高 等 代 数

冯春龄　许心正 编

黑龙江人民出版社

责任编辑：孙怀川
封面设计：张鸿翔

高等代数

冯春龄　许心正　编

黑龙江人民出版社出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
牡丹江印刷总厂印刷　黑龙江省新华
开本787×1092毫米1/32·印张18 8/16·字数
1983年9月第1版　1983年9月第1次
印数1—11,600

前　　言

近年来，高等数学中的某些基本概念与基本运算的内容已下放到中学。为了适应中学教师教学及自学青年学习的需要，我们编写了这本《高等代数》。

本书内容包括三个部分，即多项式理论；线性代数；群、环、域的基本概念。本书的内容不低于大学数学专业同名课程的要求，书中配置了适量的具有一定难度的习题。在写法上，力图做到深入浅出，通俗易懂，以利自学。

本书的主要读者对象是中学数学教师与高等院校数学专业学生，也可做为函授大学教材，并可供青年自学参考。

本书由冯春龄、许心正同志执笔编写。田兆民同志负责配置习题并参加了最后的定稿工作。限于编者水平，难免有缺点与错误，欢迎读者批评指正。

编　者

1982 年于哈尔滨

目　　录

第一章 行列式

在中学代数里，我们已经学过二元和三元一次方程组的解法。但是，许多从理论和实际问题中所导出的一次方程组并不都那样简单，往往含有相当多的未知量，并且未知量的个数与方程的个数也不一定相等。因此，在高等代数里我们将讨论含有任意个未知量任意个方程的一次方程组。今后我们将一次方程组称为**线性方程组**。

线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表未知量，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 代表线性方程组中第 i 个方程第 j 个未知量 x_j 的系数，$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 代表常数项。

这里将在全体复数范围内来讨论线性方程组，即方程组中未知量的系数与常数项皆视为复数。以后提到数时，如果不特殊声明，均指复数。

若有 n 个数 k_1，k_2，$\cdots$，k_n，用它们分别代（1）中的未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 后，使(1)中的每个方程均变为等式时，则称 $k_1, k_2\cdots, k_n$ 为(1) 的一个解。求出线性方程组的所有解，

称为**解线性方程组**。

本章只讨论方程的个数与未知量的个数相等，且仅有唯一解的这一类特殊线性方程组的求解问题。讨论这一类方程组时，将要用到一个工具，即行列式。行列式是从解线性方程组中建立起来的，它在数学和其它科学领域如物理学中均有广泛的应用。

§1 排 列

我们学习初等代数时已经知道，在解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

的过程中，给出了二阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中横排称为行列式的行，纵排称为行列式的列，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 称为二阶行列式的元素，并且得到了在

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

的条件下，方程组(1)有唯一解：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

同样，在解方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\qquad(2)$$

的过程中，给出了三阶行列式的定义：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

并且得到了在 $D\neq0$ 的条件下，方程组(2)有唯一解：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}}{D},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}}{D}.$$

由上述结果，自然会想到，含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组是否也有类似的结果？这里关键问题，是 n 阶行列式的定义。

我们知道，二、三阶行列式指的是一个代数和，可以由对角线规则写出来。但是，在定义 n 阶行列式时，却不能简单地按对角线规则的表面形式来推广。因此，要用一些新的概念来分析二、三阶行列式，然后根据分析的结果，再给出 n 阶行列式的定义．所谓新的概念就是排列和逆序。

定义 1 由 n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称

为一个 n 阶排列。

例如，2341 是一个四阶排列，34521 是一个五阶排列。

我们知道，不同的 n 阶排列的总数是

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 = n!.$$

显然 $123\cdots(n-1)n$ 也是一个 n 阶排列，它是按自然顺序排的，而其它 n 阶排列都破坏了自然顺序。

定义 2 在一个排列中，若有某一个较大的数码排在某一个较小的数码前面，则称这两个数码构成一个**逆序**。一个排列中逆序的总和称为这个排列的**逆序数**。

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，记为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n).$$

例如，排列 132 有一个逆序，312 有两个逆序，321 有三个逆序。

给出任意一个排列，可按以下方法来计算它的逆序数：首先计算有多少数码排在 1 的前面，设为 m_1 个，即有 m_1 个数码与 1 构成逆序；然后把 1 划去，再计算有多少数码排在 2 的前面，设为 m_2 个，即有 m_2 个数码与 2 构成逆序；再把 2 划去，再计算有多少数码排在 3 的前面，如此继续下去，最后设在 n 前面有 m_n 个数码（显然 $m_n=0$），则这个排列的逆序数为 $m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n$。

例 1 计算 451362 的逆序数。

因为 $m_1=2$，划去 1 得 $45\cancel{1}362$；$m_2=4$，划去 2 得 $45\cancel{1}36\cancel{2}$；$m_3=2$，划去 3 得 $45\cancel{1}\cancel{3}6\cancel{2}$，如此下去，$m_4=0$，$m_5=0$，$m_6=0$，所以

$$\tau(451362)=m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6$$

$$=2+4+2+0+0+0=8.$$

例 2 计算排列 $n(n-1)(n-2)\cdots21$ 的逆序数。

因为 $m_1=n-1$，$m_2=n-2,\cdots,m_{n-1}=1,m_n=0$。所以

$$\begin{aligned}&\tau(n(n-1)(n-2)\cdots21)\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

例 3 计算 $(2k)\ 1\ (2k-1)2\cdots(k+1)k$ 的逆序数。

因为 $m_1=1$，$m_2=2,\cdots$，$m_k=k$，$m_{k+1}=k-1$，$m_{k+2}=k-2,\cdots,m_{2k-1}=1,m_{2k}=0$。所以

$$\begin{aligned}&\tau((2k)\ 1\ (2k-1)2\cdots(k+1)k)=[1+2+\cdots+k]\\&\quad+[(k-1)+(k-2)+\cdots+1+0]\\&=\frac{k(1+k)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}=\frac{2k^2}{2}=k^2.\end{aligned}$$

例 4 如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 I，那么排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

设 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 为 $1,2,3,\cdots,n-1,n$ 这 n 个数码的一个排列。

在上述n个数中，比 1 大的数共有 $n-1$ 个。设在第一个排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中与 1 构成的逆序数为 l_1，即有 l_1 个比 1 大的数排在 1 的前面；而第二个排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 恰好与第一个排列顺序相反，故在第二个排列中有 $n-1-l_1$ 个比 1 大的数排在 1 的前面。因此，在第二个排列中，与 1 构成的逆序数为 $n-1-l_1$。于是，在两个排列中，与 1 构成的逆序数之和为

$$l_1+(n-1-l_1)=n-1.$$

同理，在两个排列中，与2构成的逆序数之和为$n-2$。

依此类推，最后在两个排列中，与$n-1$构成的逆序数之和为1．所以

$$\begin{aligned}&\tau(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)+\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+1\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

已知 $\tau(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)=I$，

故 $\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}-I$.

定义3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**。

例1中的排列为偶排列，而$\tau(513246)=5$，所以513246为奇排列。因为$\tau(123\cdots n)=0$，所以$123\cdots n$也是一个偶排列。

为了确定所有n个数码排列中的奇偶排列的个数，下面引进对换的概念。

定义4 在一个排列中，任意交换两个数码i和j的位置，其余各数码不动，这种对排列所施行的变换称为一个**对换**，记作(i,j)。

例如，2431经过对换（1,2）后，就变成了1432。排列2431的逆序数为4，而1432的逆序数为3．由此可知，此排列经一次对换(1，2)后，所得新排列与原排列的奇偶性相反。一般地，有以下定理。

定理1 对换改变排列的奇偶性。

证 ①先看一个特殊情形，即对换的两个数码是相邻的。设给定的排列为

$$\overbrace{\cdots}^{A},\ i,\ j,\ \overbrace{\cdots}^{B},$$

其中 A 与 B 均代表若干个数码，施行对换 (i,j) 后，得

$$\overbrace{\cdots}^{A},\ j,\ i,\ \overbrace{\cdots}^{B}.$$

我们来比较这两个排列的逆序数。因为对换 i 与 j 后，属于 A 或 B 的数码的位置没有改变，所以这些数码所构成的逆序数没有改变。同时，i、j 与 A 或 B 中的数码所构成的逆序数也没有改变。若在给定的排列中，$i<j$，则经过对换 (i,j) 后，i 与 j 就构成一个逆序。故新排列的逆序数比原排列的逆序数增多一个。若在给定的排列中，$i>j$，则经过对换 (i,j) 后，排列的逆序数减少一个。无论哪一种情形，都改变了排列的奇偶性。

②现在来看一般情形。假定 i 与 j 之间有 s 个数码，我们用 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 来表示。这时给定的排列为

$$\cdots i k_1 k_2 \cdots k_s j \cdots. \tag{3}$$

对换 i 与 j 后得到一个新排列

$$\cdots j k_1 k_2 \cdots k_s i \cdots. \tag{4}$$

我们可以证明，排列(4)是由排列(3)经过 $2s+1$ 次对换相邻两个数码而得到的。

事实上，将 i 向右依次与 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 对换．经过 s 次相邻两个数码的对换后，(3)变为

$$\cdots k_1k_2\cdots k_s i j\cdots.$$

再将 j 向左依次与 $i, k_s, \cdots, k_2, k_1$ 对换。经过 $s+1$ 次相邻两个数码的对换后，排列变为

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_s i\cdots.$$

这正是对(3)施行对换(i, j)而得到的排列(4)。因此，对(3)施行对换(i, j)相当于连续施行 $2s+1$ 次相邻两个数码的对换，由①知，每次对换相邻两个数码都改变排列的奇偶性。由于 $2s+1$ 是一个奇数，所以(3)与(4)的奇偶性相反。

由定理 1 可得：

定理 2 当 $n\geqslant 2$ 时，n 个数码的奇排列与偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$。

证 由初等代数中知道，n 个数码的全排列为 $n!$ 个。假设其中奇排列的个数为 p，偶排列的个数为 q。

若对这 p 个奇排列都施行同一个对换 (i, j)，由定理 1 知，这 p 个奇排列都变成了偶排列，而且两两仍然不同。由于偶排列共有 q 个，所以 $p\leqslant q$。

同理，若对 q 个偶排列都施行同一个对换，则得到 q 个两两不同的奇排列。所以 $q\leqslant p$。从而 $p=q$。

因为 $p+q=n!$，而 $p=q$，故有

$$p=q=\frac{n!}{2}.$$

§2 n 阶 行 列 式

在 §1 的基础上，我们对二、三阶行列式进行分析，以便

从中得出它们的构造规律，然后利用这些规律来定义 n 阶行列式。

首先看二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式是含有 $2 = 2!$ 项的代数和，其中每一项都是两个元素的乘积，这两个元素既位于不同行又位于不同列，而且所有既位于不同行又位于不同列的两个元素的乘积都在二阶行列式中出现，每一项的元素都带有两个下标，第一个下标表示该元素所在行的序数，第二个下标表示该元素所在列的序数。每一项的两个元素的第一个下标按自然顺序排列，第二个下标就构成了两个数码的一切排列 12 和 21，前一个排列是偶排列，与它对应的项取正号；后一个排列是奇排列，与它对应的项取负号。

下面再分析三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

与二阶行列式相似，三阶行列式是含有 $6 = 3!$ 项的代数和，其中每一项都是三个元素的乘积，这三个元素既位于不同行又位于不同列，而且所有既位于不同行又位于不同列的三个元素的乘积都在三阶行列式中出现．每一项的三个元素的第一个下标按自然顺序排列，第二个下标就构成了三个数码的一切排列 123，231，312，321，213，132，前三个排列是偶排列，与它们对应的三项取正号；后三个排列是奇排列，

与它们对应的三项取负号。

由上述分析，我们得出了二、三阶行列式含有怎样的项以及每一项取什么符号的构造规律。现在根据这个规律，来定义 n 阶行列式。

任取 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1,2,\cdots,n)$ 排成下表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}, \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}. \end{matrix} \qquad (1)$$

a_{ij} 的第一个下标 i 称为行下标，表示该数在表(1) 中所在行的序数；第二个下标 j 称为列下标，表示该数在表(1) 中所在列的序数。对位于 (1) 中不同行不同列的 n 个数的乘积来说，总可以写成如下形式：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad (2)$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,3,\cdots,n$ 这 n 个数码的一个排列。反之，给了 n 个数码的任意一个排列，即可得出 (2) 那样的一个乘积。因此，一切位于 (1) 中不同行不同列的 n 个数的乘积共有 $n!$ 个。

定义 用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的 **n 阶行列式**指的是 $n!$ 项的代数和，这些项是一切可能的取自(1) 的不同行与不同列的 n 个数的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$。