简明复分析

龚　昇　编著

北京大学出版社

简 明 复 分 析

龚　升　编著

G9/13

北 京 大 学 出 版 社
·北　　京·

图书在版编目(CIP)数据

简明复分析/龚昇编著. —北京：北京大学出版社，1996.5
ISBN 7-301-02964-0

Ⅰ.简… Ⅱ.龚… Ⅲ.复分析-高等学校-教材
Ⅳ.0174.5

书　　名：简明复分析
著作责任者：龚　昇　编著
责 任 编 辑：刘　燕
标 准 书 号：ISBN 7-301-02964-0/O・366
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　　话：出版部 2752015　发行部　2559712　编辑部　2752032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168 毫米　32 开本　5.5 印张　130 千字
1996 年 5 月第一版　　1996 年 5 月第一次印刷
印　　　数：0001—3,000 册
定　　　价：8.00 元

内容简介

本书较系统地讲述了复变函数论的基本理论和方法. 全书共分六章,内容包括:微积分,Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式,Weierstrass 级数理论,Riemann 映射定理,微分几何与 Picard 定理,多复变数函数浅引等. 每章配有适量习题供读者选用. 本书试图用近代数学的观点和方法处理复变函数内容. 例如:用微分几何的初步知识,对 Picard 大、小定理给出简捷的证明;强调变换群的概念,利用简单区域上的全纯自同构群证明 Poincaré 定理;对多复变数函数作了简明的介绍.

本书内容精练,深入浅出,逻辑严谨,注意复分析内容与近代数学的衔接,使传统内容以新的面貌出现.

本书可作为大学数学系、应用数学系本科生复变函数基础课教材,以及相关专业系科研究生、教师的教学参考书,也可供从事复分析、实分析研究及相关专业的科技工作者阅读.

前　言

这是一本大学数学系本科基础课复变函数论的教材，与目前国内通行的传统教材相差不是太多.

复变函数论已有二百多年的历史，是数学中既古老又成熟的一门学科.到目前为止，不知已出版了多少本内容精采的教材，这些书各领风骚数十年.由于数学不断地前进，人们不断地用一些新的观点来重新认识与发展这门学科中原有的概念与理论，以至用各种不同观点撰写的新的教材不断涌现，以推陈出新.

这些年来，常有机会在美国的一些大学数学系教书，耳濡目染，接触到一些用各种观点所撰写的复变函数论教材，从而产生写一本中文的、与国内传统的复变函数论教材稍有一点不同的、有一点近代观点的教材的想法.这个想法由来已久，所以当 1991 年 4 月我准备回国时，就向中国科技大学数学系提出了这个想法，希望教一次这门基础课.回国后几经周折，给了我数学系三年级四名学生，二年级、五年级学生若干人，让我来教复变函数论这门课.由这样一些学生组成的班当然教学困难极大，但教学的实践是：来听课的学生愈来愈多，二、三、四、五年级都有，最后竟有 40 多人.在教学效果上似乎皆大欢喜，不同年级的学生都感到各有收获.我很感谢这些来听课的学生，他们以及科大数学系一些同事的鼓励，促使我将讲稿出版，我也顾不得自己学问的浅薄，就按照讲课时的讲稿，略加修改补充，写成此书，这就是此书的来源.

这是一本基础课教材，有关领导部门规定的教学大纲中要求的内容大致上全有了，但这也是多少反映我对这门基础课的一些看法的教材，难免与国内传统的教材略有一点不同之处，好在允许每人可有不同的学术观点.如此书能抛砖引玉，则属喜出望外了.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

复变函数论是复数域上的微积分，一些可以由实数域没有多大困难地推广到复数域上去的微积分的概念与结论，在本书中往往简略地叙述，或述而不证（见第一章），而着重探讨一些在实数域上所没有，而在复数域上特有的那些性质与结果.

微分几何、微分方程、多复变数函数论以及其他一些近代数学的飞速发展，对单复变函数论的重新认识与发展影响较大. 用各种观点来重新认识及撰写复变函数论的书，近年来愈出愈多，看来这是一种趋势，本书也追随了这种趋势. 例如：用了一点点微分几何，从 Ahlfors-Schwarz 引理出发，导出 Liouville 定理，最后证明大、小 Picard 定理（见第五章）. 又例如：用了一点点一维 $\bar{\partial}$-问题的解来证明一些构造性定理，如：Mittag-Leffler 定理、插值定理等（见第三章）. 又例如：强调变换群的概念，主要是自同构群的概念，在第二、三、六章中分别给出了一些最简单但最重要区域的全纯自同构群，并由此得到一些重要推论，如 Poincaré 定理等. 在本书的第六章，十分粗浅地介绍了多复变数函数论的两个最基本的定理，Poincaré 定理及 Hartogs 定理. 这不仅是对复变函数论的重新深刻的认识，也与这半个世纪来多复变数函数论的深入与飞速的发展关系极大，而且希望从单、多复变数函数论的实质区别的粗浅认识中，可以更深刻地了解与认识复变函数论中一些深刻的本质. 作者希望：念过这本书的读者，将来如有机会接触到一些近代数学的分支，对其中一些想法、概念与定理，有个"似曾相识"的感觉.

本书取名"简明复分析"，是希望本书与拙作"简明微积分"一样，能写得提纲挈领，简单明了，但能否做到，由于作者才疏学浅，很可能力不从心，还望读者不吝赐教与指正.

此书是我在美国加州大学圣地亚哥校区及南伊利诺大学教书时写成的，他们为我提供了良好的工作条件，我愿向两校数学系以及 Carl FitzGerald 教授、何崇武教授表示感谢.

北京大学程民德、丁石孙教授对本书给予了热忱的支持，北京大学李忠教授审阅了书稿并提了宝贵意见，安徽大学郑学安教授

在教学过程及本书撰写过程中给了我很多帮助，北京大学出版社刘勇同志与北京大学数学系刘燕同志为本书出版做了大量的工作，也一并表示感谢.

龚　昇

1992年9月于加州圣地亚哥

目　　录

第一章 微 积 分

§1.1 回顾微积分

复变函数论是在复数域上讨论微积分.如同对任何的数学进行推广那样,往往是一部分的内容可以没有多大困难地直接推广得到,而另一部分的内容却是推广后所独有的,在原来实数域理论中所没有的.前一部分当然重要,但人们的兴趣往往更集中在后一部分,因为常常是这一部分才真正刻画了事物的本质.

在这一章中,先十分简单地回顾一下什么是微积分,然后看看微积分中哪些结果可以直接推广到复数域上去,而在以后的各章中要着重讨论一些有本质不同、只在复数域上才特有的一些主要性质与结果.

什么是微积分?微积分由三个部分所组成,即微分、积分以及联系微分、积分成为一对矛盾的微积分基本定理,即 Newton-Leibniz 公式.

众所周知,若 $y=f(x)$ 为定义在区间 (a,b) 上的一个函数,如果 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 在 (a,b) 中的一点 x 存在,则称 $f(x)$ 在这点可微,记这极限值为 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 或 $f'(x)$ 等,称为 $f(x)$ 在点 x 的微商;称 $\mathrm{d}f=f'(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在点 x 的微分.如果在 (a,b) 上每一点都可微,则称函数在 (a,b) 上可微.另一方面,如果 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义,将 $[a,b]$ 分为任意 n 个小区间 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,而 ξ_i 为 $[x_{i-1},x_i]$ 中任一点,如果令 $n\to\infty$,且所有 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\cdots,n)$ 的长度都趋于零,如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ 存在,则称

$f(x)$在$[a,b]$上可积，记此极限值为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 这就是微积分最最基本的定义及出发点，并且都有很明确的几何意义，微商是$y=f(x)$所描绘的曲线在点(x,y)处的斜率，积分是曲线$y=f(x)$在$[a,b]$上的曲边梯形的面积.

微分、积分的概念古已有之，使之成为一门学问而发扬光大是由于 Newton 和 Leibniz 证明了微积分基本定理，即指出了微分与积分是一对矛盾，这条基本定理有两种相互等价的表述形式.

微积分基本定理(微分形式) 设函数$f(t)$在区间$[a,b]$上连续，x是$[a,b]$中的一点，令

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

则$\Phi(x)$在$[a,b]$中可微，并且$\Phi'(x)=f(x)$，即$\mathrm{d}\Phi(x)=f(x)\mathrm{d}x$. 换句话说，若$f(x)$的积分是$\Phi(x)$，则$\Phi(x)$的微分就是$f(x)\mathrm{d}x$.

微积分基本定理(积分形式) 设$\Phi(x)$是在$[a,b]$中可微，且$\frac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}$等于连续函数$f(x)$，那末成立着

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\Phi(x)-\Phi(a) \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

换句话说，若$\Phi(x)$的微分是$f(x)\mathrm{d}x$，则$f(x)$的积分就是$\Phi(x)$.

有了这个定理，求积分成为求微分的逆运算，而微分与积分的一些性质相互对应，成为一件事物的两个方面. 例如

$$\frac{\mathrm{d}(f(x)\pm g(x))}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\pm\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

与

$$\int(f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$$

相对应；

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)=f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g$$

与分部积分法

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\int fg'\mathrm{d}x = fg - \int gf'\mathrm{d}x$$

相对应；

若 $u=f(y)$，$y=g(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

与

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\mathrm{d}y$$

相对应等等. 又例如微分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，则在 $[a,b]$ 中存在一点 c，使得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

与积分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

是相互对应的. 又例如，函数的 Taylor 展开，可以用微分来证明之，并以微分形式表达其余项；也可以用积分来证明之，并以积分形式来表达其余项等等，不在此一一赘述了.

在微积分中一般讨论初等函数及其复合函数，所谓初等函数是指下面三类函数，即

1. 幂函数 x^α，α 为实数；多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，$a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为常数；有理分式 $\dfrac{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}{c_0+c_1x+\cdots+c_px^p}$，这里 $b_i(i=0,1,\cdots,m)$，$c_i(i=0,1,\cdots,p)$ 为常数；以及其反函数.

2. 三角函数 $\sin x$，$\cos x$ 等等及其反函数，如 $\arcsin x$，$\arccos x$ 等等.

3. 指数函数 e^x，2^x 等等及其反函数 $\ln x$，$\log_2 x$ 等等.

而所谓函数 $f(x)$ 的 Taylor 展开式及 Fourier 展开式不过是用第 1 类中的多项式来逼近函数 $f(x)$，以及用第 2 类中的 $\sin nx$，

$\cos nx$ 等来逼近函数 $f(x)$. 所以没有用第 3 类初等函数，即指数函数来逼近函数 $f(x)$的原因之一是下面即将讲到的 Euler 公式——指数函数可以表为三角函数. 当然一些重要的初等函数的 Taylor 级数是熟知的. 例如：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \tag{1.1}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \tag{1.2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \tag{1.3}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad (-1 < x \leqslant 1), \tag{1.4}$$

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$(|x|<1, r \text{ 为实数}), \tag{1.5}$$

等等.

以上只是十分简单地回顾了一维微积分的大概，用这种观点来看待一维微积分，详细的叙述可参阅我与张声雷所写的《简明微积分》中有关部分(龚昇、张声雷[1]).

至于高维的微积分，也有相应的三个部分，即微分、积分及联系微分与积分的微积分基本定理. 只是在微分的部分有偏微分、全微分，而与微商相当的是 Jacobi 矩阵；在积分的部分有重积分、线积分、面积分等，这些都是一维微分与积分的自然推广，于是也可列出其相应的定理，这里不多叙述了. 对第三部分要说几句话. 在高维情形下，什么是微积分的基本定理？是什么定理刻画了在高维的情形下，微分、积分是一对矛盾？ 回答是：Green 公式、Stokes 公式及 Gauss 公式.

Green 公式 若 D 为 xy 平面上封闭曲线 L 围成的闭区域，函数 $P(x,y)$和 $Q(x,y)$在 D 上有一阶连续偏微商，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.6}$$

Stokes 公式 设在空间有曲面 Σ，边界是封闭曲线 L，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$有一阶连续偏微商，则

$$\begin{aligned}&\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\\&\quad = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&\qquad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (1.7)\end{aligned}$$

Gauss 公式 设 V 是空间封闭曲面 Σ 所围成的闭区域，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在 V 上有一阶连续偏微商，则

$$\oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V. \qquad (1.8)$$

这三个公式都刻画了在边界上积分与在内部积分的关系，如果用外微分形式，那末这三个公式可以统一成一个公式，称为 Stokes 公式. 要十分严谨的叙述外微分形式需要很多篇幅，但这可以在很多微积分的教材中找到. 拙著《简明微积分》就是用这种观点来写的. 在这里只能十分简单地形式地作一简介(龚昇、张声雷[1]).

定义微分 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 的外乘积为 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，它满足下面的规则：

(1) $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=0$，即两个相同微分的外乘积为零.

(2) $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$，即两个不同微分的外乘积交换次序差一符号.

当然(1)可以看成(2)的推论. 由微分的外乘积乘上函数组成的微分形式称为外微分形式. 例如：若 P,Q,R,A,B,C,H 为 x,y,z 的函数，则

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

为一次外微分形式(由于一次没有外乘积，与普通的微分形式是一样的)；

$$A\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + B\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

为二次外微分形式；

$$H\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

为三次外微分形式；而 P,Q,R,A,B,C,H 称为微分形式的系数. 对于外微分形式 ω 可以定义外微分算子 d，它是这样定义的：对于零次外微分形式，即函数 f，定义

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

即普通的全微分算子. 对于一次外微分形式 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$，定义

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}z,$$

即对 P、Q、R 进行微分，然后进行外乘积. 通过外乘积运算规则，可得

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

对于二次外微分形式 $\omega = A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 也是一样定义：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}B \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}C \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

对于三次外微分形式 $\omega = H\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 也是一样定义：

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}H \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

可以证明这恒等于零. 如果规定 $\mathrm{dd}x = \mathrm{dd}y = \mathrm{dd}z = 0$，则外微分算子 d 与普通微分算子是一样的了，即对每一项进行运算，在每一项中分别对每一个因子进行运算，其余因子不动，将得出的各项相加，不同的只是外微分算子 d 是在运算之后进行外乘积. 由此立得重要的 **Poincaré 引理**：若 ω 为一外微分形式，其系数具有二阶连续偏微商，则 $\mathrm{dd}\omega = 0$. 其逆也成立，即若 ω 是一个 p 次外微分形式，且 $\mathrm{d}\omega = 0$，则存在一个 $p-1$ 次外微分形式 α，使得 $\omega = \mathrm{d}\alpha$. 有了

这些准备之后，那末 Green 公式、Stokes 公式与 Gauss 公式可以统一地写成

$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_{\Sigma}\mathrm{d}\omega, \tag{1.9}$$

这里 ω 为外微分形式，$\mathrm{d}\omega$ 为 ω 的外微分，Σ 为 $\mathrm{d}\omega$ 的积分区域，为封闭区域，$\partial\Sigma$ 表示 Σ 的边界，$\int$ 表示区域有多少维数就是多少重数积分. 事实上，当 ω 为零次外微分形式，(1.9)就是 Newton-Leibniz 公式；当 ω 为一次外微分形式，在平面的情形，(1.9)就是 Green 公式；在三维空间，(1.9)为 Stokes 公式；当 ω 为二次外微分形式，(1.9)就是 Gauss 公式. (1.9)真正刻画了微分与积分是一对矛盾. 这个公式不仅对三维欧氏空间成立，而且对任意高维的欧氏空间也成立. 不仅如此，对于更一般的微分流形上也是成立的，所以(1.9)是高维空间的微积分的基本定理. 这个定理是微积分的顶峰与终点.

当然这样回顾微积分是十分粗略的，但我想说清楚思路就可以了，不可能也不必要在此作十分仔细的叙述.

复变函数论是复数域上的微积分，是普通微积分的继续，公式(1.9)成为本书的出发点之一也是十分自然的事了.

§1.2 复数域、扩充复平面及其球面表示

复数的全体组成复数域，它是实数域的扩充.

在初等代数中已经知道，虚数单位 i 具有性质 $\mathrm{i}^2=-1$，将这一虚数单位与两个实数 α,β 用加、乘结合起来得到复数 $\alpha+\mathrm{i}\beta$. α,β 分别称为这一复数的实部(real part)与虚部(imaginary part). 若记 $a=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则记 $\mathrm{Re}a=\alpha$，$\mathrm{Im}a=\beta$. 两复数相等当且仅当实部与虚部相等. 复数的四则运算为

$$(\alpha+\mathrm{i}\beta)\pm(\gamma+\mathrm{i}\delta)=(\alpha\pm\gamma)+\mathrm{i}(\beta\pm\delta),$$

$$(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\gamma+\mathrm{i}\delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+\mathrm{i}(\alpha\delta+\beta\gamma),$$

若 $\gamma+\mathrm{i}\delta\neq 0$，

$$\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{\gamma+\mathrm{i}\delta}=\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\gamma-\mathrm{i}\delta)}{(\gamma+\mathrm{i}\delta)(\gamma-\mathrm{i}\delta)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+\mathrm{i}(\beta\gamma-\alpha\delta)}{\gamma^2+\delta^2}.$$

若复数 $a=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则 $\alpha-\mathrm{i}\beta$ 称为 a 的共轭(conjugate)复数，记作 $\bar{a}$. 于是

$$\mathrm{Re}a=\frac{a+\bar{a}}{2},\quad \mathrm{Im}a=\frac{a-\bar{a}}{2\mathrm{i}},$$

$$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b},\quad \overline{ab}=\bar{a}\cdot\bar{b},\quad \overline{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\bar{a}}{\bar{b}},$$

$a\bar{a}=\alpha^2+\beta^2$，记作 $|a|^2$，而 $|a|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ 称为 a 的绝对值. 显然 $|a|\geqslant 0$，

$$|ab|=|a|\cdot|b|,\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq 0),$$

$$|a\pm b|^2=|a|^2+|b|^2\pm 2\mathrm{Re}a\bar{b},\quad |a+b|\leqslant|a|+|b|$$

等等.

对于平面上一个给定的直角坐标系来说，复数 $a=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 可以用坐标 (α,β) 的点来表示，第一个坐标称为实轴，第二个坐标称为虚轴，所在的平面称为复平面，记作 $\boldsymbol{C}$.

一个复数不仅可以用一点来表示，而且可以用一个由原点指向这点的向量来表示，这个复数、这个点、这个向量都以同一字母 a 来表示之. 与通常一样，任一向量作平行移动后得到的所有的向量都视为与原向量恒等. 于是复数的加法成为向量的加法. 而复数的公式往往赋有几何意义，例如 $|a|$ 表示向量长度；$|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 表示三角形两边之和大于第三边，等等.

对复数也可引入极坐标 (r,φ)，复数 $a=\alpha+\mathrm{i}\beta=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$. 显然，$r=|a|$，$r$ 称为复数 a 的**模**，φ 称为复数 a 的**幅角**. 如果

$$a_1=r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1),\quad a_2=r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2),$$

则

$$a_1a_2=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com