高等数学

第一卷

R. 罗德 著
常 彦 译

人民教育出版社

高等数学

第一卷

R 罗德 著
常 彦 译

人民教育出版社

序　言

本書，在教本部分，分为三卷，原是罗德教授的一部大学初年級的講义，曾对学数学、学物理、以及学各門工程科学的大学生講过多次。因此，本書对純粹数学与应用的关系以及与实用数学方法的关系，予以很大的重視，不过幷未因此忽視了純粹数学的价值。本書因为原来只是罗德教授供听課人用的一部手写提綱，因此文字非常簡約，只把材料适当加以排列，幷加上許多举例、应用和練習題。因为叙述文字的簡約，閱讀上一定不很方便，好学的讀者必須为此作些勇敢而深入的努力，这对任何人想不流汗、不長太息几声都是作不到的。特别是在自己演算練習題时更需要这样，書中对于这个只举出了解和簡短的提示。

本冊是本書的第一卷，首章講解析学的基本概念，其次講微分学的主要定理与积分学的基本公式，多变量函数，平面曲綫的微分几何，复数，复变量与复变函数。以后第二卷当講积分学的基础和进一步推广，無穷級数，特别是冪級数，依賴于一个参数的积分，綫积分，复数积分，幷包括行列式和矢量及其应用。第三卷当講曲面与空間的曲綫坐标，空間綫积分和多重积分，二者間的关联，其次还講常微分方程，幷略講偏微分方程，特别是屬于物理和工程技术的。

此外还当出一套練習題集，附解法，作为第四卷；再有一部公式集作为第五卷，共三分冊。

本冊是第一卷的第十二版，只是第十一版未加修改的重印。著者已于 1942 年去世，本書已經多次版的考驗，可以不再修改了，凡不一致和誤排的地方已随时加以修正。

托伊布訥出版社　1953年夏于来比錫

目　录

第一章　数、变量与函数

§1. 数与变量

1. 有理数　数的概念是解析[①]的基础；而且通过計数与度量这种有組織的理性活动，使我們能掌握愈来愈多的客观世界现象，这無疑是人类自然知識的进步，因而也是人类文化进步的基础。整数 $\pm 1, \pm 2, \cdots$ 并包括零在內，以及正負分数，合起来構成全部有理数的集合。把随便两个有理数加、减、乘、除，結果总还是一个有理数。有一个例外，就是：不准用零除。这样，一个有理数就是两个整数的商（分数），零作除数除外。

整数可以跟一定向直綫上的等分点相对应，而且再細分之后，可使每个有理数 x（例如 $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$ 等等）都对应了数軸上以 x 为横坐标的一点（有理点）。在随便两个有理数 a 与 b 間，不管其差数怎么小，永远可以再插入别的有理数，例如可插入其算术中数 $\frac{1}{2}(a+b)$。与此相应，在直綫上随便两个不管怎样近的点之間，永远会有别的（甚至是無穷多的）有理点。因此，我們說：全部有理数的集合是自相密集的，全部有理点的集合也一样。

2. 無理数　縱然这样，全部有理点的集合并充不滿整条直綫，在直綫上仍还有些横坐标非有理数的点，比方就象那样的一个点，它的正横坐标 d 等于边長是 1 的正方形对角綫的長，即是由方程 $d^2=2$，或 $d=\sqrt{2}$（后一个式子只不过是另一种写法）所确

① "解析"这个名称的原文，"Analysis"（也譯作"分析"），起源自欧拉的經典著作"無穷解析引論" Introductio in analysin infinitorum, 1948 出版。— 欧拉 Leonhard Euler 1707—1783，瑞士数学家，曾在俄国講学。

定的長。

因为假使 d 是有理数，有如 $d=p/q$，其中 p 与 q 都指示正整数，但不都是偶数，因如不然，p/q 便可用 2 約掉，因此 q 不能 $=1$，因为 d 不是整数。可是由 $d^2=2$，应得 $p^2=2q^2$，因此便得 p 是偶数；但若 $p=2m$ 是偶数，那么，便又得 $p^2=4m^2=2q^2$，因此 $q^2=2m^2$，是即 q 同样是偶数，与上面的話正相矛盾。因此 d 不能是有理数，相应的点 (d) 也不是有理点(据，欧几里得，“几何原本”，-300 年左右出版)。

这样的点，也有数与之对应，就是所謂無理(＝非有理)数。一方面对無理数作一种适当的一般定义，另一方面对直綫上的無理点也作一种适当的一般定义，那就会显而可見：如果把無理数与有理数合在一起，一下子得到“全部数的集合”，那便使每个数，在直綫上都恰有一个点与之对应，并使直綫上每个点也都恰有一个数与之对应。我們便說：全部数的集合是無隙的，也就是連續的。①

3. 戴狄金分划 有理数虽可由一个通用定义来說明，就是作为單位的几分之几，但对無理数却不能这样說；例如对 $\sqrt{2}$ 与 π 就不能这样来說明。話虽如此，我們也未尝不能把無理数，并因而把一切数都拿一个共同标帜来說明。这就是数軸上的每个点 P 都把全部有理点的集合分成兩类，一类在它前头的，一类在它后头的，而若 P 本身是有理的，則可随意算在第一类里，或算在第二类里。准此便有下面的

說明 全部有理数，若照着下述方案分成兩类，就是：第一类中的一切有理数都比第二类中的一切有理数小，則每一这样的分法都恰恰規定一个(实)数，它不比第一类中的一切有理数小，也不比第二类中的一切有理数大。

如果这个数本身屬于兩类中的一类，它就是有理的；不然，它就叫無理的。

全部有理数集合在这种意义下的“分划”，用以照既定方案来定义任一实数的，叫做“戴狄金分划”(戴狄金 R. Dedekind 德国数学家，1831—1916)。例如 $\sqrt{2}$ 就是那样的一个正数，它所对应的分划是照下述方案来确定的：取平方后 <2 的一切有理数都分到第一类中，取平方后 >2 的都分到第二类中；而 $\sqrt{2}$ 本身，則照前面所証明过的，不屬于兩类中的任一类。

4. 有理近似値 对每个無理数 z，总可以举出这样的兩个有理数 r' 与 r''，使 $r'<z, r''>z$，而 $r''-r'=\delta$，不管这个随意选定的有理正数 δ 是多么小。

① 此处以及以后暂只講实数。复数以后再講。

因若 a 这个有理数屬于定义 z 的那个分划的第一类中，则应有 $a<z$，在無穷多的有理数 $a, a+\delta, a+2\delta, a+3\delta, \cdots$，当中，应該有一个最大的并且仍屬于第一类的一数，設它是 $r'=a+n\delta<z$，而其次的 $r''=a+(n+1)\delta$ 就已屬于第二类，因此 $>z$。可是 $r''-r'=\delta$，卽得所証。r'' 和 r' 就叫作 z 的有理近似值，δ 是近似的准确度。

在应用数学上，每个数 z，不是有穷位小数的，用兩个确定的 m 位小数来近似表达它，是非常重要的事。这兩个数只在小数点后第 m 位上差一，卽只差 10^{-m}。这里的 m 是随便給定的一个位数。用所謂"夾套法"拿小数来"計算"随便一个数，就是根据这个道理而来的。用这个一般方法来計算 $\sqrt{2}$，先設 $1<\sqrt{2}<2$，因 $1^2<2<2^2$，其次 $1.4<\sqrt{2}<1.5$，因 $1.4^2<2<1.5^2$，复次 $1.41^2<2<1.42^2$，余类推。初学者常看不起这种方法，說它只是一种湊湊数字的"尝試"，其实这每次都是从小数位的十个 $1, 2, 3, \cdots$ 中作系統选擇的，不是随便試也不是碰巧湊的。每个数都是可以照这个方式用近似小数来計算的，縱然有时这并不是最簡單的方法，例如对 $\sqrt{2}$ 就是这样。

在数学的应用上，經常使用的就是这样的近似值，因此在实际上有有理数一般都够用了。可是，如要从理性認識上来掌握数的整体和相互間的关系，無理数的概念便是不可缺的。可以証明：無理数的算法，也跟有理数的算法一样，按照人人所熟習的那些法則来做。

5. 不等式算法・絕对值 对不等式(估計式)有以下的法則，这些法則，初学者虽不大熟習，却都容易証明：

由 $a<b$(或另一种写法 $b>a$)，得出 $a+c<b+c$，$ap<bp$(假使 $p>0$ 的話) $aq>>bq$(假使 $q<0$ 的話)，$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$(假使 $a>0$ 的話)，倒过来推也可以。

由 $a<b$ 及 $c<d$，得出 $a+c<b+d$，$ac<bd$(假使 $b>0$ 且 $c>0$ 的話)。一个数 z 去掉正負号后的值，叫作它的絕对值 $|z|$；因此 $z>0$ 时 $|z|=z$，$z<0$ 时 $|z|=-z$，$|0|=0$。

$|z|\geqslant 0$ 永远成立。下面的簡單計算法則都容易証明：

$$|ab|=|a|\cdot|b|,\ |a:b|=|a|:|b|\text{（假使 } b\neq 0 \text{ 的話）。}$$

$$|a|-|b|\leqslant\Big||a|-|b|\Big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

由　　　　$|a|+|b|=0$，得出 $a=b=0$.

$\operatorname{sgn} z=|z|:z=\pm 1$ 具有与 z 相同的正負号；又规定 $\operatorname{sgn} 0=$ $=0$。

6. 变量　变量 x 就是一个代表許多不同数的符号；常量 a 就是一个代表某一数（固定值）的符号。

变量 x 可以取有穷个值，也可以取無数多的值。若所取無数多的值是可数的（能編号）：$x_1, x_2, x_3, \cdots$，这便構成一个（無穷）数列，例如

$$\alpha)\ 1, 2, 3, 4, \cdots,\ \text{或}\ \beta)\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \cdots$$

可注意的是：就是全部有理数的集合也是可数的，虽然它是自相密集的；因为可以先把全部正分数这样排成数列：

$$\gamma)\ \frac{1}{1};\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1};\ \frac{1}{3},\ \left(\frac{2}{2}\right),\ \frac{3}{1};\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1};$$
$$\frac{1}{5},\ \left(\frac{2}{4}\right),\ \left(\frac{3}{3}\right),\ \left(\frac{4}{2}\right),\ \frac{5}{1};\ \frac{1}{6},\cdots$$

去掉那些括起来的（即数值出現多次的）分数，置 0 于前，并在每个分数后置負的，这样便得全部有理数，而且每个只出現一次。

数列 x_n 有聚值（聚点）a，如果任意选定 $\varepsilon>0$ 后，可使無数个的 n（不必要全部），适合

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

例如，上述的数列（α）就沒有聚点，（β）有兩个：0 与 1，（γ）有無数多个。

如 x 能取兩个数 a 与 b 間的一切值（有理的与無理的），x 就叫以 $|a-b|$ 为長度的域或区間或变化范圍 (a, b) 内的一个連續变量。

象 $a\leqslant x\leqslant b$ 这样的区間叫閉区間，区間 $a<x\leqslant b$ 叫左开右閉的，余类推。能取随便什么数值的变量叫無界变量。

变量 x 相应于数軸（即 x 軸）上一个横坐标为 x 的动点；这个

点也应以 x 表示。如点 x 的变动方向不会倒过来，变量 x 就叫單調的，而且如 x 不減小，就說它是單調增大的。

7. 極限 設 a 是一个常数而 x 是一个变量，那么 $x=a$ 的意思就是說 x 取定值 a：x 等于 a。

現設 $x\neq a$；如变量 x 能取無穷多的值，但到后来只取那种与 a 相差为任意小的值，那么便說，x 趋向 a，或向 a 收斂或趋于極限 a，并写为①

$$x\to a \quad 或 \quad \lim x=a;$$

a 就叫 x 的極限。

趋近于一个極限这一概念，在高等解析学中是有根本意义的。这个概念的精确說明如下：$x\to a$ 的意思是：差数 $|x-a|$ 到后来終于会而且永远保持比随便什么不管怎样小的正数 ε 还小：

$$0<|x-a|<\varepsilon,$$

或者写成 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$，意义和上式完全相同。

显然，如 x 通过某个只有一聚值的有界数列，这个聚值同时也就是 x 的極限。

举例 如 x 通过数列 0.3, 0.33, 0.333, …，那么就有 $x\to\frac{1}{3}$ 或 $\lim x=\frac{1}{3}$。因为我們有 $\frac{1}{3}-0.33\cdots3_m=\frac{1}{3}-\frac{33\cdots3_m}{10^m}=\frac{10^m-99\cdots9_m}{3\cdot10^m}=\frac{1}{3\cdot10^m}$，因为我們可以把它弄得随便怎样的小，只要把位数 m 取得足够大(§5, 4g)。如 $x\to a$ 而 x 离 a 足够近，x 就是 a 的一个近似值；写作 $x\approx a$（近似地等于 a）。例如，$0.3333\approx\frac{1}{3}$。極限这个本身很抽象的概念，对于实用計算上的意义就在于此。

这种極限步驟，也可用几何方式来說明，这就是，我們讓横軸上的变点 x 無限地趋近固定点 a，但却不許它与 a 碰到一起。

---

① 讀作"x 趋于 a" "x 趋向 a"。

如 x 只从右边接近 a，也就是說，如 $x>a$，便写 $x\to a+0$（下限）；如从左边接近 a，其时 $x<a$，就写 $x\to a-0$（上限）。（因此符号 0 在这里并不表示一个确定的数）。在上例中，就有 $x\to\frac{1}{3}-0$。

8. **無穷小与無穷大** 如 $x\to 0$，那么便也說 x 变成無穷小。**在数学里無穷小这一名詞只与变量这个概念相結合才有意义。异于零而等于常数的無穷小是沒有的。**因此便相应有 $x\to+0$，与 $x\to-0$ 的区别。如 $|x|$ 能取的值，超过随便哪个不管多么大的数 ω，$|x|>\omega$，那么便說，x 变成無穷大，并写成 $x\to\infty$ 或 $\lim x=\infty$。① 于此又按 $x<0$ 还是 $x>0$，从几何上来說，也就是按变点 x 能在直綫上無限地向左还是向右移动，把 $x\to\infty$ 区别为 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$ 两种情形。由 $|x|\to\infty$ 得出 $1/x\to 0$，并且倒过来說也成立；又由 $|x|\to 0$ 得出 $x\to 0$，并且倒过来說也成立。

§2. 函数

1. **函数概念** 如一个变量 y 的值，与另一变量 x 的值相对应，y 便叫自变量（宗量）x 的函数②。

普通写作 $y=f(x)$，或 $y=g(x)$，$y=y(x)$，等等。这种对应关系可以用許多方式表示出来，例如用一張表，或用一个規定，平常多半是用一个計算上的規定。例如：$y=x^2$。現在首先就專講从計算上来規定的这种函数。——在多个自变量的情形下，我們相应地有：$w=f(x, y, z)$。

① 有时也簡單写作 $x=\infty$。不过符号 ∞ 絕不表示一个确定的数值；我們称 ∞ 为“非本义的数值”。例如 $-\infty<x<+\infty$ 的意思就是說：x 是無界变量；$0\leqslant x<+\infty$ 的意思就是說：x 能取一切不是負的值。

② 这个一般界說（定义）起源于狄里希萊（1805—1859）；函数的原名起源于萊布尼茲（1673）。

举例 a)一个整(有理)函数(多項式)就是

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

这种型式的式子,其中 $a_0, a_1, \cdots a_n$ 都是常系数。假使 $a_n\neq 0$,那么 n 便叫这个整函数的次数。对 x 的每一个值都有 y 的一个值,而且只有一个值,与之相应(單值函数)。它的特例是: $y=a+bx$ (綫性函数,或一次函数),$y=x^n$($n>0$, 整数)。

b)一个(分式)有理函数就是兩个整函数的商,例如

$$y=\frac{1}{x} \quad 或 \quad y=\frac{x^2-3x}{(x-3)(x-5)(x-6)}=R(x).$$

有理函数也是單值的。但这里 x 已不可再随便取任一个值;就 $y=\frac{1}{x}$ 这个函数說,必須 $x\neq 0$,就 $R(x)$ 說,必須 $x\neq 3, \neq 5, \neq 6$,因为不然,除数(分母)就会变成零。

c) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 是無理代数函数的一个例子;在这里,必須有 $x\geqslant 0$ 与 $x+\sqrt{x}\geqslant 0$,如平方根能取正值又能取負值,那末对 $x>0$ 的每一个值,都有 y 的四个值与之对应。

d)指数函数 $y=a^x(a>0)$ 与对数函数 $y=\log_a x$,三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ 与圓函数(即反三角函数)$y=\operatorname{arc}\sin x$, $y=\operatorname{arc}\cos x$, $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$,都屬于超越函数,是即非代数函数。

所有这些函数,都是以对数表与别的表以足供初步实用的近似值給出来的。不过在解析学上,三角函数的自变量值与圓函数的函数值,都不是用平常的度数来量而是用"弧度"量的。α° 度角的弧度数 x 就是它所張半徑 1 的圓弧弧長数:

$$x=\operatorname{arc}\alpha^\circ=\frac{\pi}{180}\alpha.$$

于是有 $\operatorname{arc}1^\circ=\frac{\pi}{180}\approx 0.017453$; $\operatorname{arc}57^\circ.296\approx 1$。

以上在 a)至 d)項下列举的函数,以及一切由这些函数作有

限次任意的結合而得出来的函数，总称为初等函数。以后还要講些别的函数。

e）正整数变量 n 的函数 $x=x(n)$ 的値，構成一个数列：$x(0)=x_0, x(1)=x_1, x(2)=x_2, \cdots$；例如 $n=1, 2, 3, \cdots, x_n=n!$（讀作 n 阶乘）：$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=6, x_4=24, x_5=120, x_6=720$, 余类推。此外还要說明 $x(0)=0!=x_0=1$。

函数 $y=f(x)$ 叫作解出了的（显函数），这是对着未解出的函数（隐函数）来說的，隐函数的值由一个方程 $F(x, y)=0$ 来規定，假使这方程对 y 有一解的話。例如从 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，可解出 $y=b\sqrt{1-x^2/a^2}$。

二自变量的函数的例子：

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2},$$

这就是所謂凡・德・瓦尔狀态方程，它表明一种气体的压力 p 怎样依从于它的（絕对）溫度 T 与它的容积 v；a, b, R, 都表示常数。就中，T 可以随便取什么 >-273 的値，而 v 必須 $\neq b$ 且又 $\neq 0$。

如把 $y=f(x)$ 里的 y 与 x 互換：$x=f(y)$，那么，某区間的每一 x 値所对应的 y 値的总体，便形成反函数 $y=g(x)$。例如，$y=\sqrt{x}$ 就是 $y=x^2$ 的反函数，$\log_a x$ 就是 a^x 的反函数，$\arcsin x$ 是 $\sin x$ 的反函数。

2. 几何表示　从解析几何上知道，怎样在一个垂直平行坐标系里[1]，拿坐标 x, y 来表示点 P。据此，对于一个函数 $y=f(x)$，便有一个点列与之相应，作为它的几何圖象，这个点列，平常（虽然不总是）都可以連成一条曲綫。

举例　綫性函数 $y=mx+b$ 就表示那条（不垂直于 x 軸的）直

① 实际上卽用格子紙（坐标紙）。坐标几何起源于笛卡兒，法国哲学家与数学家，1596—1650。

綫，它以 arc tg$m$ 角与正 x 軸相交，与 y 軸相交于縱坐标为 b 的点处，与 x 軸相交于横坐标为 $x=-b/m$ 点处（如 $m\neq 0$）。$y=+\sqrt{1-x^2}$ 的圖象就是半徑 1 而以 0 点为中心的上半个圓周。$y=x!$ 却表示眞的一个点列，因这里 x 只能取正整数値。至于那种对一切有理的 x 取 $+1$ 値，对一切無理的 x 取 -1 値的函数，則完全画不出来。

讀者最好尽量多拿些函数，画出相当的曲綫来，或者在格子紙上，或者至少作些簡單的草圖，都可以。

当 $x \| x-x_0$（$\|$ 讀为"換成"，这就是說，如 x 換成 $x-x_0$）时，圖形就沿 x 軸的定向綫段 ox_0 移动；$x \| mx$ 时，以 $1:|m|$ 的比，变更横坐标的尺度，如 $m<0$，則又反轉横坐标軸的方向。对 y 也可以这样說。如对 x 与对 y 的尺度变更是相同的，便也可以說是对圖象作了同样的尺度变更；于是圖象的所有長度都照相同的尺度改变，所有的角則始終不变。但若横坐标与縱坐标的尺度变更不同，便沒有这种情形。記住这些話，常可使曲綫容易画些。反函数 $y=g(x)$ 的几何圖象，可由原来 $y=f(x)$ 的圖象，在对称直綫 $y=x$ 上反映一下，即可得出来（圖 1）。

应用这个，可由作圖法从 $\varphi(x)=\psi(x)$ 型的，或 $\Phi(x,y)=c$，$\Psi(x,y)=0$ 型的方程，解出未知数 x, y，这只要使相应的曲綫相交就行了。

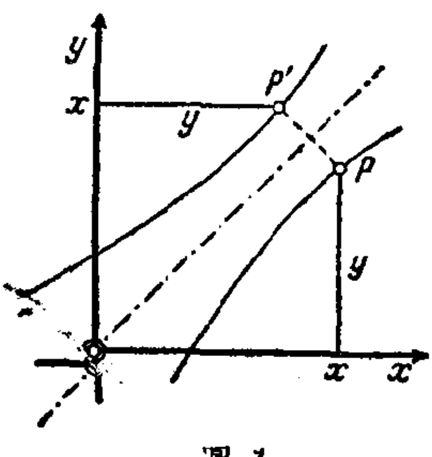

圖 1

举例 $x=4\cos x$；直綫 $y=\frac{1}{4}x$ 与余

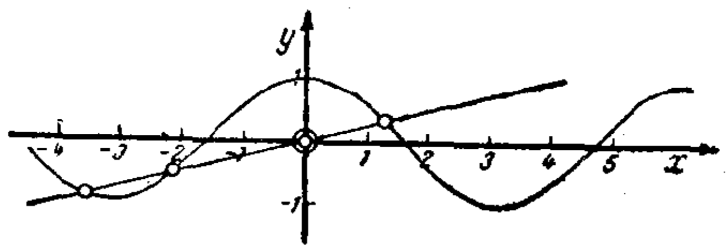

圖 2

弦綫 $y=\cos x$ 相交。得解：$x=1.25$；-2.14；-3.59（圖 2）。

3. 函数标尺　表示函数的另一种方法就是用一种标尺。把 $y=f(x)$ 的值划出来，而把自变量值 x 写在一头。

作为实例，在圖 3 里表示了 x, x^2, x^3, $+\sqrt{x}$, $+\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{x}$, $\lg x=\log_{10}x$ 等的直綫标尺。这类函数标尺在实用数学里特别常見。一个著名的例子就是算尺(滑尺)。

圖 3

由横軸上的标尺 $\xi=\varphi(x)$ 与縱軸上的标尺 $\eta=\psi(y)$，可以作出一副分划不均匀（在一般情形下)的矩形格網。用这种格網，为的是尽可能以較簡單的曲綫来表示函数。市上可以买到的單分或双分对数紙就是以 $\xi=\lg x$, $\eta=y$ 与 $\xi=\lg x$, $\eta=\lg y$ 作成的格網紙。

举例: a) “复热”曲綫 $pv^{\kappa}=c$(p, v 表示气体作絕热(即不吸散热量)膨脹时的压力与容积; κ, c 都是常数) 就可以 $\xi=\lg v$, $\eta=\lg p$, $C=\lg c$ 在双分对数紙上由直綫 $\eta+\kappa\xi=C$ 表示出来。

b) 橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在以 $\xi=x^2$, $\eta=y^2$ 作成的平方双分格網紙上便画成綫段 $\frac{\xi}{a^2}+\frac{\eta}{b^2}=1$, $\xi\geqq0$, $\eta\geqq0$。

§ 3. 整函数与內插法

1. 整函数　如某些常数与一变量 x，由加与乘結合起来，便产生一个整函数。設 $g(x)$ 是一个 n 次整函数；①总可以把它弄成

①为与一些别的函数(这在以后才能讲)区别起見，常更确切地把这种函数叫作有理整函数。