复变函数双基训

主编 翟连

数学自学丛书

中国农业机械出版社

数学自学丛书

复变函数双基训练

主编 翟连林

编者 袁绍唐 黄新民

李世余 陈丽卿

中国农业机械出版社

内容简介

本书是《数学自学丛书》之一，主要内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保角映射等. 本书比较全面、系统地归纳和总结了复变函数的基础知识，并通过典型例题的分析、解答和解后小结，总结常用的解题方法，指出易犯错误.

本书可供青年职工、自学青年以及电大、职大、函大、夜大理工类学生阅读，亦可供普通高等学校理工各专业学生和教师参考.

（数学自学丛书）

复变函数双基训练

主编　翟连林

编者　袁绍唐　黄新民

　　　李世余　陈丽卿

*

责任编辑：尹荣英

封面设计：田淑文

*

中国农业机械出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第117号）

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32・印张 12・字数 263 千字

1987 年 10 月北京第一版・1987 年 10 月北京第一次印刷

印数　0,001—4,650・定价：2.15 元

*

统一书号：7216・279

序

为适应我国四化建设的新形势，从根本上提高广大职工的科学文化水平，已成为当务之急．从我国广大职工的实际出发，知识水平的提高尤感迫切．中共中央、国务院《关于加强职工教育工作的决定》，正是针对着这一迫切需要而作出的．但是这样的认识在许多实际工作中往往得不到贯彻，总认为抓教育、提高科学文化水平只是久缓的计议，不是当务之急，这样当然就谈不上有什么迫切感了，其实这种看法既不符合中央的方针，又和广大群众的需要相违背．中国农业机械出版社编辑出版的《数学自学丛书》（第一版）问世以来，受到极为广泛的读者的热烈欢迎，很重要的一个因素，就是它适应了当前的迫切需要．

数学已日益成为一切近代科学技术的重要基础．当前已不只是理、工、农、医的各专业愈来愈需要数学，就象心理学、经济学、语言学等专业的发展也都离不开数学，而且还需要很高深的近代数学．要提高我国广大职工的科学水平，如果数学不首先提高，就将成为拦路虎．所以这套丛书的出版具有深远的意义．

这套丛书在编写方面有许多特点，归结起来有以下三个方面．

一、取材允当，适用面广泛

事实上，该丛书是根据中学和大学专科数学的内容，由浅入深地编排，概括了全部中学和大学专科数学的内容，它不仅适合于广大职工自学的需要，也适合于在校的中学生和大专学生自修参考之用，以及中学数学老师进修提高之用．

二、重视双基，突出能力的培养

这套丛书的每一册都按基础知识提要、典型例题、习题三部分组成，而且内容精练，例题典范，习题多样．在内容的叙述中又注意揭露实质与规律，在典型例题的讲解中又能注意启发思路，在习题的设置上注意基本训练与综合训练题的配合，从而既能使读者巩固地掌握基础知识，熟悉基本技能，又能使读者得到能力的培养，科学地处理了知识传授和能力培养这两个重要环节．

三、重视启发诱导，利于自学

该丛书针对自学青年缺乏辅导的情况，力求叙述简明，讲清思路的来龙去脉，揭示解题规律，纠正易犯的错误，循循善诱，利于自学．还通过提示方式，启发读者自行解题，既为读者提供自学的方便，又能启发读者独立思考．

以上是概括这套丛书的特点，当然不是说每一本书都一样，更不是说每一本书都是完美无缺．而且随着形势的发展，今后还必须继续更新，使这套丛书在我国四化建设中继续发挥它的根本性的作用．

程民德

1984年12月20日

注：程民德教授是中国科学院学部委员，中国数学学会副理事长，北京大学数学研究所所长．

前 言

为了帮助广大职工和自学青年学好中学数学和大学专科数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学、职工业余中学和电视大学、职工大学的数学教材，结合自学特点，编写了这套《数学自学丛书》。

这套丛书包括：

一、初中部分

1. 《初中代数双基训练》；
2. 《平面几何双基训练》；
3. 《初中数学总结辅导》。

二、高中部分

1. 《高中代数双基训练》；
2. 《立体几何双基训练》；
3. 《平面三角双基训练》；
4. 《平面解析几何双基训练》；
5. 《高中数学总结辅导》。

三、大学专科部分

1. 《一元微积分双基训练》；
2. 《多元微积分双基训练》；
3. 《线性代数双基训练》；
4. 《概率统计双基训练》；
5. 《复变函数双基训练》；
6. 《逻辑代数与 BASIC 语言双基训练》。

为便于自学，在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统

地归纳和总结数学基础知识，然后通过对典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法和技巧，分析并纠正常易犯的错误；最后通过各种类型的基本训练题、综合训练题以及自我测验题（包括解答或提示）的演算，帮助读者巩固概念，熟悉定理、公式和法则，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力.

由于我们的水平有限，书中的缺点、错误在所难免，欢迎广大读者批评指正.

编者

1986年6月

目　录

第一章　复数与复变函数

一、基础知识提要

1．复数的运算及其表示法

（1）复数及其表示法

我们知道，在实数范围内方程 $x^2+1=0$ 没有解．为了使 $x^2+1=0$ 有解，人们引进了新数 i，规定 $i^2=-1$，i 与实数在一起可按实数的四则运算法则来进行运算．i 称为虚数单位，形如 $a+bi$ 的数称为复数，其中 a、b 是实数．如果 $b\neq 0$，复数 $a+bi$ 叫虚数；当 $b=0$，复数 $a+bi$ 看作是实数 a，因此复数集包含了实数集．复数集是由实数和虚数组成的．当 $a=0$ 而 $b\neq 0$，这样的复数可写成 bi，叫纯虚数．

复数 $z=x+yi$ 的实部是指实数 x，记 $\mathrm{Re}\,z$．虚部是指实数 y，记 $\mathrm{Im}\,z$．

说两个复数 $z_1=x_1+y_1i$ 和 $z_2=x_2+y_2i$ 相等，是指 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$．也就是说，当且仅当实部和虚部都相等才叫这两复数相等．

复数通常有下列几种表示法：

1）用平面上的点表示复数．将每个复数 $z=x+yi$ 与平面直角坐标中的点 $P(x,y)$ 对应，这是一个一一对应．此时每个点 $P(x,y)$ 就表示一个复数 $z=x+yi$．因此，我们常将复数 z 说成点 z，xOy 平面叫做复平面或 z 平面．

2）向量表示法．复数 $z=x+yi$ 还可以用以原点为

起点、以点（x，y）为终点的向量来表示．表示复数 z 的向量称为向量 z，向量 z 和复数 z 是一一对应的．向量 z 的长度叫复数 z 的模，记作 $|z|$．显然，$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$（如图 1-1）．

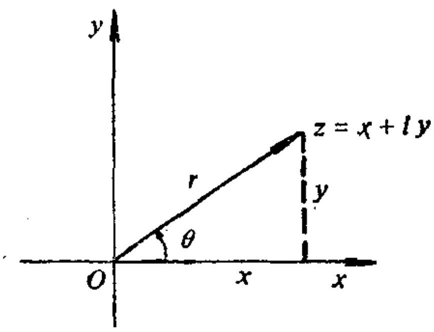

图 1-1

在 $z \neq 0$ 时，向量 z 与 x 轴的夹角 θ 称为 z 的辐角，记作 $\mathrm{Arg}\, z = \theta$．辐角有无穷多个值，我们在一般情况下用符号 $\arg z$ 表示其主值：$-\pi < \theta_0 = \arg z \leqslant \pi$．

在 $z = 0$ 时，辐角没有定义．

3）三角表示法．利用极坐标转换公式

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,$$

有
$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

（其中 $r = |z|$，θ 为辐角），它叫做复数的三角表示法．

4）指数表示法．我们约定用一个形式上类似指数的符号 $e^{i\theta}$ 代表复数 $\cos\theta + i\sin\theta$，那么每个复数 z 可表为

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}\ （r 为模，\theta 为辐角），$$

这种表示法（即 $z = re^{i\theta}$）叫做指数表示法．

符号 $e^{i\theta}$ 的确有指数的意义，第二章将详细论述．人们常将关系 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 称为欧拉公式．

设有两个复数

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2),$$
$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

那么 $z_1 = z_2$ 当且仅当 $r_1 = r_2$，$\theta_1 = 2k\pi + \theta_2$ 的时候，$z_1 = x + iy$ 和 $z_2 = x - iy$ 相互称为共轭复数．两互为共轭的复数其实部相等，虚部互为相反数．复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 来

表示，显然$\overline{\overline{z}} = z$.

（2）复数的运算

1）复数的加减法

设$z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，那末规定

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

当复数用矢量表示时，其加减法如图 1-2 所示.

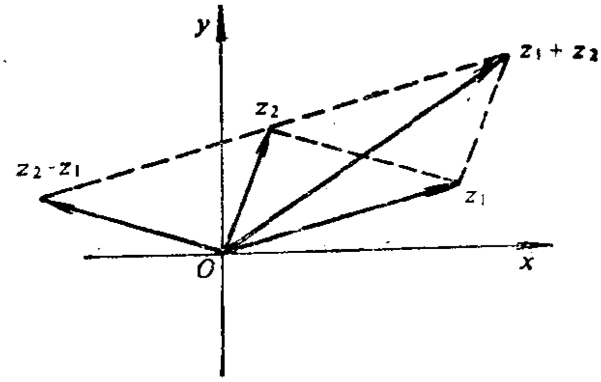

图 1-2

2）复数的乘法和除法

设$z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，那末规定

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

当$z_1 = z_2 = i$，则$z_1 \cdot z_2 = -1$，这与$i^2 = -1$是一致的；当z_1、z_2为实数，即$y_1 = y_2 = 0$，复数乘法与实数乘法一致：$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2$.

除法是乘法的逆运算. 满足$z_2 \cdot z = z_1 (z_2 \neq 0)$的$z$称为$z_1$除以$z_2$的商，记为$\frac{z_1}{z_2}$.

设$z = x + iy$，则$z_2 \cdot z = z_1$相当于

$$(xx_2 - yy_2) + i(xy_2 + x_2y) = x_1 + iy_1,$$

$$\therefore \quad \begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

当$z_2 \neq 0$，则得商$\frac{z_1}{z_2}$的实部和虚部：

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

复数运算也满足交换律、结合律、分配律以及分式的通分、约分等规律，在此不一一证明了.

若两复数写成三角式或指数式

$$z_1=r_1e^{i\theta_1}=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2e^{i\theta_2}=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

那末它们的乘除运算更简便：

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_2\sin\theta_1)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\\&=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.\end{aligned}$$

也就是说，乘积的模等于各因子的模的乘积，乘积的辐角等于各因子的辐角之和再加 $2k\pi$.

对于 $\frac{z_1}{z_2}=z$，由于 $z_1=z_2z$，所以 $r_1=r_2r$，$\theta_1=\theta_2+\theta-2k\pi$，就得到 $r=\frac{r_1}{r_2}$，$\theta=\theta_1-\theta_2+2k\pi$，即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

例 1 求 $z=-1-i$ 的三角表示式与指数表示式.

解 $z=-1-i$ 的模 $|z|=\sqrt{2}$，

辐角主值 $\theta_0=\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-1}\right)=-\frac{3\pi}{4}$，因此 z 的三角表示式 $z=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$，

指数表示式 $z=\sqrt{2}\,e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

当然，上面表示式也可写成 $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

和 $z=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ 等等，并不是非写辐角的主值 θ_0 不可.

例 2　设 $z_1=1+i$，$z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，求 $z_1\cdot z_2$ 和 $\frac{z_1}{z_2}$.

解法一： 直接从代数式去运算

$$z_1\cdot z_2=(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}=\frac{(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i.$$

解法二： 化为指数式来运算

$$\because\quad z_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}},\qquad z_2=e^{-\frac{\pi}{6}i},$$

$$\therefore\quad z_1z_2=\sqrt{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)i}=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{12}i},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)i}=\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{12}i}.$$

顺便指出，我们证明了一个三角公式：

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\qquad \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

3）复数的乘方　棣莫佛（De Moivre）公式

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，由上述复数乘法以及数学归纳法可证得

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^ne^{n\theta i}\qquad ①$$

特别地有著名的棣莫佛公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta\qquad ②$$

4）复数的开方

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 是已知复数，n 是正整数．满足 $w^n=z$ 的复数 w，叫做 z 的 n 次根，记作 $\sqrt[n]{z}$．

当 $z\neq 0$，z 有 n 个不同的 n 次根，我们统一地记为 $\sqrt[n]{z}$．这样的记法与实数方根的记号不完全相同，例如在实数范围讨论时，$\sqrt[3]{1}$ 就是 1 的 3 次算术根，$\sqrt[3]{1}=1$，若在复数方根意义下，$\sqrt[3]{1}$ 代表了 1，$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 这三个数．当然，常用的 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$ 等在没有交代的情况下仍可按实数的方根来理解．

当 z 写成三角式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，那末

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) \qquad ③$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$

这点只要利用①式直接验证即可知道．

例 3　求 $\sqrt[4]{1+i}$．

解　$\because\quad 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，

$$\therefore\quad \sqrt[4]{1+i}=(\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\dfrac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\dfrac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$，具体写出就是

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

是 $1+i$ 的四个4次根.

（3）复数运算的一些重要性质

在本书常用到复数运算的下列性质：

1）$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$,

$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$,

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $(z_2\neq 0)$;

2）$z\bar{z}=|z|^2=(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2$;

3）$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z$, $z-\bar{z}=(2\,\mathrm{Im}\,z)i$;

4）$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$（三角不等式），

$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$;

5）$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2\neq 0$;

6）$\mathrm{Arg}\,z_1z_2=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2$,

$\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2$.

由于辐角的多值性，最后两等式应理解为两集合相等，即左端的每一值必有右端的值与之相等，反之亦然.

我们只证4）的三角不等式，其余读者自证.

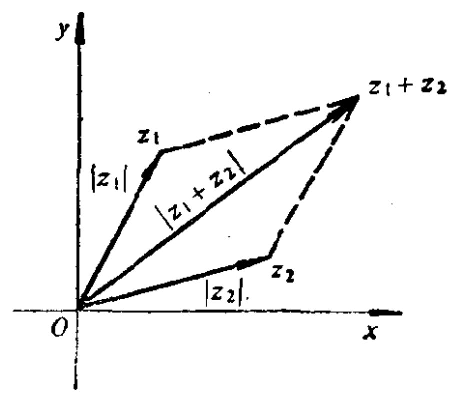

图 1-3

如图1-3所示，因为三角形两边之和大于第三边，以及z_1矢量与z_2矢量同向时$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$，因此总有$|z_1+z_2|$