误差理论与广义逆矩阵

〔瑞典〕布耶哈马　著

魏子卿　译

党诵诗　校订

测绘出版社

误差理论与广义逆矩阵

〔瑞典〕布耶哈马　著
魏子卿　译
党诵诗　校订

测绘出版社

本书主要是以广义逆矩阵为工具，研究测量平差和有关的方差分析问题。可作为测绘类各专业教学参考书，也可供测绘科研人员和平差工作者参考。

A.BJERHAMMAR
THEORY OF ERRORS AND
GENERALIZED MATRIX INVERSES
ELSEVIER SCIENTIFIC PUBLISHING COMPANY
AMSTEROAM 1973

误差理论与广义逆矩阵

魏 子 卿 译
党 诵 诗 校订

*

测绘出版社出版
测绘出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本787×1092 1/16·印张20 5/8·字数472千字
1980年8月第一版·1980年8月第一次印刷
印数1—4.800册·定价2.10元
统一书号·15039·新142

前　　言

如何阅读本书　在大多数书中，按顺序阅读所有章节是重要的。但这不一定是阅读本书的最好方法，所以我们给你某些引导线索。误差理论的初步介绍将在第二章至第八章中找到。几乎没有包括比较集中的研究和详细证明。我们期待读者将这一部分用作复习课程，需要时应参阅统计学教科书。

在随后的几章中，用不同方法分析了多维问题。首先借助经典的无限小运算，用矩阵方法一般地提出了问题，然后继之以无任何无限小运算的一般方法。在此研究中，只用到了初等矩阵代数运算—加法、减法、乘法和求逆。

广义逆矩阵在第九章引入，但许多读者将发现，为了了解更详细的证明，平行研究附录一是方便的。对于要求容易掌握最小二乘法中广义逆阵的读者，提前研究第二十九章是有价值的。

在第十八章，提出了多维正态分布以及独立平方和的一般证明。

在差不多各章中都有应用，但大部分应用将在第十四章至第十八章中找到。大多数应用取至平面几何学、普通测量学、摄影测量学、大地测量学、物理学和地球物理学。在大多数研究中，包括了方差分析和假设检验。

如所周知，很多读者都或多或少把教科书当作一本百科全书来用，所以在不同章节之间互有某些重迭。例如第十一章和 11.1 节的引言。

第二十三、二十四和二十五章，提供了更成熟的估计问题。

在误差理论中通常不考虑非随机误差概念，但在第二十八章，可以找到误差范数的基本概念。对于现代计算机程序编制，这一章是特别重要的。

应当说明，出于教学上的理由，在所给的例子中，我们常用很少的小数位数字表示观测值，这是跟正确的实际程序相矛盾的。而且，大多数例子在计算机上解过，在答案中仅包括有限位数字。所以，重算时，可能有时会发现微小的差异。

本书还讨论了在计算机上由随机数生成正态分布，t 分布和F分布的问题。为了方便计算机应用，方程组的大多数数值研究，还包括了方程组条件数的确定。为了改进解的稳定性，使用了带条件数的操作。

需要强调的是，用解析方法连续进行检验应当用离散的计算机手段加以证实。

本书是 1955 年出版的作者著的瑞典教科书《误差理论》（*Felteori*）的英文版本。第二十二章以后全部是新加的，早先的某些章节作了修改。

Arne Bjerhammar，斯德哥尔摩，1972

目　录

第一章 绪 论

现代社会对先进的测量技术依赖极大。宇航学家和已经征服月球以及可能不久将要征服其他行星的人们之杰出成就,使我们受到鼓舞。在最近十年间,这些全然建立在最精细的测量技术基础上的优秀成果,使我们对于测量技术及其数学处理的兴趣,有巨大的增长。

1927年,沃纳、赫森伯格阐述了'测不准'原理,这一原理确定了测量的极限精度。他指出,以高于由普朗克量子常数 h 的量级(6.6×10^{-27} 尔格秒量级)所给出的精度,确定质点的坐标,基本上是不可能的。赫森伯格认为,一个观测总是对被观测的事件有所扰动,这个扰动将最终导致观测精度的基本限制。

根据量子物理学的这一观点,我们几乎不能期望可以用测量来确定一个物理量的真值。但是,这种基本的不定性,对于我们生活必须面临的大多数工作来说,更多的是哲理性质,而较少的是实践性质。按照赫森伯格的看法,如果一个尺度的长度未被唯一地确定,要定出用该尺度所作的任何测量的误差,将是不可能的。显然,误差的定义不象有时所想象的那样简单。一般来说,多数人们都接受陈述或者正确或者不正确的哲学。不同的人,目睹同一事件,而理解却往往全然不同。法庭上有无数的审判例子。在那里,对两个对手而言,'真相'是不同的。我们很难认为,一个对手是撒谎,而另一对手说实话。某甲说,一伙人有四个,而某乙则说,他只看见两个人。这两种说法,都可能正确而无错误。若正确的数目是四,当用某乙的说法确定这伙人数时,我们就犯一个错误。这意味着,在实际生活中,误差很难唯一地加以定义。当我们触及稍再复杂的问题时,情形就更为复杂。我们必须对误差下一个有用的定义。对于大多数应用而言,如下定义是可以被接受的:

$$误差 = 观测值 - 真值$$

我们业已指出,'真值'通常是不可得到的。但是,在数学中,测不准原理常是不相干的,这里我们甚至找到可准确唯一定义的运算。例如,我们可以用 $a+b+c=0$ 定义线性代数。

1.1 舍入误差

在应用数学中,当我们试用数字表示数学关系时,可能会遇到某些困难。若准确的原始关系写为

$$1/3+1/3-2/3=0$$

则数字表示可能是

$$0.333+0.333-0.667=-0.001$$

明显地我们这里遇到了舍入误差。

这类误差通常可以由任何需要的位数来确定,但是在实际应用中我们难免受许多限制。这些限制同科学上的困难没有直接联系。当决定适当的位数时,时间和经费的限制是

最终必须考虑的另一个问题。对于大型方程组的解算，舍入误差引起的危险，不得不认真加以考虑。在下面的研究中，我们未进行舍入误差的直接分析。但是，舍入误差可能间接地影响到我们的研究。我们假设，数字位数的选择，不致于对我们的研究有显著的影响。应当注意，还有相关的第二类舍入误差。首先我们记录我们的观测，这些记录确定了测量结果。若记录用的位数太少，将会受舍入误差的损失，使一组观测给出同一结果。当我们使用仅有米刻划的测量带尺时，我们通常可以预料，至少对于较短的距离，可能会得到相同的一组观测。对于有分米刻划的带尺，可以预料或许有两组或三组相同的观测。最后，如果我们使用有毫米刻划的带尺，我们可以预料，所有的观测都是不同的。

下面给出一个例子：

情形一：用米刻划记录

一组：47，47，47，47，47

情形二：用分米刻划记录

两组：47.3，47.3，47.2，47.2，47.2

情形三：用毫米刻划记录

47.251，47.254，47.244，47.241，47.243

此例表明，除最后一种情形外，其余两种情形，记录的数字位数都是不够的。只要得到几组同样的记录，我们就可以怀疑技术欠妥，应予以改进。舍入误差可用矩形分布按统计方法处理。在一般情形下，要用数值分析。舍入误差的专门研究，参阅第二十八章。

1.2 非偶然误差

最明显的非偶然误差是错误或粗差。在进行测量时，代替正确值 75，我们观测成 57，就产生一个大错。所有这种误差通常可在其影响最后结果之前检查出来，我们不准备对这种误差进一步进行分析。

在早期阶段，确定某些误差具有明显的系统性质，在有些情况下这是可能的。在我们用一个其单位有常误差的测量系统量测长度时，就是一个明显的事例。如果参考单位是米，误差是 0.1%，在 1000 米的距离上，我们将有一米误差。为了给出消除系统误差方法的例子，我们可以提出大地光电距离测量。国际大地测量与地球物理联合会已采用 299,792.5 公里/秒作为真空光速值。这个值似乎有 100 米/秒量级的误差，这意味着，如果我们用国际米定义作为参考单位，就不可能排除距离有 10^{-6} 的量级的系统误差。但是，如果我们不顾米定义，而代之以给定的光速值当作基本定义，那么情况就好得多。在天文学和大地测量学中，光速是个更自然的原始单位。至恒星的距离用光年量度，或者，或许用纳秒（毫微秒）量度更方便些。但是，这些矛盾对于大多数研究而言，其实际重要性很小，这不过是为了指出系统误差有时是由原始单位的定义不适当引起，才提出来而已。如果真空光速唯一确定，我们可以极小的系统误差来确定任何需要的长度单位，因为原子钟给出的时间，其系统误差很小，原子钟的频率漂移常小于额定频率的 10^{-11}。在目前野外作业用石英钟的方法，我们仍然必须考虑振荡器的频率误差。

真空光速转移到大气光速有相当的困难。折射系数受大气误差的影响。我们难以期

望，光线是在物理性质不变的大气中运行的。事实上我们知道，大气有围绕地球按层分布的倾向，我们必须加光线曲率改正。这项改正可以用‘正常大气’的参数计算，但利用在测线两端的垂直角测量或许更正确些。另一途径是利用红光和蓝光之间的色散。

大地距离通常归化到参考椭球，所以需要一项附加改正。此项改正将地球的重力场引入我们的计算。计算A点和B点在参考椭球上的高程，通常将大地水准面作为中间参考面。大地水准面是与平均海水面重合的等位面。通过解算相当复杂的积分方程，可以确定这个面，而解积分方程需要全球的重力资料。大地水准面在参考面上的高程是±100米的量级。在大地水准面的研究中，我们有时必须考虑地球潮汐，它使地壳每天升高±0.3米左右。

如果我们溯及原来的距离测量，我们还必须加上一项群速度在光学反射器内变化的改正数。而且，若使用早期类型的光电装置，在装置内相位角的每一个别读数，必须加系统误差改正。对于这类仪器，总的距离，是作为整调制波长数加一个调制波长的附加零头计算出来的。整波长数通常可以唯一地确定，一个波长的附加零头，用电延迟器测定。由于电延迟器不稳定，总需要以光学延迟器作标准去校准它。早已发现，这类校准在实际工作中很不方便，能用自校系统更好。在新型的仪器中，直接测量相位角，这种方法是自校的，因为一个波长的最后零头可以测定，而无任何显著误差。对于用微波系统测距，类似的方法也是适用的。

关于光电测距，必须考虑的改正和归算概括如下：

1． 所采用的真空光速值的改正；
2． 测量仪器振荡器的频率改正；
3． 用波长，温度和气压的测量值化算群速度；
4． 光线曲率改正；
5． 仪器和反射器的内部和外部偏心改正；
6． 所有辅助仪器，如经纬仪，温度计，气压计，重力仪和水准仪的误差改正；
7． 投影到大地水准面；
8． 投影到参考椭球面。

这样可能有许许多多系统误差源，都影响归算到地球参考面上的距离之最后结果。明显地，只有最高精度的大地测量才需要加1～8项全部改正。

测角仪器也有自校的便利。在标准型的经纬仪，由度盘分划两个相对位置上进行读数来完成自校，则偏心误差被消除了。分划系统误差用若干组的重复测量来消除，而这些组沿整个度盘分布。照准系统误差，用倒转望远镜，并重复读数来消除。在地表面上的角度测量，受重力场的影响，因为我们利用了铅垂线使仪器定向。铅垂线的任何偏差，引起水平角和垂直角产生系统误差。垂线偏差可以用全球的重力资料计算。

为了求出垂线偏差改正，需要解算包括利用几十万个重力数据的不同类型的复杂积分方程。作为一个替换办法，也可以利用卫星数据。局部垂线偏差很少大于10″。垂直角中的折射误差，经常比垂线偏差大十倍以上。在用垂直角计算高程时，需加折射误差改正。在对向测站上同时测量垂直角，常用于这个目的。用红光和蓝光测量，也可用来确定折射

误差。还有一类系统误差，只是当最后结果引入数学模型时才有关系，这里数学模型本身可能包括系统误差。我们可以取一个三角形为例，其中测量了所有的距离和角度。如果我们将平面几何学用在这个椭球面上，我们就引进了新的系统误差。

上面列举的系统误差改正，只是一个例子。在许多情况下，没有系统误差的资料以资利用。

1.3 偶然误差

在讨论系统误差时，我们没有理由怀疑基础测量的唯一性。但是，我们从经验知道，大多数观测值不会重复，给出同样的结果。这意味着，我们还必须考虑另一类误差——偶然误差或随机误差。偶然误差是如此变化，个别误差不能有意义地预先算出，根据这一点，看来比较容易区分系统误差和偶然误差。在实践中，情形要复杂些。在观测方程的数学处理中，我们通常限于用偶然误差的估值运算。明显的，各种数学模型可能差别很大，所以偶然误差和非偶然误差之间，不能确定截然的界限。

众所周知，偶然误差遵从某些一般定律。根据高斯的观点，大多数物理观测的偶然误差是所谓正态分布。已经证明，如中心极限定理所述，对于有许多不同误差源的观测，其极限分布是正态型分布。这意味着，偶然误差的数学处理是可以考虑的。在以后的研究中，我们将利用不同的检验，使得在进行最后计算之前，能够辨别出系统误差和偶然误差。但是要使偶然误差和非偶然误差完全分开，一般是不可能的，这样谈论这类方法的严密性就无多大意义。‘绝对真值’不可能从随机变化的观测得到。对于许多物理研究而言，仔细地研究误差本身，看来是有价值的。我们准备将统计方法与观测误差的分析相结合，来进行研究。

1.4 方　　法

在本书的研究中，我们将使用广义矩阵代数，在广义矩阵代数中，任何矩阵至少有一个逆阵。广义逆阵给出线性无偏估值的集合，能使我们把所有误差的全体集合显示出与观测方程相容。而且，它使得可能直接用矩阵的加法、减法、乘法和求逆等初等运算来计算最小方差。广义逆阵还可以用来研究有奇异协方差矩阵的有趣问题，这种问题在实际技术方面常常是重要的。当使用对于任何特殊的测量值集合未给以优先的坐标系统时，我们将全面地研究这些问题。例如，当不同国家的大地网同全球网联结在一起时，以及对常规三角测量进行方向平差时，这些问题是有意义的。

1.5 术　　语

经典误差理论，是由高斯（1777～1855）发展起来的。偶然误差的分布，被认为是由高斯的‘正态分布’明确定义的，而‘最小二乘法’提供一个有‘最大概率’的适当解。在高斯所作的早期研究中，只可以对无限大总体进行概率的研究。后来，德国大地测量学家赫尔默特包括了 χ^2 分布的研究。在大地测量学和天文学中，正式使用各种平差方法，特别有意义的是间接平差，条件平差，组合平差和带未知数的条件平差。这样对于许多应用，

最小二乘法得到了充分的探讨。马尔科夫对于最小二乘法作出了有意义的推广，他指出，对于具有有限方差的任何分布，最小二乘法都给出最佳线性（最小方差）无偏估值。费歇耳广泛地研究了不同自由度的方差比。这些研究，对现代的方差分析有根本的重要性。已经发现，方差分析非常有用，特别在生物学方面。这些方法，在现代科学的各个领域，已得到普遍的采用。

所有测量需要定义所用的单位。国际上，在巴黎的国际权度局负责建立基本标准，和主要物理量的尺度，并同长度、质量、温度等的国家标准进行必要的比较。1955 年，在巴黎建立了国际法律计量学组织，它们的职责是决定法律计量学的一般原则。1968 年，该组织通过了法律计量学辞汇。现在还没有英语译文，我们只给出几个关键辞汇的试用译文：

校准（*Calibration*）：为确定被观测量的值，使之符合测量仪器的实际指标，与确定由实际量测所产生量的值，所进行的一套操作。

标准化（*Standardization*）：为了使测量仪器成为使用标准，而测定与鉴定它们的误差值所进行的一套操作。

测量的重复性（*Repeatability of Measurements*）：同一观测者观测同一物理量所得的逐次测量值之符合程度。

测量的再现性（*Reproducibility of Measurements*）：用不同的测量仪器，由不同的观测者，或在不同条件下观测同一物理量，各个测量值的符合程度。

测量仪器的精度（*Accuracy of a Measuring Instrument*）：说明测量仪器给出被量测的物理量真值之能力的质量指标。

注：仅对实际方法感兴趣的读者，第二章可以不读。第一章到第八章对初等统计运算给以简要的介绍，这些章节应当看作是比较新鲜的课程。

第二章　随机模型

数学模型可用来描述一个事物或一个状态。当无法准确预测随机试验的结果时，就用随机模型。而在其他情况下，则用确定的模型。这里将用集(合)论来研究随机模型。

2.1　集（合）

集（合）论常用作数学表示的一种现代工具。某些作者认为，集（合）论是所有数学研究的基本工具。对于我们的研究，要用到下列定义：

1. 一个集(合）就是被称为元素的那些对象的全体。
2. 当 a 是集 A 的一个元素时，我们写为 $a \in A$。
3. 集 A 可以是另一个集 B 的子集。这时我们写为 $A \subset B$。子集 A 的全部元素均在集 B 中。
4. 若 A 和 B 是两个集(合)，则并集 $A \cup B$ 包括那些至少属于两集之一的全部元素。
5. 交集 $A \cap B$ 包括那些同时属于集 A 和集 B 的全部元素。
6. 若集 A 和集 B 无公共的元素。则交集是空集：$A \cap B = \phi$。
7. 空集 ϕ 是任一集 A 或集 B 的一个子集。
8. 若 $A \subset B$，并 $B \subset A$，则 $A = B$。

2.2　结　　果

随机试验的所有可能结果的集(合)，叫做结果空间 Ω。显然，一个结果是结果空间的一个子集。

我们用 $\Omega = \{u_1 u_2 \cdots u_n\}$ 表示结果空间，用 $u_1, u_2 \cdots u_n$ 表示各个结果。一个事件 A 可以由若干结果组成。例如，

$$u_i \subset A \subset \Omega$$

在掷骰子游戏中，我们有六个不同的结果

$$u_1 = 1，u_2 = 2，u_3 = 3，u_4 = 4，u_5 = 5，u_6 = 6$$

和

$$\Omega = \{1，2，3，4，5，6\}$$

一个离散的结果空间是可数的，这意味着它可以包括任何数目的可能结果。我们这里通常考虑有限个数的结果。一个连续结果空间是不可数的。

$\Omega \times \Omega$ 给出了用两颗骰子作一次试验的联合结果空间（见表 2.2.1）。

表2.2.1　用两颗骰子作一次试验的联合结果空间

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	u_1u_1	u_1u_2	u_1u_3	u_1u_4	u_1u_5	u_1u_6
u_2	u_2u_1	u_2u_2	u_2u_3	u_2u_4	u_2u_5	u_2u_6
u_3	u_3u_1	u_3u_2	u_3u_3	u_3u_4	u_3u_5	u_3u_6
u_4	u_4u_1	u_4u_2	u_4u_3	u_4u_4	u_4u_5	u_4u_6
u_5	u_5u_1	u_5u_2	u_5u_3	u_5u_4	u_5u_5	u_5u_6
u_6	u_6u_1	u_6u_2	u_6u_3	u_6u_4	u_6u_5	u_6u_6

这里结果是 $A_1=u_1,u_1$； $A_2=u_1,u_2$ 等等。其和等于10的事件A可由（u_4,u_6），（u_5,u_5）和（u_6,u_4）得到。

一般的联合结果空间是空间 $\Omega_1\times\Omega_2\cdots\times\Omega_n$，

对于并集和交集，交换律、结合律和分配律是成立的：

$A\cup B$	$=$	$B\cup A$	交换律
$A\cap B$	$=$	$B\cap A$	同上
$A\cup(B\cup C)$	$=$	$(A\cup B)\cup C$	结合律
$A\cap(B\cap C)$	$=$	$(A\cap B)\cap C$	同上
$A\cap(B\cup C)$	$=$	$(A\cap B)\cup(A\cap C)$	分配律
$A\cup(B\cap C)$	$=$	$(A\cup B)\cap(A\cup C)$	同上

另外，例如有$A\cup A=A$，$A\cap A=A$.

例：若　$A=\{1,2,3,4\}$，　$B=\{3,4,5,6\}$　　则

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A\cap B=\{3,4\}$

$A^C=\{5,6\}$

1．并集$A\cup B$给出A或B至少有一发生的结果。

2．交集$A\cap B$给出A和B同时发生的结果。

3．补集A^C给出结果$\Omega - A$。

读者应该熟悉基本的集运算，我们用维恩图（图 2.1）表示之。