理论物理习题集

上海市物理学会教学研究委员会编

上海科学技术文献出版社

上

前　　言

为了提高大学基础物理教学质量，上海市物理学会教学研究委员会从 1981 年秋开始举办了“理论物理讲习班”，并结合讲课编写了习题讲义，本书是在此习题讲义的基础上修改补充而成的。本书内容包括“理论力学”、“电动力学”、“热力学统计物理学”和“量子力学”四部分共二十五章。每章分“内容提要”和“习题题解”两部分。本书可作为大学、中学物理教师、物理系大学生、研究生的参考用书。

本书的理论力学部分是由上海师院张民生编写，电动力学部分是由华东师大徐在新、密子宏编写，热力学统计物理学是由复旦大学苏汝铿编写，量子力学部分是由复旦大学曾心愉编写。复旦大学贾起民、交通大学张馥宝、上海物理学会汪朗煊等同志为本书的出版做了不少工作，在此我谨代表上海市物理学会教学研究委员会对他们表示衷心的感谢，并希望读者对书中的错误和不足之处提出宝贵的意见，使我们今后的工作做得更好。

上海市物理学会教学研究委员会

主任委员　王福山

1982.2

目　录

·理论力学·

·电动力学·

·热力学统计物理学·

·量子力学·

理 论 力 学

第一章　质点力学

一、运动的描述

1．选取参照系和适当的坐标系(直角坐标或曲线坐标)。

2．运动学方程

(1) 矢量形式 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$

(2) 坐标形式

直角坐标　$x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$

曲线坐标　$q_1=q_1(t)$, $q_2=q_2(t)$, $q_3=q_3(t)$

3．轨道方程

从运动学方程消去 t 即得。

二、速度和加速度

1．矢量形式　$\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$,　$\boldsymbol{a}=\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$

2．分量形式(平面运动)

坐标系		速度	加速度
直角坐标	轴向	$\dot{x}$, $\dot{y}$	$\ddot{x}$, $\ddot{y}$
平面极坐标	径向	$\dot{r}$	$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$
	横向	$r\dot{\theta}$	$\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$
自然坐标	切向	$\dot{s}$	$\ddot{s}$ 或 $v\dfrac{dv}{ds}$
	法向	0	$\dfrac{v^2}{\rho}$

三、平动参照系

1．匀速直线运动参照系

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'$$

（绝对速度＝牵连速度＋相对速度）

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$$

（绝对加速度＝相对加速度）

2．加速直线运动参照系

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}'$$

（绝对加速度＝牵连加速度＋相对加速度）

四、质点运动微分方程

1．一般步骤

(1) 理解题意。

(2) 作草图。

(3) 选取适当坐标系并规定质点的坐标。

(4) 标出已知及未知的力和加速度。

(5) 写出质点运动方程。

(6) 解方程。

(7) 讨论。

2．自由质点

(1) 矢量形式，$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}$

(2) 分量形式

直角坐标

$$m\ddot{x}=F_x,\ m\ddot{y}=F_y,\ m\ddot{z}=F_z$$

平面极坐标

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r \\ \dfrac{m}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=F_\theta \end{cases}$$

▲3．非自由质点——取消约束代以约束反作用力，将非自由质点问题化为自由质点问题，再和约束方程联立求解。

▲4．理想线约束——采用自然坐标系中的内禀方程。

$$m\frac{dv}{dt}=F_\tau,\quad \frac{mv^2}{\rho}=F_n+R_n,\quad 0=F_b+R_b$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为约束反作用力。

五、非惯性参照系

对非惯性参照系只要加上适当的惯性力，则牛顿运动定律就“仍然”可以成立。惯性力 $\boldsymbol{F}=-m\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{a}_0$ 是非惯性系相对于惯性系的加速度(牵连加速度)。

六、功与能

1. $W=\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_A^B F_x dx+F_y dy+F_z dz$

2. 功与路径无关的条件

功与路径无关 $\Leftrightarrow \oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{F}=-\nabla V \Leftrightarrow \nabla\times\boldsymbol{F}=0$

3. 力所做的功与路径无关，这种力称为保守力，反之为非保守力。在保守力场中，$V=V(x, y, z)$称为势能。

4. $T=\frac{1}{2}mv^2$ 为质点运动的动能。

七、基本定理与基本守恒律

1. 动量定理

(1) $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$

(2) $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}$，$d\boldsymbol{p}=\boldsymbol{F}dt$，$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}dt$

2. 动量守恒律

(1) $\boldsymbol{F}=0\Rightarrow \boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}$ （常矢量）。

(2) $\boldsymbol{F}\neq 0$，但 $\boldsymbol{F}$ 在某一坐标轴上的投影为零，则 $\boldsymbol{p}$ 虽不守恒，但在该坐标轴上的投影为一常数。

3. 动量矩定理

(1) $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$

(2) $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$

(3) $\boxed{\frac{d\boldsymbol{J}}{dt}=\boldsymbol{M},}$ $\boldsymbol{J}_2-\boldsymbol{J}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}dt$。

4. 动量矩守恒律

(1) $\boldsymbol{M}=0\Rightarrow\boldsymbol{J}=\boldsymbol{c}'$ （常矢量）。

(2) $\boldsymbol{M}\neq 0$，但 $\boldsymbol{M}$ 在某一坐标轴上的投影为零，则 $\boldsymbol{J}$ 虽不守

恒，但在该坐标轴上的投影为一常数。

5．动能定理

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

6．机械能守恒律

在保守力场中，$T+V=E$（常数）。

7．各守恒律都是运动微分方程的第一积分，诸常数由初始条件决定。

八、有心力

1．$\boldsymbol{F}=F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$，$F(r)>0$ 斥力，$F(r)<0$ 引力。

2．一般性质

(1) 动量矩守恒，故作平面运动，一般取极坐标。

(2) 有心力是保守力。

3．$\begin{cases}m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F(r)\\ r^2\dot{\theta}=h\ （常数），mh\ 即动量矩的数值。\end{cases}$

4．轨道微分方程（比耐公式）

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-\frac{F}{m},\quad u=\frac{1}{r}$$

5．机械能守恒律

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)=E$$

6．平方反比引力—行星的运动

(1) $F=-\frac{GMm}{r^2}=-\frac{k^2m}{r^2},k^2=GM$

(2) $V=-\frac{k^2m}{r}$

(3) 轨道方程

$$r=\frac{h^2/k^2}{1+\sqrt{1+2h^2E/k^4m}\,[\cos(\theta-\theta_0)]}$$

$E>0$，双曲线；

$E=0$，抛物线；

$E<0$，椭圆。

7．宇宙速度

(1) 第一宇宙速度 $v_1=\sqrt{gr}\simeq 7.9\,\mathrm{km/s}$(绕地球转)。

(2) 第二宇宙速度 $v_2=\sqrt{2gr}\simeq 11.2\,\mathrm{km/s}$(脱离地球)。

(3) 第三宇宙速度 $v_3=16.7\,\mathrm{km/s}$(脱离太阳系)。

8．平方反比斥力——α 质点的散射

(1) $F=\dfrac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}=\dfrac{k'}{r^2}$，$V=\dfrac{k'}{r}$

(2) $E>0$，轨道为双曲线。

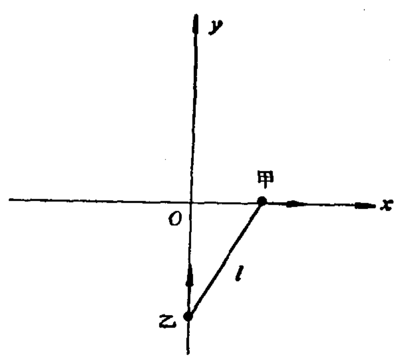
(3) $\boxed{\rho=\dfrac{2Ze^2}{mv_\infty^2}\operatorname{ctg}\dfrac{\phi}{2}}$，$\rho$ 为瞄准距离，ϕ 为偏转角，v_∞ 为入射粒子的初速。

(4) 卢瑟福公式

$$d\sigma=\frac{1}{4}\left(\frac{2Ze^2}{mv_\infty^2}\right)\frac{2\pi\sin\phi}{\sin^4(\phi/2)}d\phi$$

习　　题

1．东西向和南北向的二条公路相交于 O 点。甲车向东行驶，速率为每小时 40 公里，在正午经过 O 点。乙车以同样的速率向北行驶，在下午 1 时经过 O 点。问在什么时候，两车的距离最短，并求这一距离的大小。



解：取坐标系如图，x 轴向东，y 轴向北，O 为原点。

设正午 12 时正为 $t_1=0$，那么下午 1 时为 $t_2=1$ 小时。按题意，两车的运动方程为

$$\begin{cases} x = vt \\ y = v(t-t_2) \end{cases}$$

设两车的距离为 l,则有

$$l^2 = (vt)^2 + v^2(t-t_2)^2$$

对 t 求导,并令其为 0,则有

$$2l\frac{dl}{dt} = 2v^2t + 2v^2t - 2v^2t_2 = 0$$

$$4v^2t - 2v^2t_2 = 0$$

$\therefore \quad t = \frac{t_2}{2} = 0.5$ 小时

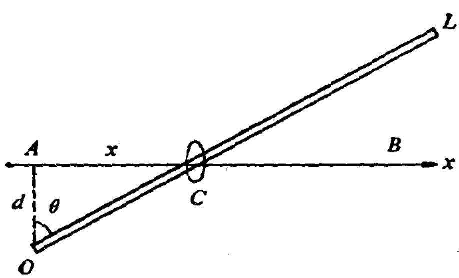
经计算可知,当 $t = \frac{t_2}{2}$ 时, $\frac{d^2l}{dt^2} > 0$, 因此该时刻所对应的 l 应为最短距离 $l_{\min}$。进一步可计算 $l_{\min}$

$$l_{\min} = \sqrt{v^2t^2 + v^2(t-t_2)^2}$$

$$\doteq 28.28 \text{ 公里}$$

即在正午后 0.5 小时(中午 12 时 30 分)两车距离最近, 这一距离为 28.28 公里。

2. 细杆 OL 绕 O 点以匀角速 ω 转动, 并推动小环 C 在固定的钢丝 AB 上滑动。图中的 d 为一已知常数, 试求小环的速度及加速度。



解: 选 A 点为 x 轴原点, x 轴与钢丝 AB 重合,向右为正。

小环 C 的座标和速度分别为

$$x = d\,\text{tg}\theta, \ \theta = \omega t$$

$$v = \dot{x} = d\omega\sec^2\omega t$$

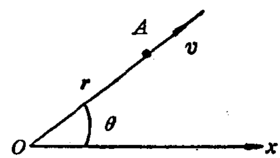
$$\because \quad \sec\omega t = \frac{\sqrt{x^2+d^2}}{d}$$

$$\therefore \quad v = \frac{\omega(x^2+d^2)}{d}$$

小环 C 的加速度为

$$a=\ddot{x}=2d\omega^2\sec\omega t\sec\omega t\ \mathrm{tg}\,\omega t$$
$$=\frac{2\omega^2x(x^2+d^2)}{d^2}$$

3．一直线以等角速度 ω 在固定平面内绕 O 点转动。当 $t=0$ 时，此直线与 Ox 轴重合，动点 A 从原点出发沿直线运动，若此动点的绝对速度值为定值 v_0，求其轨迹和加速度。



解：按题意，$\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2=v_0^2$。

将此式对 t 求导，可得

$$2\dot{r}\ddot{r}+2\dot{r}r\dot{\theta}^2=0$$
$$\therefore\quad \ddot{r}+r\dot{\theta}^2=0$$

而 $\dot{\theta}=\omega$ 为常数，因此有 $\ddot{r}+\omega^2r=0$。这一方程的解为

$$r=A\cos(\omega t+\phi)$$

应用初始条件，$t=0$ 时，$r=0$，$\dot{r}=v_0$，则可得

$$r=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

这就是 A 点的轨迹方程。对上式求导，即可求得 A 的加速度为

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-2\omega v_0\sin\theta,\quad a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=2\omega v_0\cos\theta$$

4．一质点沿矢径及垂直于矢径的速度分别为 λr 和 $\mu\theta$，式中 λ 和 μ 是常数。试证沿矢径及垂直于矢径的加速度分别为

$$\lambda^2r-\mu^2\theta^2/r\ \text{和}\ \mu\theta(\lambda+\mu/r)$$

其轨迹方程为

$$r=-\frac{\mu}{\lambda}\frac{1}{\ln(C\theta)}\quad(C\ \text{为积分常数})$$

证：按题意 $v_r=\dot{r}=\lambda r$，$v_\theta=r\dot{\theta}=\mu\theta$。由此可得

$$\dot{\theta}=\mu\theta/r$$

据此即可求得

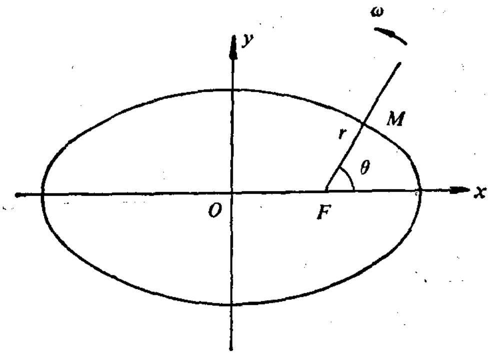
$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\lambda^2r-\mu^2\theta^2/r$$
$$a_\theta=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\ \frac{\mu\theta}{r}\right)=\mu\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{r}\right)$$

此外，由 v_r 和 v_θ 的表达式消去 dt 可得

$$\frac{dr}{r^2}=\frac{\lambda}{\mu}\frac{d\theta}{\theta}$$

积分后即可得轨迹方程。

5. 直线 FM 在一给定的椭圆平面内以匀角速 ω 绕焦点 F 转动。求此直线与椭圆的交点 M 的速度。已知以焦点为坐标原点的椭圆的极坐标方程为



$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

其中 a 为椭圆的半长轴，e 为偏心率，它们均为常数。

解：取焦点 F 为极坐标的原点。按题意 $\dot{\theta}=\omega$（常数），M 点的速度 $v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}$，其中 $v_r=\dot{r}$，$v_\theta=r\dot{\theta}=r\omega$。由椭圆方程可求得

$$\dot{r}=a(1-e^2)\frac{e\sin\theta\,\omega}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{r\omega e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

因此有

$$v=r\omega\sqrt{\frac{e^2\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2}+1}$$

$$=r\omega\sqrt{ra\frac{1+e^2+2e\cos\theta}{a^2(1+e\cos\theta)(1-e^2)}}$$

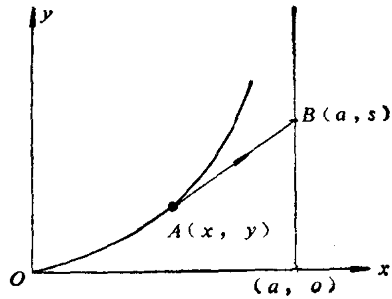
$$=\frac{r\omega}{b}\sqrt{r(2a-r)}$$

其中 $b=a^2(1-e^2)$。

6. 汽车以匀速 u 在平地上向正北方向驶去，此时在汽车的正西方有一摩托车以不变的速率 $2u$ 正对汽车追去。求摩托车的运动轨迹及追上汽车所需的时间。设二车开始时相距 a。

解：取坐标系如图。$t=0$ 时，汽车在 $(a,\ 0)$ 点，摩托车在原点。设 t 时刻，摩托车的位置为 $A(x,\ y)$，汽车的位置为 $B(a,\ s)$，其中

$s=ut$。由于摩托车正对着汽车追赶，所以 AB 应为摩托车轨迹的切线。由图可知



$$y-s=\frac{dy}{dx}(x-a) \qquad (1)$$

按题意应有

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=(2u)^2=4\dot{s}^2 \qquad (2)$$

将(1)式对 x 求导可得

$$\frac{ds}{dx}=-\frac{d^2y}{dx^2}(x-a)$$

将(2)式代入可得

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2(x-a)^2$$

令 $Q=\frac{dy}{dx}$，则上式可变形为

$$\frac{dQ}{\sqrt{1+Q^2}}=\frac{dx}{2(a-x)}$$

积分上式，可得

$$(Q+\sqrt{1+Q^2})\sqrt{a-x}=C$$

注意到 $t=0$ 时，$x=0$，$Q=0$。上式可进一步化为

$$Q=\frac{1}{2\sqrt{a}}\frac{x}{\sqrt{a-x}}$$

再积分，并应用初始条件 $t=0$ 时，$x=0$，$y=0$，可得

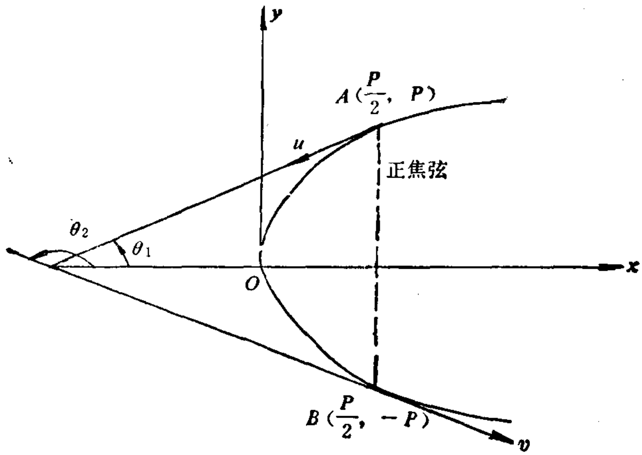
$$y=-\frac{2a+x}{3\sqrt{a}}\sqrt{a-x}+\frac{2}{3}a$$

这就是摩托车的轨迹方程。

当摩托车追上汽车时，$x=a$。代入轨迹方程可求得：$y=\frac{2}{3}a$。而此时 $s=ut=y=\frac{2}{3}a$，因此追上的时间为

$$t=\frac{2a}{3u}$$

7. 一质点沿着抛物线 $y^2=2px$ 运动。其切向加速度为法向



加速度的 $-2k$ 倍。如此质点从正焦弦 $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ 的一端以速度 u 出发，试求其达到正焦弦另一端时的速率。

解：选用座标系如图示，质点之切向与法向加速度可表为：

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\,\frac{dv}{ds}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = v^2\,\frac{d\theta}{ds}$$

据题意有

$$v\,\frac{dv}{ds} = -2kv^2\,\frac{d\theta}{ds}$$

$$\therefore\quad \frac{dv}{v} = -2kd\theta \tag{1}$$

因要求质点从 $A\left(\frac{p}{2}, p\right)$ 以初速 u 沿抛物线运动到 $B\left(\frac{p}{2}, -p\right)$ 所具有的速度 v，所以必须先求出上式积分的上下限之值。因 $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}$，而 $y^2 = 2px$，所以 $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$。对应 A 有 $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{p}{p} = 1$，$\therefore\ \theta_1 = \frac{\pi}{4}$，相应的速度为 u（已知）。对应 B 有 $\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{-p}{p} = -1$，$\therefore\ \theta_2 = \frac{3}{4}\pi$，相应的速度为 v（待求）。

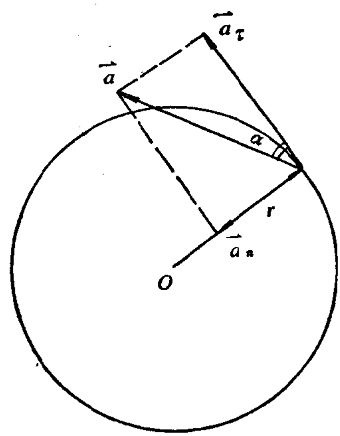
将(1)式积分有：

$$\int_u^v \frac{dv}{v} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (-2k)d\theta$$

得
$$\ln\frac{v}{u} = -k\pi$$

$$\therefore \quad v = ue^{-k\pi}$$

8. 质点沿着半径为 r 的圆周运动，其加速度矢量与速度矢量间的夹角 α 保持不变。求质点的速度随时间而变化的规律。已知初速度为 v_0。



解：据题意，其加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 与速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 间夹角 α 保持不变，这意味着 $\frac{a_\tau}{a_n} = \text{ctg}\,\alpha =$ 常数。

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r}\text{ctg}\,\alpha$$

积分可得

$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = \frac{t}{r}\text{ctg}\,\alpha$$

所以有
$$v = \frac{v_0 r}{r - v_0 t\,\text{ctg}\,\alpha}。$$

9. 一质点沿一平面曲线 $y=f(x)$ 运动，保持 $\frac{dx}{dt}=1$。试根据加速度的直角坐标表达式和自然坐标表达式证明该平面曲线的曲率为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

证：在自然坐标表达式中

$$a^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}v^4 \qquad (1)$$

在直角坐标表达式中