

高等数学

第一卷

R. 罗德著
常彦译

人民教育出版社

高 等 数 学

第 一 卷

R 罗 德 著
常 彦 译

人 民 教 育 出 版 社

序 言

本書，在教本部分，分为三卷，原是罗德教授的一部大学初年級的講义，曾对学数学、学物理、以及学各門工程科学的大学生講过多次。因此，本書对純粹数学与应用的关系以及与实用数学方法的关系，予以很大的重視，不过并未因此忽視了純粹数学的价值。本書因为原来只是罗德教授供听課人用的一部手写提綱，因此文字非常簡約，只把材料适当加以排列，并加上許多举例、应用和練習題。因为叙述文字的簡約，閱讀上一定不很方便，好学的讀者必須为此作些勇敢而深入的努力，这对任何人想不流汗、不長太息几声都是作不到的。特别是在自己演算練習題时更需要这样，書中对于这个只举出了解 and 簡短的提示。

本冊是本書的第一卷，首章講解析学的基本概念，其次講微分学的主要定理与积分学的基本公式，多变量函数，平面曲綫的微分几何，复数，复变量与复变函数。以后第二卷当講积分学的基础和进一步推广，無穷級数，特别是幂級数，依赖于一个参数的积分，綫积分，复数积分，并包括行列式和矢量及其应用。第三卷当講曲面与空間的曲綫坐标，空間綫积分和多重积分，二者間的关联，其次还講常微分方程，并略講偏微分方程，特别是屬於物理和工程技术的。

此外还当出一套練習題集，附解法，作为第四卷；再有一部公式集作为第五卷，共三分冊。

本冊是第一卷的第十二版，只是第十一版未加修改的重印。著者已于 1942 年去世，本書已經多次版的考驗，可以不再修改了，凡不一致和誤排的地方已随时加以修正。

托伊布訥出版社 1953年夏于来比錫

目 录

第一章 数、变量与函数	1
§ 1. 数与变量	1
1. 有理数, 2. 无理数, 3. 戴狄金分划, 4. 有理近似值, 5. 不等式算法·绝对值, 6. 变量, 7. 极限, 8. 无穷小与无穷大。	
§ 2. 函数	6
1. 函数概念, 2. 几何表示, 3. 函数标尺。	
§ 3. 整函数与内插法	10
1. 整函数, 2. 二项定理, 3. 裴奴利不等式, 4. n 阶抛物线, 5. 拉格朗日内插公式, 6. 牛顿内插公式, 7. 高阶差分, 8. 宗量差相等时的内插公式, 9. 整函数的数值算法。	
§ 4. 其他的初等函数	19
1. 有理函数, 2. 代数函数, 3. 指数函数, 4. 对数, 5. 三角函数, 6. 圆函数或反三角函数。	
§ 1 至 § 4 的练习题	24
§ 5. 变量与函数的极限	25
1. 单调变量·区间套, 2. 举例·量圆, 3. 函数的极限, 4. 举例, 5. 关于极限算法的定理, 6. 特种极限, 7. 渐近近似。	
§ 6. 关于连续性	30
1. 连续性的定义, 2. 变量的增量, 3. 不连续性, 4. 复合函数的极限与它的连续性, 5. 推论, 6. 连续函数在闭域上的有界性·极大与极小, 7. 薄查诺·魏耶斯特拉斯定理, 8. 取尽一切中间值的函数, 9. 反函数, 10. 应用。	
§ 5 与 § 6 的练习题	46
第二章 微分学的主要定理与积分学的基本公式	48
§ 7. 导数与微分	48
1. 微分学的来源, 2. 函数的导数, 3. 举例, 4. 常量的导数, 5. 常因子, 6. 和的导数, 7. $\sin x$ 与 $\cos x$ 的导数, 8. a^x 的导数, 9. $\log_a x$ 的导数, 10. 对数曲线的切线, 11. 连续性与可微性, 12. 微分, 微商, 13. 微分与小增量, 14. 微分公式。	
§ 8. 其他微分法则	56

1. 积的导数 2. 商的导数, 3. 应用, 4. 鏈鎖法則, 5. 反函数的 导数, 6. 应用, 7. 对数微分法。	
§ 7 与 § 8 的練習題	61
§ 9. 高阶导数	62
1. 高阶导数, 2 整函数的台劳公式, 3. 应用, 4. 高阶微分, 5. 萊 布尼茲公式。	
§ 10. 应用与練習	66
1. 微小量差的影响, 2. 曲綫 $y=f(x)$ 的升、降、極大、極小, 3. 拐点, 4. 举例, 5. 导出曲綫的几何作圖, 6. 速度与加速度的数值, 7. 圓 周运动, 8. 正弦振动, 9. 有机生長率, 10. “黑”体射綫能在光 譜上的極大位置	
§ 11. 双曲綫函数	74
1. $\cosh x, \sinh x, \operatorname{tgh} x, \operatorname{ctgh} x$, 2. $\cosh x, \sinh x, \operatorname{tgh} x, \operatorname{ctgh} x$ 的导数, 3. 面积(反双曲綫)函数, 4. 与双曲綫的关系, 5. 谷德曼函数 $\varphi = Amha$	
§ 9 至 § 11 的練習題	77
§ 12 中值定理	78
1. 分解公式, 2. 导数的唯一性, 3. 罗尔定理, 4. 中值定理, 5. 中 值定理的另一种形式, 6. 定理, 7. 定理, 8. 拋物綫的一个性質。 表格函数的近似微分法, 9. 广义中值定理, 10. $f'(x)$ 取尽一切中 間值。	
§ 13. 积分法作为微分法的反运算	85
1. 不定积分, 2. 基本积分, 3. 几条积分法則, 4. 新变量的引入, 5. 定积分, 6. 定积分作为其上限的函数, 7. 速度与加速度, 8. 面 积計算, 9. 定积分作为中值与作为和, 10. 几何矩, 11. 用新变 量時的积分限。	
§ 14. 極限的确定法	98
1. 形式 $\frac{0}{0}$, 2. 形式 $\frac{\infty}{\infty}$, 3. 形式 $0 \cdot \infty, \infty \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. 4. 举 例, 5. 斐奴利-洛比塔法則失效的情形, 6. 应用, 7. 無穷小量 算法。	
§ 12 至 § 14 的練習題	104
§ 15. 極大極小理論	106
§ 16. 台劳公式	109
1. 分解公式的推广, 2. 有余項的台劳公式, 3. 另一种形式, 4. 应用。	
§ 17. 中值定理与台劳公式的其他应用	113
1. 解方程的牛頓近似法, 2. 疊代法, 3. 高阶差分与高阶导数間的关系, 4. 綫性內插法及其誤差。	

§ 15 至 § 17 的練習題	117
第三章 二元及多元函数	119
§ 18. 几何表示, 極限, 連續性, 偏导数	119
1. 几何表示, 2. 曲面圖, 3. 極限与連續性, 4. 偏导数, 5. 偏导数 求导次序可交換, 6. 高阶导数。	
§ 19. 全微分——应用	126
1. 全微分, 2. 高阶微分, 3. $f(x, y)$ 的微分与增量, 4. 小誤差对 計算結果的影响, 5. 方向导数, 6. 鏈鎖法則的推广, 7. 多变量 的复合函数, 8. 隱函数。	
§ 20. 新自变量的引入	135
1. 一个自变量, 2. 二自变量的互換·函数行列式, 3. 函数行列式等 于零的情形, 4. 極坐标, 5. 問題。	
§ 21. 二元函数的台劳公式与極大極小理論	138
1. 台劳公式, 2. 应用, 3. 叠代法, 4. 齐次函数的欧拉定理, 5. 多 元函数的極大与極小·必要条件, 6. 其他条件, 7. 帶附加条件的 極大与極小, 8. 举例。	
§ 18 至 § 21 的練習題	145
第四章 平面曲綫的微分几何	148
§ 22. 切綫、法綫、弧長、在技术上有重要应用的一些曲綫	148
1. 平面曲綫的解析表示, 2. 切綫, 法綫, 3. 举例, 4. 对抛物綫 $y = a + bx + cx^2$ 的切綫作圖法, 5. 弧長的确定(求長法), 6. 切綫、 法綫、次切距、次法距的長度, 7. 抛物綫 $y^2 = 2px$ 的例子, 8. 摆 綫或旋輪綫, 9. 外摆綫, 10. 內摆綫, 11. 特种情形, 12. 惠 更斯曳物綫(等切曲綫)。	
§ 23. 二曲綫的相交与相切	158
1. 二曲綫的交角, 2. 二曲綫族的交角, 3. 二曲綫的相切, 4. 举例, 5. 密切圓。	
§ 24. 曲率、曲率圓、与漸屈綫	163
1. 曲率, 2. k 的另一公式, 3. 曲率半徑、曲率中心、曲率圓, 4. 漸 屈綫, 5. 漸屈綫的性質, 6. 漸屈綫弧, 7. 漸屈綫与漸伸綫的曲 率半徑, 8. 拐点, 9. 頂点 10. 橢圓的例子, 11. 圓的漸伸綫。	
§ 22 至 § 24 的練習題	171
§ 25. 極坐标的应用·反演	173
1. 極坐标, 2. 逆徑变换(反演), 3. 反演器. a) 波賽利反演器, b) 哈 德反演器, 4. 極坐标在平面曲綫微分几何上的应用, 5. 用極坐 标時的綫素, 6. 極切綫, 極法綫, 極次切距, 極次法距, 7. 阿奇 默德螺綫, 8. 双曲螺綫, 9. 对数螺綫, 10. 极坐标表示的曲率,	

11. 扇形的面积, 12. 垂足曲线。	
§ 25 的练习题	183
§ 26. 渐近线	184
1. 直线作为渐近线, 2. 举例, 3. 一条代数曲线的诸渐近线, 4. 举例, 5. 用极坐标时的渐近线, 6. 渐近圆。	
§ 27. 奇点与包络线	188
1. 奇点, 2. 双点、尖点、孤点, 3. 举例, 4. 曲线族、包络线, 5. 定理, 6. 举例。	
§ 28. 特种应用与例子	193
1. 关于滚线的定理, 2. 焦线(迴光线), 3. 在一个圆锥截线上的反光与折光, 4. 彼此相滚的椭圆, 5. 圆锥截线的中心点。	
§ 26 至 § 28 的练习题	197
第五章 复数, 复变量与复变函数	199
§ 29. 复数的说明与意义	199
1. 复数, 2. 矢量, 3. 分量, 4. 矢量的乘法, 5. 矢量的除法, 6. $\cos n\varphi$ 与 $\sin n\varphi$ 的公式, 7. 一个复数的 n 次根, 8. 应用,	
§ 30. 复变量与一元复变函数	206
1. 复变量, 2. 柯西-黎曼微分方程, 3. 指数函数, 4. 三角函数与双曲线函数, 5. 对数, 幂函数, 6. 圆弧(反三角)函数。	
§ 31. 代数的主要定理	212
1. 主要定理, 2. 为简化证明, 3. 证明, 4. 无解法的(非代数的)方程的例子。	
§ 32. 共形映射	215
1. 几何表示, 2. 共形映射, 3. 反定理 I, 4. 反定理 II。	
§ 33. 若干特种共形映射	220
1. 映射 $w = a + bz$, 2. 线性分式函数, 3. 举例, 4. 双比, 5. 由三对相应点来定线性分式函数, 6. 举例, 7. 一些别的共形映射。	
§ 29 至 § 33 的练习题	229

第一章 数、变量与函数

§ 1. 数与变量

1. **有理数** 数的概念是解析^①的基础；而且通过计数与度量这种有组织的理性活动，使我们能掌握愈来愈多的客观世界现象，这无疑是人类自然知识的进步，因而也是人类文化进步的基础。整数 $\pm 1, \pm 2, \dots$ 并包括零在内，以及正负分数，合起来构成全部有理数的集合。把随便两个有理数加、减、乘、除，结果总还是一个有理数。有一个例外，就是：不准用零除。这样，一个有理数就是两个整数的商(分数)，零作除数除外。

整数可以跟一定向直线上的等分点相对应，而且再细分之后，可使每个有理数 x (例如 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 等等)都对应了数轴上以 x 为横坐标的一点(有理点)。在随便两个有理数 a 与 b 间，不管其差数怎么小，永远可以再插入别的有理数，例如可插入其算术平均数 $\frac{1}{2}(a+b)$ 。与此相应，在直线上随便两个不管怎样近的点之间，永远会有别的(甚至是无穷多的)有理点。因此，我们说：全部有理数的集合是自相密集的，全部有理点的集合也一样。

2. **无理数** 纵然这样，全部有理点的集合并不充满整条直线，在直线上仍还有些横坐标非有理数的点，比方就象那样的一个点，它的正横坐标 d 等于边长是1的正方形对角线的长，即是由方程 $d^2 = 2$ ，或 $d = \sqrt{2}$ （后一个式子只不过是另一种写法）所确

^① “解析”这个名称的原文，“Analysis”(也译作“分析”)，起源自欧拉的经典著作“无穷解析引论”*Introductio in analysin infinitorum*, 1748 出版。——欧拉 Leonhard Euler 1707—1783, 瑞士数学家，曾在俄国讲学。

定的長。

因为假使 d 是有理数,有如 $d=p/q$, 其中 p 与 q 都指示正整数,但不都是偶数,因如不然, p/q 便可用 2 約掉,因此 q 不能=1, 因为 d 不是整数。可是由 $d^2=2$, 应得 $p^2=2q^2$, 因此便得 p 是偶数; 但若 $p=2m$ 是偶数, 那么, 便又得 $p^2=4m^2=2q^2$, 因此 $q^2=2m^2$, 是即 q 同样是偶数, 与上面的話正相矛盾。因此 d 不能是有理数, 相应的点 (d) 也不是有理点(据, 欧几里得, “几何原本”, --300 年左右出版)。

这样的点, 也有数与之对应, 就是所謂無理(=非有理)数。一方面对無理数作一种适当的一般定义, 另一方面对直綫上的無理点也作一种适当的一般定义, 那就会显而可見: 如果把無理数与有理数合在一起, 一下子得到“全部数的集合”, 那便使每个数, 在直綫上都恰有一个点与之对应, 并使直綫上每个点也都恰有一个数与之对应。我們便說: 全部数的集合是無隙的, 也就是連續的。^①

3. 戴狄金分划 有理数虽可由一个通用定义來說明, 就是作为單位的几分之几, 但对無理数却不能这样說; 例如对 $\sqrt{2}$ 与 π 就不能这样來說明。話虽如此, 我們也未尝不能把無理数, 并因而把一切数都拿一个共同标帜來說明。这就是数軸上的每个点 P 都把全部有理点的集合分成兩类, 一类在它前头的, 一类在它后头的, 而若 P 本身是有理的, 則可随意算在第一类里, 或算在第二类里。准此便有下面的

說明 全部有理数, 若照着下述方案分成兩类, 就是: 第一类中的一切有理数都比第二类中的一切有理数小, 則每一这样的分法都恰恰規定一个(实)数, 它不比第一类中的一切有理数小, 也不比第二类中的一切有理数大。

如果这个数本身屬於兩类中的一类, 它就是有理的; 不然, 它就叫無理的。

全部有理数集合在这种意义下的“分划”, 用以照既定方案来定义任一实数的, 叫做“戴狄金分划”(戴狄金 R. Dedekind 德国数学家, 1831--1916)。例如 $\sqrt{2}$ 就是那样的一个正数, 它所对应的分划是照下述方案来确定的: 取平方后 <2 的一切有理数都分到第一类中, 取平方后 >2 的都分到第二类中; 而 $\sqrt{2}$ 本身, 則照前面所証明过的, 不屬於兩类中的任一类。

4. 有理近似值 对每个無理数 z , 总可以举出这样的两个有理数 r' 与 r'' , 使 $r' < z, r'' > z$, 而 $r'' - r' = \delta$, 不管这个随意选定的有理正数 δ 是多么小。

① 此处以及以后暫只講实数。复数以后再講。

因若 a 这个有理数属于定义 z 的那个分划的第一类中，则应有 $a < z$ ，在无穷多的有理数 $a, a + \delta, a + 2\delta, a + 3\delta, \dots$ ，当中，应该有一个最大的并且仍属于第一类的一数，设它是 $r' = a + n\delta < z$ ，而其次的 $r'' = a + (n+1)\delta$ 就已属于第二类，因此 $> z$ 。可是 $r'' - r' = \delta$ ，即得所证。 r'' 和 r' 就叫作 z 的有理近似值， δ 是近似的准确度。

在应用数学上，每个数 z ，不是有穷位小数的，用两个确定的 m 位小数来近似表达它，是非常重要的事。这两个数只在小数点后第 m 位上差一，即只差 10^{-m} 。这里的 m 是随便给定的一个位数。用所谓“夾套法”拿小数来“计算”随便一个数，就是根据这个道理而来的。用这个一般方法来计算 $\sqrt{2}$ ，先设 $1 < \sqrt{2} < 2$ ，因 $1^2 < 2 < 2^2$ ，其次 $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ ，因 $1.4^2 < 2 < 1.5^2$ ，复次 $1.41^2 < 2 < 1.42^2$ ，余类推。初学者常看不起这种方法，说它只是一种凑凑数字的“尝试”，其实这每次都是从小数位的十个 $1, 2, 3, \dots$ 中作系统选择的，不是随便试也不是碰巧凑的。每个数都是可以照这个方式用近似小数来计算的，纵然有时这并不是最简单的方法，例如对 $\sqrt{2}$ 就是这样。

在数学的应用上，经常使用的就是这样的近似值，因此在实际上有有理数一般都够用了。可是，如要从理性认识上来掌握数的整体和相互间的关系，无理数的概念便是不可缺的。可以证明：无理数的算法，也跟有理数的算法一样，按照人人所熟习的那些法则来做。

5. 不等式算法·绝对值 对不等式(估计式)有以下的法则，这些法则，初学者虽不大熟习，却都容易证明：

由 $a < b$ (或另一种写法 $b > a$)，得出 $a + c < b + c$ ， $ap < bp$ (假使 $p > 0$ 的话) $aq > bq$ (假使 $q < 0$ 的话)， $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ (假使 $a > 0$ 的话)，倒过来推也可以。

由 $a < b$ 及 $c < d$ ，得出 $a + c < b + d$ ， $ac < bd$ (假使 $b > 0$ 且 $c > 0$ 的话)。一个数 z 去掉正负号后的值，叫作它的绝对值 $|z|$ ；因此 $z > 0$ 时 $|z| = z$ ， $z < 0$ 时 $|z| = -z$ ， $|0| = 0$ 。

$|z| \geq 0$ 永远成立。下面的简单算法则都容易证明：

$$|ab| = |a| \cdot |b|, |a:b| = |a| : |b| \text{ (假使 } b \neq 0 \text{ 的话)}.$$

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

由 $|a| + |b| = 0$, 得出 $a = b = 0$.

$\operatorname{sgn} z = |z| : z = \pm 1$ 具有与 z 相同的正负号; 又规定 $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

6. 变量 变量 x 就是一个代表许多不同数的符号; 常量 a 就是一个代表某一数(固定值)的符号。

变量 x 可以取有穷个值, 也可以取无数多的值。若所取无数多的值是可数的(能编号): x_1, x_2, x_3, \dots , 这便构成一个(无穷)数列, 例如

$$\alpha) 1, 2, 3, 4, \dots, \text{ 或 } \beta) \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

可注意的是: 就是全部有理数的集合也是可数的, 虽然它是自相密集的; 因为可以先把全部正分数这样排成数列:

$$\gamma) \frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{1}; \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{2}\right), \frac{3}{1}; \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}; \\ \frac{1}{5}, \left(\frac{2}{4}\right), \left(\frac{3}{3}\right), \left(\frac{4}{2}\right), \frac{5}{1}; \frac{1}{6}, \dots$$

去掉那些括起来的(即数值出现多次的)分数, 置 0 于前, 并在每个分数后置负的, 这样便得全部有理数, 而且每个只出现一次。

数列 x_n 有聚值(聚点) a , 如果任意选定 $\varepsilon > 0$ 后, 可使无数个的 n (不必要全部), 适合

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

例如, 上述的数列 (α) 就没有聚点, (β) 有两个: 0 与 1, (γ) 有无数多个。

如 x 能取两个数 a 与 b 间的一切值(有理的与无理的), x 就叫以 $|a - b|$ 为长度的域或区间或变化范围 (a, b) 内的一个连续变量。

象 $a \leq x \leq b$ 这样的区间叫闭区间, 区间 $a < x \leq b$ 叫左开右闭的, 余类推。能取随便什么数值的变量叫无界变量。

变量 x 相应于数轴(即 x 轴)上一个横坐标为 x 的动点; 这个

点也应以 x 表示。如点 x 的变动方向不会倒过来，变量 x 就叫單調的，而且如 x 不减小，就說它是單調增大的。

7. 極限 設 a 是一个常数而 x 是一个变量，那么 $x \rightarrow a$ 的意思就是說 x 取定值 a ： x 等于 a 。

現設 $x \neq a$ ；如变量 x 能取無穷多的值，但到后来只取那种与 a 相差为任意小的值，那么便說， x 趋向 a ，或向 a 收斂或趋于極限 a ，并写为^①

$$x \rightarrow a \text{ 或 } \lim x = a;$$

a 就叫 x 的極限。

趋近于一个極限这一概念，在高等解析学中是有根本意义的。这个概念的精确說明如下： $x \rightarrow a$ 的意思是：差数 $|x - a|$ 到后来終于会而且永远保持比随便什么不管怎样小的正数 ε 还小：

$$0 < |x - a| < \varepsilon,$$

或者写成 $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ ，意义和上式完全相同。

显然，如 x 通过某个只有一聚值的有界数列，这个聚值同时也是 x 的極限。

举例 如 x 通过数列 $0.3, 0.33, 0.333, \dots$ ，那么就有 $x \rightarrow \frac{1}{3}$ 或 $\lim x = \frac{1}{3}$ 。因为我們有 $\frac{1}{3} - 0.33 \dots 3_m = \frac{1}{3} - \frac{33 \dots 3_m}{10^m} = \frac{10^m - 99 \dots 9_m}{3 \cdot 10^m} = \frac{1}{3 \cdot 10^m}$ ，因为我們可以把它弄得随便怎样的小，只要把位数 m 取得足够大 (§5, 4g)。如 $x \rightarrow a$ 而 x 离 a 足够近， x 就是 a 的一个近似值；写作 $x \approx a$ (近似地等于 a)。例如， $0.3333 \approx \frac{1}{3}$ 。極限这个本身很抽象的概念，对于实用計算上的意义就在于此。

这种極限步驟，也可用几何方式来說明，这就是，我們讓橫軸上的变点 x 無限地趋近固定点 a ，但却不許它与 a 碰到一起。

① 讀作“ x 趋于 a ” “ x 趋向 a ”。

如 x 只从右边接近 a , 也就是說, 如 $x > a$, 便写 $x \rightarrow a + 0$ (下限); 如从左边接近 a , 其时 $x < a$, 就写 $x \rightarrow a - 0$ (上限)。(因此符号 0 在这里并不表示一个确定的数)。在上例中, 就有 $x \rightarrow \frac{1}{3} - 0$ 。

8. 無穷小与無穷大 如 $x \rightarrow 0$, 那么便也說 x 变成無穷小。在数学里無穷小这一名詞只与变量这个概念相結合才有意义。异于零而等于常数的無穷小是沒有的。因此便相应地有 $x \rightarrow +0$, 与 $x \rightarrow -0$ 的区别。如 $|x|$ 能取的值, 超过随便哪个不管多么大的数 ω , $|x| > \omega$, 那么便說, x 变成無穷大, 并写成 $x \rightarrow \infty$ 或 $\lim x = \infty$ 。① 于此又按 $x < 0$ 还是 $x > 0$, 从几何上来說, 也就是按变点 x 能在直綫上無限地向左还是向右移动, 把 $x \rightarrow \infty$ 区别为 $x \rightarrow -\infty$ 与 $x \rightarrow +\infty$ 两种情形。由 $|x| \rightarrow \infty$ 得出 $1/x \rightarrow 0$, 并且倒过来说也成立; 又由 $|x| \rightarrow 0$ 得出 $x \rightarrow 0$, 并且倒达来说也成立。

§ 2. 函数

1. 函数概念 如一个变量 y 的值, 与另一变量 x 的值相对应, y 便叫自变量(宗量) x 的函数②。

普通写作 $y = f(x)$, 或 $y = g(x)$, $y = y(x)$, 等等。这种对应关系可以用許多方式表示出来, 例如用一張表, 或用一个規定, 平常多半是用一个計算上的規定。例如: $y = x^2$ 。現在首先就專講从計算上来規定的这种函数。——在多个自变量的情形下, 我們相应地有: $w = f(x, y, z)$ 。

① 有时也簡單写作 $x = \infty$ 。不过符号 ∞ 絕不表示一个确定的数值: 我們称 ∞ 为“非本义的数值”。例如 $-\infty < x < +\infty$ 的意思就是說: x 是無界变量; $0 \leq x < +\infty$ 的意思就是說: x 能取一切不是負的值。

② 这个一般界說(定义)起源于狄里希萊 (1805--1859): 函数的原名起源于萊布尼茲(1673)。

举例 a) 一个整(有理)函数(多项式)就是

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

这种型式的式子, 其中 a_0, a_1, \cdots, a_n 都是常系数。假使 $a_n \neq 0$, 那么 n 便叫这个整函数的次数。对 x 的每一个值都有 y 的一个值, 而且只有一个值, 与之相应(单值函数)。它的特例是: $y = a + bx$ (线性函数, 或一次函数), $y = x^n$ ($n > 0$, 整数)。

b) 一个(分式)有理函数就是两个整函数的商, 例如

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{或} \quad y = \frac{x^2 - 3x}{(x-3)(x-5)(x-6)} = R(x).$$

有理函数也是单值的。但这里 x 已不可再随便取任何一个值; 就 $y = \frac{1}{x}$ 这个函数说, 必须 $x \neq 0$, 就 $R(x)$ 说, 必须 $x \neq 3, \neq 5, \neq 6$, 因为不然, 除数(分母)就会变成零。

c) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ 是无理代数函数的一个例子; 在这里, 必须有 $x \geq 0$ 与 $x + \sqrt{x} \geq 0$, 如平方根能取正值又能取负值, 那末对 $x > 0$ 的每一个值, 都有 y 的四个值与之对应。

d) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$) 与对数函数 $y = \log_a x$, 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ 与圆函数(即反三角函数) $y = \operatorname{arc} \sin x, y = \operatorname{arc} \cos x, y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$, 都属于超越函数, 是即非代数函数。

所有这些函数, 都是以对数表与别的表以足供初步实用的近似值给出来的。不过在解析学上, 三角函数的自变量值与圆函数的函数值, 都不是用平常的度数来量而是用“弧度”量的。 α° 度角的弧度数 x 就是它所张半径 1 的圆弧弧长数:

$$x = \operatorname{arc} \alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \alpha.$$

于是有 $\operatorname{arc} 1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.017453$; $\operatorname{arc} 57^\circ.296 \approx 1$ 。

以上在 a) 至 d) 项下列举的函数, 以及一切由这些函数作有

限次任意的結合而得出来的函数，总称为初等函数。以后还要講些别的函数。

e) 正整数变量 n 的函数 $x = x(n)$ 的值，構成一个数列： $x(0) = x_0, x(1) = x_1, x(2) = x_2, \dots$ ；例如 $x = 1, 2, 3, \dots, x_n = n!$ (讀作 n 阶乘)： $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 6, x_4 = 24, x_5 = 120, x_6 = 720$ ，余类推。此外还要說明 $x(0) = 0! = x_0 = 1$ 。

函数 $y = f(x)$ 叫作解出了的(显函数)，这是对着未解出的函数(隐函数)来說的，隐函数的值由一个方程 $F(x, y) = 0$ 来規定，假使这方程对 y 有一解的話。例如从 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，可解出 $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ 。

二自变量的函数的例子：

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2},$$

这就是所謂凡·德·瓦尔状态方程，它表明一种气体的压力 p 怎样依从于它的(绝对)温度 T 与它的容积 v ； a, b, R ，都表示常数。就中， T 可以随便取什么 > -273 的值，而 v 必須 $\neq b$ 且又 $\neq 0$ 。

如把 $y = f(x)$ 里的 y 与 x 互换： $x = f(y)$ ，那么，某区間的每一 x 值所对应的 y 值的总体，便形成反函数 $y = g(x)$ 。例如， $y = \sqrt{x}$ 就是 $y = x^2$ 的反函数， $\log_a x$ 就是 a^x 的反函数， $\arcsin x$ 是 $\sin x$ 的反函数。

2. 几何表示 从解析几何上知道，怎样在一个垂直平行坐标系里^①，拿坐标 x, y 来表示点 P 。据此，对于一个函数 $y = f(x)$ ，便有一个点列与之相应，作为它的几何圖象，这个点列，平常(虽然不总是)都可以連成一条曲綫。

举例 綫性函数 $y = mx + b$ 就表示那条(不垂直于 x 軸的)直

① 实际上即用格子紙(坐标紙)。坐标几何起源于笛卡兒，法国哲学家与数学家，1596—1650。

綫，它以 $\text{arc tg } m$ 角与正 x 軸相交，与 y 軸相交于縱坐标为 b 的点处，与 x 軸相交于横坐标为 $x = -b/m$ 点处（如 $m \neq 0$ ）。
 $y = +\sqrt{1-x^2}$ 的圖象就是半徑 1 而以 0 点为中心的上半个圓周。
 $y = x!$ 却表示真的一个点列，因这里 x 只能取正整数值。至于那种对一切有理的 x 取 +1 值，对一切無理的 x 取 -1 值的函数，則完全画不出来。

讀者最好尽量多拿些函数，画出相当的曲綫来，或者在格子紙上，或者至少作些簡單的草圖，都可以。

当 $x \parallel x - x_0$ (讀为“换成”，这就是說，如 x 换成 $x - x_0$) 时，圖形就沿 x 軸的定向綫段 ox_0 移动； $x \parallel mx$ 时，以 $1:|m|$ 的比，变更横坐标的尺度，如 $m < 0$ ，則又反轉横坐标軸的方向。对 y 也可以这样說。如对 x 与对 y 的尺度变更是相同的，便也可以說是对圖象作了同样的尺度变更；于是圖象的所有長度都照相同的尺度改变，所有的角則始終不变。但若横坐标与縱坐标的尺度变更不同，便沒有这种情形。記住这些話，常可使曲綫容易画些。反函数 $y = g(x)$ 的几何圖象，可由原来 $y = f(x)$ 的圖象，在对称直綫 $y = x$ 上反映一下，即可得出来(圖 1)。

应用这个，可由作圖法从 $\varphi(x) = \psi(x)$ 型的，或 $\Phi(x, y) = c$ ， $\Psi(x, y) = 0$ 型的方程，解出未知数 x, y ，这只要使相应的曲綫相交就行了。

举例 $x = 4 \cos x$ ；直綫 $y = \frac{1}{4}x$ 与余

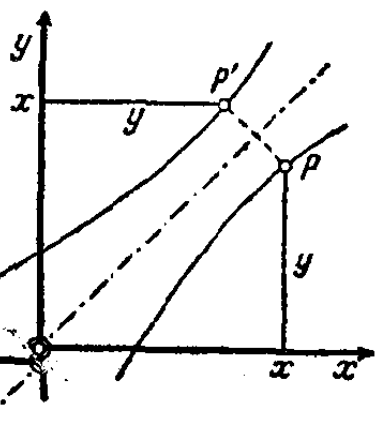


圖 1

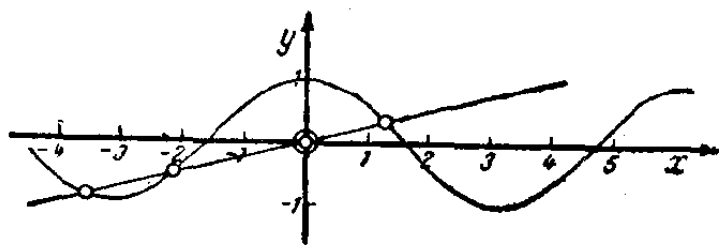


圖 2

弦綫 $y = \cos x$ 相交。得解： $x = 1.25$ ； -2.14 ； -3.59 (圖 2)。

3. **函数标尺** 表示函数的另一种方法就是用一种标尺。把 $y=f(x)$ 的值划出来, 而把自变量值 x 写在一头。

作为实例, 在圖 3 里表示了 $x, x^2, x^3, +\sqrt{x}, +\sqrt[3]{x}, \frac{1}{x}, \lg x = \log_{10} x$ 等的直綫标尺。这类函数标尺在实用数学里特别常見。一个著名的例子就是算尺(滑尺)。



圖 3

由橫軸上的标尺 $\xi = \varphi(x)$ 与縱軸上的标尺 $\eta = \psi(y)$, 可以作出一副分划不均匀 (在一般情形下) 的矩形格網。用这种格網, 为的是尽可能以較簡單的曲綫来表示函数。市上可以买到的單分或双分对数紙就是以 $\xi = \lg x, \eta = y$ 与 $\xi = \lg x, \eta = \lg y$ 作成的格網紙。

举例: a) “复热”曲綫 $pv^\kappa = c$ (p, v 表示气体作絕热(即不吸散热量)膨脹时的压力与容积; κ, c 都是常数) 就可以 $\xi = \lg v, \eta = \lg p, C = \lg c$ 在双分对数紙上由直綫 $\eta + \kappa\xi = C$ 表示出来。

b) 橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在以 $\xi = x^2, \eta = y^2$ 作成的平方双分格網紙上便画成綫段 $\frac{\xi}{a^2} + \frac{\eta}{b^2} = 1, \xi \geq 0, \eta \geq 0$ 。

§ 3. 整函数与内插法

1. **整函数** 如某些常数与一变量 x , 由加与乘結合起来, 便产生一个整函数。設 $g(x)$ 是一个 n 次整函数; ①总可以把它弄成

①为与一些别的函数(这在以后才能讲)区别起見, 常更确切地把这种函数叫作有理整函数。