世纪的数学家可能缺乏想象力,而自然界却不乏想象力……"

起伏不平的地形地貌;大地褶皱、断层、裂缝;曲曲弯弯的海岸线;流体的湍流;相变点附近的涨落花斑;地下水和石油的渗流;结晶体或河流的分支;静电传输误差;股票市场的波动……. 根据研究问题的需要,用规则的几何形态近似这些复杂形态达不到目的,甚至有很多形态连一级近似也做不出来. 对自然界中的这些复杂形状和结构,传统的几何学显得苍白无力. 应运而生的分形几何学为研究这些极其复杂、极不规则的形态提供了一个总体框架.

分形几何学研究的图形是分形集,它是区别于规则集合的奇异集,如康托集等等. 一般的分形集有哪些特征呢? 分形几何学创始人曼德尔布罗特(B. B. Mandelbrot)指出,一个分形集由三个要素确定,即:形状、机遇和维数. 人们可以毫不困难地区分一座山和一朵云,因为它们具有不同的形. 尽管一个岛屿的海岸线和科契

(H. Von Koch)曲线有近似的结构和维数，人们仍然能够分辨它们. 这种差异的产生是由于海岸线受到自然界随机因素的作用而显现出相当紊乱的形貌. 相比之下，人们感到一道闪电远比一条折线复杂. 这种复杂意味着什么？如何刻画这种复杂性？分形集的维数回答了这一问题.

§3 图形的维数

维数是图形最基本的不变量. 也是刻画分形集的要素之一. 例如自然界中的分形集的维数应是标度变换群作用下的不变量. 历史上，对图形维数的定义经历了漫长的探索. 早在两千多年前，欧几里德就给出图形维数的描述："曲面有两个量度，曲线有一个量度，点连一个量度也没有."这里的量度即欧氏维数. 后来将其定义为描述空间中一个点的位置所需要的独立坐标数目或连续参数的最小数目. 例如，曲线可用下述映射定义. $\mathbf{r}:[a,b]\longrightarrow\mathscr{R}^3$

$$\mathbf{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{1.1}$$

只需一个连续参数 t. 曲面也可用如下映射定义，$\mathbf{r}:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathscr{R}^3$

$$\mathbf{r}(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}\quad a\leqslant u\leqslant b,c\leqslant v\leqslant d \tag{1.2}$$

只需两个连续参数 u，v. 直观长期地迷惑了我们. 直到上世纪末，意大利数学家皮亚诺作出了一个初看起来甚至以为是悖论的惊人发现. 他指出，存在定义于实数轴上闭区间的连续映射，将区间映满平面上的二维区域，比如正方形或三角形. 这样的映射称作皮亚诺曲线或充满空间的曲线. 我们将在第二章给出其构造和详细分析. 当然这一曲线已经不是简单规则的曲线了，现在知道它是一条分形曲线.

皮亚诺的例子告戒人们，定义空间的维数时必须十分小心．把集合 X 的维数定义为确定 X 各点所需连续参数的最少个数并不妥当．因为照这样定义，皮亚诺的例子说明正方形区域或三角形区域将是一维的！

于是，人们提出：图形的维数到底是什么？本世纪初，阐明这个概念的意义并创立维数理论的是苏联数学家乌雷松．其定义如下：

称图形 X 是零维的，如果在其中不存在包含多于一个点的连通图形．归纳地，若已经确定 $n-1$ 维和更低维的图形，则 n 维图形就定义为：它不是 $n-1$ 维或更低维的，且可以用 $n-1$ 维（或更低维）的图形把其中任意点及其邻近点同图形的其余部分分割开．

乌雷松定义的维数是拓扑不变量，即在拓扑变换之下保持不变．但是空间再抽象一些，如拓扑空间，其拓扑维数的定义并非易事．即使是特殊的紧致豪斯道夫空间，维数的定义也是抽象难懂的，我们不拟深入介绍．

乌雷松定义的维数只取整数，它可以解决关于皮亚诺曲线维数的疑难．由于用点不能将皮亚诺曲线上任一点及其邻近点和其它部分分开，因此其维数为 2．但是拓扑维数也没有对集合整体的复杂程度或集合占有空间的规模给出很好的描述．想想看，在圆锥曲线和皮亚诺曲线之间，还有许许多多的曲线，它们的复杂程度很不一样，占有空间的规模也大不相同，只要没有填充一个邻域，按乌雷松的定义，它们的维数都为 1．科契曲线和谢尔品斯基地毯就是这样的例子．为了刻画曲线占有空间的规模，其维数应该扩展到 1 与 2 之间的实数．类似地，为了刻画离散点集占有空间的规模，维数应扩充到 0 与 1 之间的实数．为了刻画不同曲面占有空间的规模维数应扩展到 2 与 3 之间的实数等等．维数跳出整数的圈子，就产生了分形几何学．人们从不同角度定义的维数，已有相似维数、豪斯道夫维数、盒维数、容量维数、布利干维数、信息维数、关联

维数乃至广义维数的连续谱等等.

实际上,分数维并不是近年才提出的新概念.早在1919年,在波恩工作的大数学家豪斯道夫就提出了维数应该可以取分数的思想,并创立了豪斯道夫测度和维数.以后的贝塞考维奇也曾致力于这一工作.但由于历史的局限,他们的创造性工作没有引起更多人的重视.

迟至70年代中期.分数维的概念才逐渐传播开来,80年代形成了席卷全球的"分形热潮".如今,它已渗透到数学、物理、化学、生物、医学、地质、地震、冶金、材料、工程、经济等领域.它不仅引出了许许多多的新问题,还为解决古老的难题带来了新的希望.湍流与相变就是两个著名的例子.相变点附近的涨落花斑,发达湍流中的高旋涡区域,都是分形的物理实例.它们都在大、中、小、微许许多多尺度上表现出紊乱状态,这正是从理论上描述它们的困难所在,也是借助分形理论中的标度对称性解决问题的希望所在.在无标度区内求出的重要特征量分维,浓缩了它们在几何形态上的很多重要信息.

目前人们对分形与分维表现出如此强烈的爱好,其主要原因有三条.第一,传统的数学研究方法与计算机图形学相结合,协助人们推开了分形这座艺术宫殿的大门,这座具有无穷层次结构的迷宫,使成千上万的科学家和艺术家留连忘返.第二,物理学家和许多其它领域的科学家起了推波助澜的作用.在他们手中,分形和自然界里的真实事物产生了不解之缘.他们越来越惊奇地发现,自然界里到处是分形.湍流、相变、银河系中的星团、流体在孔隙介质中的渗流,给出令人眼花缭乱的分形图象.他们用分形模型描述自然界的复杂现象,在无标度区里计算实际系统的分维.从传统的理论中呼唤出合理的内核,并力图与新的维数结合,给复杂的现实以新的解释.第三,富有传奇色彩的多面手,年轻的法国数学家曼

德尔布罗特(B·B·Mandelbrot)以其坚韧不拔的毅力和大无畏的精神.为分形几何的诞生立下了不朽功勋,并对分形几何的广泛应用起了持续推动的作用.

§4 分形几何的产生与曼德尔布罗特的业绩

1960年,曼德尔布罗特从棉花价格数据随时间变化的曲线上,看到了在他脑海中逐渐形成的一幅现实世界的图画.Mandelbrot对这些数据进行计算机处理,发现了所寻求的惊人结果.从正态分布角度产生偏差的数字,从尺度变换的角度却给出了对称.价格的每一次特定的变化是随机的、不可预测的,但长期的变化又是与尺度无关的.价格的日变化和月变化曲线完全一致.甚至在经历两次世界大战和一次大萧条的60年动荡岁月中,价格变动的程度保持不变.大量无序的数据里竟然存在着一种出乎意料的有序.它使Mandelbrot日益增强了探索尺度现象的决心.

这以后不久,庇护他的IBM公司正非常关心一个实际问题.工程师们被计算机之间通讯用的电话线中的噪声问题弄得不知所措.工程师们发现,某种自发噪声怎么也无法消除,它偶尔会抹掉一部分信号,造成误差.Mandelbrot通过与工程师们交谈,得知了传输噪声在本质上是随机的,但以聚群出现时情况就不同了.越仔细观察这些聚群,误差的模式看来就越复杂.Mandelbrot采取了一层一层地深入区分无误差传输和误差传输期间的描述方式.他论证说,与直觉相反,根本不可能找到一段时间,其中误差是连续散布的.在任何一群误差中,不论时间如何短,总会存在几段完全无误差的传输.更令人吃惊的是,他发现了误差聚群与无误差传输段之间一致的几何关系.无论是在小时还是在秒的尺度上,无误差期间与有误差期间之比总是常数.工程师们没有现成的框框来理