工科数学丛书之三

微分方程　付里叶分析

〔日〕近藤次郎　小林竜一
高桥磐郎　小柳芳雄　著

于溶渤　译

赵惠元
熊民旦　校

辽宁人民出版社

1981年·沈阳

工科数学丛书之三

微分方程 付里叶分析

〔日〕近藤次郎 小林竜一 高桥磐郎 小柳芳雄 著

于溶渤 译

赵惠元 熊民旦 校

*

辽宁人民出版社出版

（沈阳市南京街6段1里2号）

辽宁省新华书店发行

沈阳新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：8¾ 插页：1

字数：226,000 印数：1—20,700

1981年10月第1版 1981年10月第1次印刷

统一书号：7090·111 定价：1.15元

内 容 提 要

这本《微分方程·傅里叶分析》的主要内容是：常微分方程，贝塞尔函数·渐近展开，算子法，傅里叶分析，偏微分方程。

本书取材广泛，内容丰富，叙述简明，可供理工科院校师生及工程技术人员参考。

译者的话

这套丛书译自日本庆应大学教授田岛一郎和东京大学名誉教授近藤次郎主编的“工科の数学”。全书共分五册：《微分·积分》《线性代数·向量分析》《微分方程·傅里叶分析》《复变函数》和《统计·数值分析》。该丛书逻辑清晰，结构严谨，取材广泛，内容新颖；每册编有相应的习题集，并与基础部分紧密结合。该书当前在日本国内各工科大学已被采用，深受读者欢迎。

为适应我国工科院校广大师生与有关人员自学需要，特将此书全部译出。由于水平有限，误译之处在所难免，恳切地希望读者提出批评指正。

参加本丛书翻译的有：王运达、潘德惠、刘俊山、于溶渤、傅文章、关颖男等同志。总校：赵惠元教授和熊民旦同志。在翻译过程中，党恺谦和田永成同志作了部分工作，在此谨致谢意！

一九八〇年七月

目　　录

第一章　常微分方程

简单的微分方程解法已经在工科数学之一的第二章中讲过了. 在这章里对微分方程的解法略作系统地阐述. 对含于自然现象中的某量,它的有关空间及时间的变化法则,通过以该量为未知函数的微分方程来描述的情况是很多的. 因此解微分方程求得未知量, 对阐明自然现象的作用是很大的. 在物理学与力学中常常出现微分方程, 这是人所共知的. 微分方程对工科数学也很重要. 用微分方程来描述客观现象所服从的法则, 同解微分方程处于同等重要地位. 组成微分方程时, 只要注意在微小部分上或微小时间内现象的变化, 多数情况下足以导出所要的微分方程. 微分方程是含有以函数为未知量的一种函数方程, 解微分方程比解含未知数的代数方程要困难得多.

本章只处理含一个自变量的未知函数的情况, 含多个自变量的未知函数, 即有偏导函数出现的情况, 将在第五章讲解.

1·1　引　　言

在前面已经讲过, 物理与工程学科中的很多法则, 都能用微分方程描述出来, 至于按照什么样的步骤, 才能把实际问题数式化为微分方程, 现在举二例予以说明. 一般, 只要着眼于有关问题某量的空间或时间的微小变化, 就能导出该量的微分方程. 导出描述自然法则的微分方程, 与解微分方程是同样重要的.

例题1·1 (放射性物质的衰变)

关于放射性物质原子引起所谓放射性的衰变现象，由实验得知“单位时间放射性物质衰变的比率，与该物质的现存量成正比”．在某时刻 $t=0$ 有定量为 M_0 的放射性物质的量，将随着时间的经过，如何变化？

【解】（第一步） 首先把这个实验法则用数式表出．用变量 t 表示时间，设在时刻 t 放射性物质的量为$x(t)$．时刻 t 到时刻 $t+\Delta t$ 之间衰变量为

$$x(t)-x(t+\Delta t)$$

因为放射性物质的现存量 $x(t)$ 与时间间隔 Δt 成正比，设比例常数为 k，则有

$$x(t)-x(t+\Delta t)=kx(t)\Delta t$$

将上式改写为

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=-kx(t)$$

这里当 $\Delta t\to 0$ 时，左边的极限变为 $x(t)$ 的导函数

$$\frac{dx}{dt}=-kx \qquad (1)$$

这就是放射性物质的量 x 所满足的微分方程．

（第二步） 求满足微分方程（1）的未知函数$x(t)$．满足微分方程（1）的解是否真正存在，又解如果存在，那么是只限于一个呢还是几个？关于这个问题不能先验自明，而是需要加以证明的．首先关于解的存在问题，因为物理对象是现实存在的，所以可以认为解当然存在．但是要确定究竟存在几个解，仅从物理现象来考虑，多数情况下是不能解决的．但是，若是在 $t=0$ 这个最初时刻有某一定量 M_0 的放射性物质，在其后时刻，该量是单值（唯一）确定的，即解仅仅有一个这件事，从物理直观是可以理解的．

解此微分方程的技术问题待以后再讲，但如M 看作任意常数，设函数

$$x = Me^{-kt} \qquad (2)$$

此函数满足（1）式容易被验证。又为使在 $t=0$ 时 x 的值为M_0，必须是

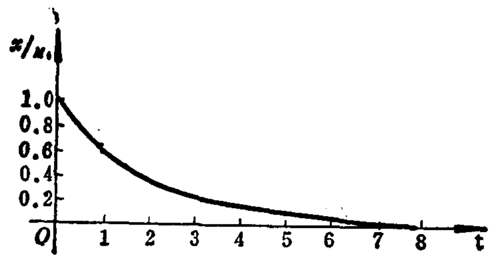
$$M_0 = x(0) = Me^{-k\cdot 0} = Me^0 = M,$$

因此M的值就完全确定了。

这样，问题的解是

$$x = M_0 e^{-kt} \qquad (3)$$

如果研究这个函数的变化，放射性物质的量随着时间怎样变化就清楚了（图1·1）。



10

图1·1

下面，我们再研究一个几何问题。

例题1·2 与过坐标原点，圆心在x轴上的所有圆正交的曲线是什么曲线。

【解】（第一步） 设所求曲线方程为 $y=y(x)$，我们建立它应满足的微分方程。首先，过原点圆心在 x 轴上圆的方程，一般可表为

$$x^2 + y^2 + cx = 0 \qquad (4)$$

这里 c 是任意常数。由于园周上的点(x,y)处切线的斜率 m 等于由方程（4）所确定的 x 的函数 y 的微分系数 y'，为此，将（4）式两边对 x 微分得

$$2x + 2yy' + c = 0$$

从而可知，所求圆的切线斜率是

$$m = y' = -\frac{2x+c}{2y} \tag{5}$$

已设与（4）正交的曲线方程为 $y=y(x)$，如果交点为(x, y)，则在所求曲线的点(x,y)处的切线斜率为$\frac{dy}{dx}$. 由于这曲线的切线与圆（4）的切线正交，所以必须满足条件

$$m\frac{dy}{dx} = -1$$

因此由（5）式得

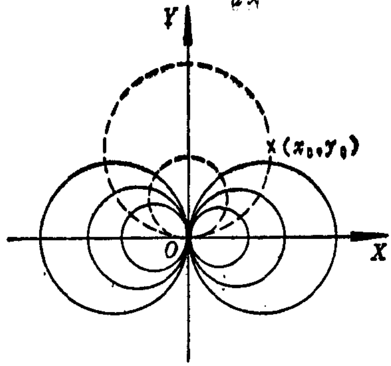


图1·2

$$-\frac{2x+c}{2y}\ \frac{dy}{dx} = -1 \tag{6}$$

因为 (x,y) 也是圆（4）上的点，所以（4）与（6）同时成立，从这两个式子中消去 c，得到微分方程

$$(x^2-y^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \tag{7}$$

这就是所求曲线方程 $y=y(x)$ 应当满足的微分方程.

（第二步） 解微分方程（7）。其方法见后. 设 c 为任意常数，容易验证，由代数方程

$$x^2+y^2+cy=0 \tag{8}$$

所确定的 x 的函数 y 满足（7）. 实际上，将（8）两边对 x 微分之，则得

$$2x + (2y+c)\ \frac{dy}{dx} = 0 \tag{9}$$

由（8）与（9）消去 c，即得（7）. （8）所表示的曲线是过原点而圆心在 y 轴上的圆. 由于 C 值的不同，圆心

的位置也不同，所有这些圆都构成微分方程（7）的解。即微分方程（7）存在无数个解。可是，如果除原点外还过已知点 (x_0, y_0)，则这样的解仅确定一个圆，这从几何上看是明显的（图1·2）。

从上边两个例子可清楚看到，微分方程的解如果存在，一般来说不是一个，而是无穷多个，但一旦给定某条件，解就唯一确定了。当然，这与条件给定的情况有关，根据给定条件的不同，方程的解或者不存在或者有时不仅仅只确定一个解。

象（2）与（8）那样，求解微分方程，一般来说，可得到含有常数的解，其中的常数能取任意值，这样的解叫做通解。这任意常数取某特定值时的解，叫做特解。因此在（2）中当 $M=1$ 时的解 $x=e^{-kt}$ 是微分方程（1）的一个特解，在（8）中当 $c=-2$ 时的解 $x^2+y^2-2y=0$ 是微分方程（7）的一个特解。

可以从几个方面对微分方程进行分类。首先，可根据微分方程中未知函数的导函数的阶数进行分类，即所含导函数最高阶数为1时，称此方程为**一阶微分方程**。所含导函数最高阶数为 n 时，该微分方程叫做 **n 阶微分方程**。上边所举二例都是一阶微分方程。最高阶导函数的次数叫做微分方程的次数。一般来说，n 阶微分方程的通解，含有 n 个任意常数。因此 n 阶微分方程的解，当给定 n 个条件时，就可认为是确定了。

其次，在微分方程中关于未知函数 y 及其导函数为线性时，该微分方程称为**线性微分方程**。当是非线性时，称作非线性微分方程。（1）是一阶线性微分方程，（7）是一阶非线性微分方程。

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+x^2y=\sin x$ 是二阶线性微分方程，而 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dy}=\sin y$ 是二阶非线性微分方程。

习 题 1·1

1. 根据物理学实验，物体的温度 T 在单位时间的变化率与物体当时的温度T 以及包围物体的周围温度差成比例（牛顿冷却定律），试用公式写出这个定律。

2. 试证实括号内的函数是已知微分方程的解，其中c 为任意常数。

（1） $y'-y+x=0$ $\qquad (y=Ce^{x}+x+1)$

（2） $xy'+y+4=0$ $\qquad \left(y=\dfrac{C}{x}-4\right)$

（3） $xy'+2y=0$ $\qquad (x^2y=C)$

（4） $yy'=-x$ $\qquad (x^2+y^2=C)$

（5） $y'=y\log y$[1] $\qquad (y=e^{Ce^{x}})$

3. 从下边方程中消去括号内的常数而建立微分方程。

（1） $y=mx$ 〔m〕

（2） $x^2-y^2+2ax=0$ 〔a〕

（3） $y=ax+b$ 〔a, b〕

（4） $y=a\cos(x+b)$ 〔a, b〕

（5） $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ 〔a, b〕

（6） $y=ax+\dfrac{b}{x}+c$ 〔a, b, c〕

（7） $y=a\sin(bx+c)$ 〔a, b, c〕

（8） $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 〔a, b, c, d〕

4. 试研究在前一问题中，消去方程中的常数的个数与所得微分 方程阶数之间有何关系？

5. 试建立满足通过原点的圆族的微分方程。

6. 试建立满足正交于 x 轴的圆族的微分方程。

1·2 一阶微分方程

以 $y=y(x)$ 作为未知函数的一阶常微分方程，一般地，可表为

---

[1] 本书用log表示以e为底的自然对数。——译者

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1)$$

的形式，其中 y' 的次数是该一阶微分方程的次数．其次，我们特别考虑解出y'而表示为

$$y'=f(x,y) \qquad (2)$$

形的情况．一次的微分方程常可写成这种形式．（2）式所表示的几何意义如下：即微分方程（2）的解 $y=y(x)$ 在 x-y 平面上表示的曲线，如果通过点（x,y），那么在此点该曲线的切线的斜率为 $f(x,y)$ ．因此，在通过函数 $f(x,y)$ 的定义域D内各点的解曲线的方向完全给出，从而微分方程（2）可以认为是给出曲线族的方向场．因此，从区域D内任意一点(x_0,y_0)出发，沿着给定的方向场接连不断地把点连起来，这样所生成的曲线，就可认为是解曲线．利用这种想法，能近似地描绘出解曲线（图1·3）．

例题1·3 试描出 $y'=x+y$ 的过原点的解曲线．

【提示】 注意，在直线 $x+y=k$上，解曲线都有同一斜率$y'=k$，在直线 $x+y=k$ 上，画出表示这个方向的小线段．其次，从原点出发，顺次按这些小线段所表示的方向描曲线，就得近似的解曲线（图1·4）．

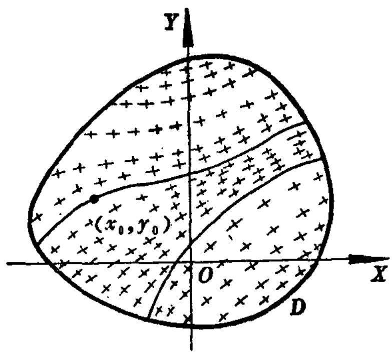


图1·3

注意 在直线 $x+y+1=0$ 上，解曲线与这直线有相同的斜率（-1），因此这直线本身表示一个特解．在此直线上侧，$y''=1+y'=x+y+1>0$，因此，解曲线向下凸，相反地，在此直线下侧是向下凹的．

在进入一阶微分方程解法之前，我们先讲对于（2）形的微分方程，在什么样的条件下其解存在及其解的唯一性是否成立的问题．对此，有下述基本定理．

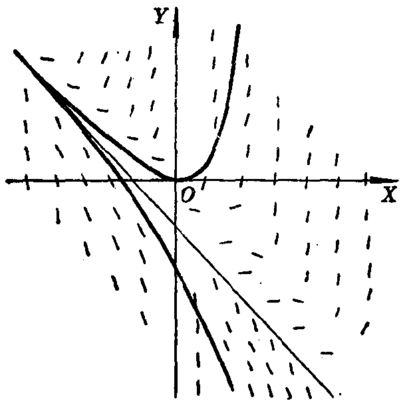


图1·4

基本定理：设函数$f(x,y)$及其偏导函数$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在区域$D$上有定义并且又都是连续的，此时对于微分方程

$$y'=f(x,y) \tag{3}$$

有下边定理成立：

1° 对于D内的任意点(x_0,y_0)，满足

$$y_0=\varphi(x_0)$$

（3）的解$y=\varphi(x)$，在x_0的某个邻域$|x-x_0|<h$存在。

2° 若（3）的两个解$y=\varphi(x)$及$y=\psi(x)$，至少在$x=x_0$的一个x值处相等，即

$$\varphi(x_0)=\psi(x_0)$$

则这两个解在其共同定义域上恒等。

根据这个定理，对于微分方程（3）来说，解的存在及唯一性是被确定了。这个定理是柯西[1]建立的，这里我们对定理不加证明而引用之。根据这个定理，对于函数$f(x)$若满足上述条件时，通过区域D内任意点(x_0,y_0)的解曲线，保证只有一条。(x_0,y_0)叫做解$y=y(x)$的初始值。

[1] A.L.Cauchy(1789—1857).