数学物理方程

奚定平 著

华南理工大学出版社

数学物理方程

奚定平 著

华南理工大学出版社

内容简介

数学物理方程是研究由实际问题导出的偏微分方程（组），其内容除了与电动力学、量子力学等物理理论密切相关外，还在应用物理、力学、无线电、天文、气象和工程技术等领域中有广泛的应用。它既研究数学方法，又注重解决实际物理问题，本书是奚定平博士在数学物理方法多年教学和研究的基础上，结合国内外教材的优点而撰写的，全书采用以问题划分章节，从分析问题归纳方法。对诸多的解题方法，如分离变量法、行波法、本征函数展开法、Fourier变换法、Green函数法等，本书对它们不作为独立的方法去讨论，而是着重揭示诸方法中的统一性，用本征函数展开法和迭加原理的思路贯穿多种方法之中。该书的另一特点是给不同层次的学生提供一定的选择性。全书力求简明易懂，便于教学和自学，同时在基本要求的内容上，增加了一些深层的讨论和资料性的内容。该书可供综合大学、工科院校、师范学院和专科等相关专业一学期６０学时的课程作教材用。

〔粤〕新登字12号

数学物理方程

著　　者　奚定平

责任编辑　王晓琪

华南理工大学出版社出版发行

（广州·五山）

广东省五华县印刷厂印刷

1993年3月第1版　　开　本：787×1092　1/32

1993年3月第1次印刷　　印　张：11

印　数：0001—3000　　字　数：250千

ISBN 7—5623—0571—4／O·62

定价：5.50元

前 言

数学物理方程是研究实际问题的偏微分方程（组），它所研究的内容除了与电动力学、量子力学等物理理论有密切关系外，还在应用物理、力学、无线电、天文、气象和工程技术等领域中有广泛的应用。它既研究数学方法，又注重解决实际问题，内容十分丰富。本书是作者在数学物理方法多年教学和研究的基础上，结合国内外教材的优点而编写的，可供综合大学、工科院校、师范学院和专科等相关专业一学期60学时的课程作教材使用。作者锐意创新，精选内容，使学生在有限的时间内学到必要的基础知识，培养解决实际问题的能力。

比较中国和美国的教育方法，中国教育强调推理和抽象思维，理论系统严谨；美国的教学是渗透式的，偏重实验和鼓励学生独立思考；两种教学方法应互相补充。本书力图在互相补充上作一些尝试。全书采用以问题划章节，而不是以解题方法分章节，从分析问题归纳方法。尽管数学物理方程是一门数学基础课，本书并不一味追求数学理论上的严密和完备性，而把重点放在问题的物理涵意和基本解题方法上。有些数学原理（定理）只作些说明就可使用，省略的证明部分在参考书籍中可查到。应用举例部分显示综合应用数学物理方法去解决实际问题，使学生开阔眼界，进一步提高处理实际问题的能力，课堂教学上可以根据专业特点选用。

对诸多的解题方法，如分离变量法、行波法、本征函数展开法、Fourier变量法、Green函数法等，本书将它们不作为独立的方法去讨论，而是揭示诸多方法中的统一性，用本

征函数展开法和迭加原理的思路贯穿多种方法之中。边界条件齐次化是为了便于选择正确的本征函数，是迭加原理第一个应用。Fourier级数和Fourier积分（Fourier变换）是以正弦和余弦函数系为本征函数系展开的级数。在有界区域，本征值是分立的；在无界区域，本征值是连续的值。Fourier变换（以及Laplace变换）已发展了一系列定理，其重要性质和完整的变换公式表，有着特殊的功能，是求解各类无界或半无界微分方程的有力工具。Green函数在本书中可看成定解问题中最简单的例题来处理。但是，它的深刻内涵使得Green函数成为物理问题中很重要的一个函数。因为在处理一个实际问题时，往往不是采用一种方法，而是综合多种方法去求解。理解诸方法的统一性是非常必要的，也会对解题能力有所提高。

从学生的兴趣和水平上看，不仅各学校之间和不同专业都相差甚远，就是同一班的学生也大不相同。本书的另一个特点，是给不同层次的学生提供更多的选择性，给教学更多的选择性。本书力求简明易懂，以便于教学和自学，同时也在基本要求的内容上，增加了一些深入一点的讨论和资料性的内容（打有•号的章节）。打•号的内容和部分没打•号的内容根据需要在教学上可作选择。但是，它们不仅仅是参考资料，且即使学生可能看而不懂，但学生能了解知识的全貌也是非常有用的。由于数学物理问题的复杂性，在处理实际的问题时，步步都作推导是不可能的。会查阅资料，引用已有的结果和公式也是一种本领。

本书在练习题选择方面也下了不少功夫。好的题目不仅为老师和学生提供一些练习，以加深对课本的理解，同时，许多题目是书中内容的归纳和提高，它们的基本结论是可以

引用的。习题的量较大，划出基本量习题（未打•号）以供学生作选择。

随着计算机的发展，数值计算越来越广泛的用来解决许多数理问题，因此，本书在最后一章简明地介绍这一重要方法。各专业可在此基础上对教材的内容作增减。附录Ⅵ列出了BESSEL函数的多项式近似，在计算机数值计算时很有用。

在本书的编写过程中，符名培教授参加了修改和审查工作，并提出了许多可贵的意见。我的妻子蒙绮芳从各方面都给了很大的帮助，并为写作提供了良好的环境。本书出版得到了国家自然科学基金和深圳大学教材基金的部分资助，谨此致谢。

由于作者水平有限，错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指出。

奚定平

1992年春写于深圳

目　录

1 引 言

§1 二阶线性偏微分方程

1.1 二阶线性偏微分方程

17世纪出现微积分学之后，人们利用微积分来处理力学、物理学中的问题，碰到了大量的微分方程问题。有些是常微分方程，如力学中质点和质点组的运动方程，集中元件的交变电路方程等，更多的是二阶或二阶以上的偏微分方程。如 Euler（欧拉，1707～1783）和Lagrange（拉格朗日，1763～1813)等在研究流体力学、声音传播和膜的振动的问题时，Laplace(拉普拉斯，1749～1827)在研究势函数和潮汐理论问题时，Fourier(傅立叶，1768～1830)在研究热传导，以及Maxwell(麦克斯韦，1831—1879)在研究电磁运动理论时，都导出了一些偏微分方程，最常见的是二阶偏微分方程。

本书只讨论二阶线性偏微分方程，其内容包括：

① 将真实的物理问题模型化，进而归结为数学上的定解问题（包括偏微分方程和定解条件）；

② 求满足微分方程和定解条件的解；

③ 研究解的性质和物理解释。

偏微分方程中的变数通常是多维空间的坐标和时间，为方便起见，采用以下偏微分记号。

u_x代表$\frac{\partial u}{\partial x}$，　u_{xx}代表$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，等。

并引入△算子　$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$

和Laplace算子　$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

二阶线性偏微分方程按其所代表的物理过程或状态，常见的有3类：

1　波动方程

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=f(x,y,z,t) \qquad (1.1)$$

或记为

$$u_{tt}-a^2\nabla^2 u=f(x,y,z,t) \qquad (1.2)$$

2　热传导方程

$$u_t-a^2\nabla^2 u=f(x,y,z,t) \qquad (1.3)$$

3　Poisson（泊松）方程

$$\nabla^2 u=f(x,y,z,t) \qquad (1.4)$$

上述方程其所以是二阶的，是因为方程中最高阶的偏导数是二阶的；其所以是线性的，是因为方程中仅含一阶或二阶偏导数的一次幂。若方程（1.2），（1.3），（1.4）右边不等于零，即$f\neq 0$，方程称为非齐次方程。若$f=0$，则称为齐次方程。特别是式（1.4）的齐次方程称为Laplace（拉

普拉斯）方程，写成

$$\nabla^2 u=0 \tag{1.5}$$

1.2 定解条件

常微分方程的通解通常包含任意常数，在偏微分方程中，通解则包含任意函数。下面以一个一阶偏微分方程为例。

方程 $3u_x-u_y=0$

x，y是独立变数。其解有多种，如

$$u(x,y)=x+3y$$

$$u(x,y)=3\cos(x+3y)$$

$$u(x,y)=8e^{x+3y}$$

其通解是

$$u(x,y)=G(x+3y)$$

G是任意连续可微函数。

在实际问题中，物理现实是确定的。因此方程的解还应有定解条件，即初始条件和边界条件。数学上有3个重要的问题：

① 在初始条件和边界条件下，解是否存在。

② 解是否是唯一的。

③ 解是否是稳定的。

第①、②问题是所有微分方程都应考虑的。物理现实是确定的，一般解应该存在且是唯一的。定解条件过多，解可能不存在。定解条件不足，则有可能不是唯一。

解的稳定性（第③问题）是考虑当初始条件和边界条

件发生微小变化时，解的变化是否也是微小的。因为实际问题中，定解条件是测量值，不可能有严格的值。测量值的误差所引起解的误差亦应是很小的。

具有确定和稳定解的定解问题，称为适定的。系统地讨论定解问题的适定性是复杂的，可参考其它书籍，本书将不再作进一步讨论。

在实际问题中，定解条件通常分为以下4类：

1 **Cauchy（科希）条件**，函数u，也可能包括u的一阶导数，在时间边界 $t=0$ 时的初始值给定。又称为初始条件。记为

$$u|_{t=0}=\varphi,\qquad u_t|_{t=0}=\psi$$

2 **Dirichlet（狄利克雷）条件**，又称第一类边界条件，给定u在所研究的区域边界$\partial\Omega$上的值。记为

$$u|_{\partial\Omega}=\mu_1$$

3 **Neumann（诺伊曼）条件**，又称为第二类边界条件，给定u在所研究的区域边界$\partial\Omega$上的法向导数值。

记为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\mu_2$$

4 **Robin（洛平）条件**又称第三类边界条件，给定u在区域边界$\partial\Omega$上值和其法向导数值的和。记为

$$\left.\left(u+h\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial\Omega}=\mu_3$$

其中φ，ψ，μ_1，μ_2，μ_3为已知函数，h是常数。当μ_1，μ_2，或μ_3等于零时则称为齐次边界条件。

【例1.1】问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 & 0<x<l, t>0 \\ u(0,t)=T_0 & u_x(l,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x) & u_t(x,0)=\psi(x) \\ & 0\leqslant x\leqslant l \end{cases}$$

在$x=0$边界是非齐次Dirichlet条件，在$x=l$是齐次 Neumann条件，$t=0$的条件是Cauchy条件（初始条件）。

> **迭加原理** 若u_1和u_2是齐次线性微分方程的解，则u_1和u_2的线性组合$u=c_1u_1+c_2u_2$也是方程的解；非齐次线性微分方程和定解条件可以分解成几个定解问题的迭加，只要这些定解问题的微分方程和定解条件的线性迭加恰好是原来的微分方程和定解条件就行。

迭加原理将贯穿全内容，在后面的应用中将不断加深理解。

习题1.1

1. 指出下列方程的类型（阶数？线性或非线性？齐次或非齐次？）

① $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=\sin x$

② $u_{xx}-u_{yy}=0$

③ $u_{xy}+u_x=0$

④ $u_x{}^2-u_{yy}=0$

⑤ $xu_x-yu_y=0$

⑥ $yu_{xx}+\sin xu=e_{xy}$

2. 证明齐次线性偏微分方程的线性迭加原理。

3. 试找出方程$u_{xy}=0$的一般解。

4.* 设复值函数$\psi(x, y)=u(x, y)+iv(x, y)$，其中$u, v$为$\Omega\subset R^2$内的二次连续可微的实函数，并且在$\Omega$内满足Cauchy—Riemann（**科希—里曼**）**方程**：$u_{x}=v_{y}$，$u_{y}=v_{x}$。证明$u(x, y)$和$v(x, y)$在Ω内都满足二维LaPlace方程：

$$u_{xx}+u_{xy}=0,\quad v_{xx}+v_{yy}=0$$

§2 正交曲线坐标系

上述二阶线性偏微分方程，式（1.1）～（1.4），都是在常见的直角坐标下写出的。除直角坐标外，在定解问题中还经常选用柱坐标、球坐标以及其它正交曲线坐标系。一般来说，坐标的选取是根据边界形状确定的。

2.1 正交曲线坐标系的一般理论

如果空间中的点，其位置是由3个有序的数q_1，q_2，q_3来表示，且每3个这样有序的数就完全确定一个空间的点；反之，若空间中每一点都对应着3个这样有序的数，则称q_1，q_2，q_3为空间的曲线坐标。

由于空间点又可用熟悉的直角坐标来表示，所以q_1，q_2，q_3都是直角坐标的单值函数，写成

$$q_1=q_1(x, y, z),\qquad q_2=q_2(x, y, z)$$
$$q_3=q_3(x, y, z)\tag{1.6}$$

反之，直角坐标x，y，z也是q_1，q_2，q_3的单值函数，记为

$$x=x(q_1, q_2, q_3),\quad y=y(q_1, q_2, q_3)$$
$$z=z(q_1, q_2, q_3)\tag{1.7}$$