

科學圖書大庫

向量、張量與群

譯者 葉哲志 陳弘毅

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

向量、張量與群

譯者 葉哲志

陳弘毅

JY11139/15

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人 林碧鏗 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國五十九年 九月二十七日 初版

中華民國六十二年 六月 五日 再版

向量、張量與群

定價 新台幣 三十元 港幣 五元

譯者 葉哲志
陳弘毅

國立臺灣師範大學理學士
國立臺灣師範大學理學士

定價為基價 1.60

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 臺北郵政信箱53002號 電話783686號
發行人 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 林 碧 鏗 郵政劃撥帳戶第15795號
印刷者：燈台光隆印刷紙品公司 台北市大同街一一九號

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同把人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之成就，已超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人有無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允為社會、國家的基本任務。培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如物理、數學、生物、化學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啟發指導，不斷進行訓練。從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啟導後學。旨趣崇高，至足欽佩！

科學圖書是學人們研究、實驗、教學的精華，明確提供科學知識與技術經驗，本具互相啟發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的收穫。我國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年所可苛求者。因此，本部編譯出版科學圖書，引進世界科技新知，加速國家建設，實深具積極意義。

本基金會由徐銘信氏捐資創辦，旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利。民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，返國服務者十不得一。另贈國內大學儀器設備，輔助教學頗收成效；然審度衡量，仍嫌未能普及，乃再邀承國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員林碧鏗氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱。「科學圖書大庫」首期擬定二千冊，凡四億言，叢書百種，門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。從事翻譯之學者五百位，於英、德、法、日文中精選最新基本或實

II

用科技名著，譯成中文，編譯校訂，不憚三復。嚴求深入淺出，務期文圖並茂，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，有教無類，效果宏大。賢明學人同鑑及此，毅然自公私兩忙中，撥冗贊助，譯校圖書，心誠言善，悉付履行，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬菲薄，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，報國熱忱，思源固本，僑居特切，至足欽慰！

今科學圖書大庫已出版七百餘冊，都一億八千餘萬言；排印中者，二百餘冊，四千餘萬字。依循編譯、校訂、印刷、發行一貫作業方式進行。就全部複雜過程，精密分析，設計進階，各有工時標準。排版印製之衛星工廠十餘家，直接督導，逐月考評。以專業負責，切求進步。校對人員既重素質，審慎從事，復經譯者最後反覆精校，力求正確無訛。封面設計，納入規範，裝訂注意技術改善。藉技術與分工合作，建立高效率系統，縮短印製期限。節節緊扣，擴大譯校複核機會，不斷改進，日新又新。在翻譯中，亦三百餘冊，七千餘萬字。譯校方式分爲：(1)個別者：譯者具有豐富專門知識，外文能力強，國文造詣深厚，所譯圖書，以較具專門性而可從容出書者屬之。(2)集體分工者：再分爲譯、校二階次，或譯、編、校三階次，譯者各具該科豐富專門之知識，編者除有外文及專門知識外，尚需編輯學驗與我國文字高度修養，校訂者當爲該學門權威學者，因人、時、地諸因素而定。所譯圖書，較大部頭、叢書、或較有時間性者，人事譯務，適切配合，各得其宜。除重質量外，並爭取速度，凡美、德科學名著初版發行半年內，本會譯印之中文本，廣即出書，欲實現此目標，端賴譯校者之大力贊助也。

謹特掬誠呼籲：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者，與從事科學建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者。

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或聯袂而來譯校叢書，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。祈學人們，共襄盛舉是禱！

原 序

本書（共三冊）是從 *Videregående Matematik* 改訂增補的，其第一版發行於 1960 年，本書著作原是為化學家，生物化學家和醫師的基本研究而寫的。

原先本書特別的目的是為將在物理化學及生物物理學方面，作更深一層的研究與探討者，提供必要的數學知識。事實上，因本書也可以用於其他方面，因此現在增加一些資料後，相信其用途將更為廣泛。

為科學家在數學方面編寫一本書，一方面要在嚴密與基本知識之間找出一相當的均衡，另一方面要立即闡述其可門性。為達此目的，我們計劃採取下列的步驟：全書中將十分正確地以公式表示已獲得的結果——即使其證明省略。然而，此方法有些改變：即在本書開始時，吾人使用較嚴密的數學公式，在後半部裡，若在許多物理和化學的教科書中已十分普遍的公式，則以較不嚴謹的公式表示之。

第一冊包含向量、張量和群，若沒有微積分的知識亦可讀之。由我們的經驗知：若每週授課兩小時，則第一冊能在一學期內授畢，第二冊為多（實）變量函數論，在此冊中時常用到向量的概念，而且在第四章的後半部用到矩陣及張量的概念。若每週上四小時，則一學期即可上完第一冊及第三冊的一部分，這樣即可奠定微積分的基本知識。第三冊包含高等微積分方面的教材：級數、微分方程、複數函數和數值計算法，本冊與其他兩冊所述的特殊公式無多大關係，但需要有關矩陣的特徵值及多變量函數的知識。若每週講授四小時，則一學年可研讀第 1.3.4.5 章及第 6.8 章的一部分。

對於附有星號（*）之習題則給予解答。本書也包含許多實例，這些例子構成本書一重要部分，記號□表示例題做完而主要課文又開始，在每一冊後面，列舉一些參考書，讀者在研讀該部分時可同時讀那些書或讀完該冊後再讀之，將有莫大的助益。

感謝 Brian Phillips 和 Peeter Kruus 兩位博士翻譯此書的一大部分，及 H. Rosenberg 教授對原稿的許多指正與勸告，本書若有錯誤或費

IV

解處，不應該責難他們，又 Barbara Zeiders 對原稿有價值的建議及無限的辛勞，Lise Seifert 女士打首稿，及 Emmy Christiansen 小姐打最後的抄本，在此一一誌謝！

Thor A. Bak
Jonas Lichtenberg
於丹麥哥本哈根

目 錄

原序	
1. 向量與張量	1
1-1 平面	1
二維向量	1
乘以實數，加和減	2
內積	3
坐標系	5
解析幾何	7
坐標系的變換	9
1-2 三維空間	14
三維向量	14
外積	14
坐標系	15
解析幾何	17
幾個向量恒等式	19
坐標系的變換	20
1-3 向量與純量	24
平面幾何爲立體幾何的特例	24
向量表示法	24
純量 內積	25
向量 外積	26
1-4 N維向量	27
向量的定義	27
向量的運算	28
線性獨立	29
一向量組的基底	30

VI

線性向量空間	31
1-5 行列式	33
行列式的定義	33
餘因子與餘子式	35
行列式之性質	37
1-6 線性方程式	40
問題的解法	40
特殊情形下的解法	41
齊次方程式	42
1-7 矩陣	44
向量的矩陣表示法	44
線性向量函數	45
方陣的運算	47
一般矩陣的運算	50
特殊矩陣	51
反矩陣	52
正交矩陣	54
2階和3階的正交矩陣	55
1-8 向量與張量	60
在二維和三維的坐標變換	60
在N維的坐標變換	61
向量	62
張量	63
方陣的兩種用法	66
幾個一般評論	67
1-9 對角化	69
問題的形式	69
特徵值問題	70
問題的解	70
相似矩陣	71
矩陣函數	72
在二維中二次形式的簡化	73
在三維中二次形式的簡化	76

1-10 複數	81
複數的運算	81
多項方程式的複數根	82
複數矩陣	84
複係數的線性方程式	84
2. 群及群表示法	88
2-1 引言	88
群的概念	88
有限群	89
無限群	91
子群	92
同構，抽象群	92
2-2 有限抽象群	96
一元素的階	96
有限子群	96
母數集與定義關係	97
兩群之直積	98
共軛元素的類	99
2-3 群表示法	101
等價表示法	103
既約表示法	104
單式表示法	105
特徵標	110
2-4 一些重要的有限群	115
循環群與二面體群	115
排列群	116
1~8 階群的勘察	117
群論的應用	119
索引	121
英漢名辭對照表	124
參考書目	128

1. 向量與張量

1-1 平面

二維向量

本節我們將討論一些幾何概念與平面的關係，然後推廣到空間。

吾人定義**正常二維向量**(proper two-dimensional vector)為在一平面上之一有向線段，一向量由其**始點**(initial point)與**終點**(terminal point)而決定之，若其分別以 A 和 B 表示，則此向量以 $\mathbf{AB}$ 表之，在決定單位長後，其長度以 $|\mathbf{AB}|$ 或 AB 表之。一向量通常以一小寫英文字母如 $\mathbf{p}$ 表之，此時其長度記為 $|\mathbf{p}|$ 或 p 。圖示時，一向量的**方向**(direction)須於其終點處畫一箭頭以表示之。

若兩向量中之一向量能平移與另一向量吻合時，則稱此兩向量**等值**(equivalent)，即此兩向量有相同的方向與相同的長度。在這種情形下，平面上所有的向量所成之集合可分為好幾類彼此等值的向量，吾人視等值向量為相等——如同表示相同的**自由向量**(free vector)，已知一向量 $\mathbf{a}$ 及一點 P ，則恰有一以 P 為始點的向量 $\mathbf{PQ}$ ，使 $\mathbf{PQ} = \mathbf{a}$ ，則向量 $\mathbf{PQ}$ 稱為從點 P 畫向量 $\mathbf{a}$ 所得的結果(圖1-1)。

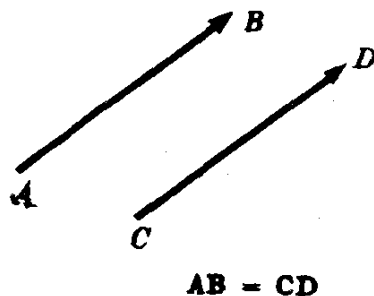


圖 1-1

2 向量、張量與群

任意一點 A 可視為一退化向量 (degenerate vector) $\mathbf{AA}$ 。 A 是此向量的始點和終點，其長度為 0 且沒有方向。所有退化向量可視為等值——如同所謂的零向量 (zero vector, null vector)，以 $\mathbf{0}$ 表之，一向量其長度為 1 者稱為單位向量 (unit vector)，因此有無數多個不同的單位向量。

乘以實數、加和減

今定義 (自由) 向量之三個數學運算：向量乘以實數，兩向量之加法及兩向量之減法。

設 k 為任一實數， $\mathbf{a}$ 為任一向量，若 $k = 0$ 或 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 則積 $k\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{a}k$ 定義等於零向量；在所有其他情形中 $k\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{a}k$ 為一正常向量 (proper vector)，其長為 $|k||\mathbf{a}|$ ，若 $k > 0$ ，則其方向與 $\mathbf{a}$ 之方向相同，否則相反。向量 $(-1)\mathbf{a}$ 簡記為 $-\mathbf{a}$ ，且稱其為 $\mathbf{a}$ 的相反向量 (opposite vector) (圖 1-2)

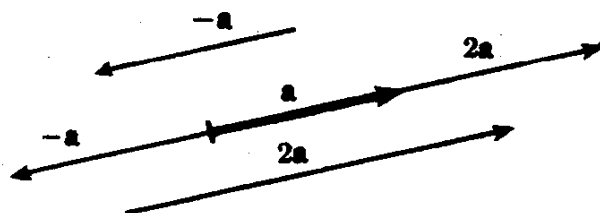


圖 1-2

若 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 為任意兩向量，則向量和 (vector sum) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 之定義如下：從任一點 P 作向量 $\mathbf{PQ}$ ，使 $\mathbf{PQ} = \mathbf{a}$ ，再從點 Q 作向量 $\mathbf{QR}$ ，使 $\mathbf{QR} = \mathbf{b}$ ，則向量和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 即為 $\mathbf{PR}$ (圖 1-3)。

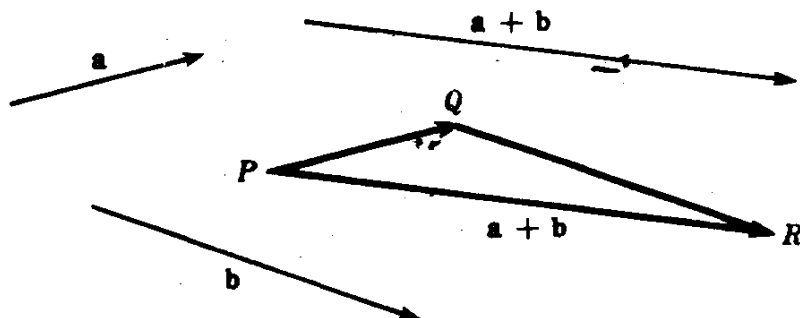


圖 1-3

由以上所定義的數學運算，甚易了解在實數的運算中有許多相同的規則亦同樣成立。

交換律： $k\mathbf{a} = \mathbf{a}k$ ； $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ 。

結合律： $(kl)\mathbf{a} = k(l\mathbf{a})$ ； $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ 。

分配律： $(k+l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$ ； $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ 。

設 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 為兩已知向量，從任一點 P 作兩向量使 $\mathbf{PQ} = \mathbf{a}$ 及 $\mathbf{PS} = \mathbf{b}$ ，則平行四邊形稱為由向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所產生的。對角向量 $\mathbf{PR}$ 為兩已知向量之和，而對角向量 $\mathbf{QS}$ 為向量方程式 $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的唯一解。此解以 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ($= \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$) 表之，並稱其為向量 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}$ 之差 (difference) (圖 1-4)。

由上述性質可知，正如同實數系中的運算，吾人可化簡較複雜的向量式。然而與實數系中的運算有一顯著的差異為在乘法運算中必恰有一因子為向量，另一因子為實數，則其積亦為一向量。

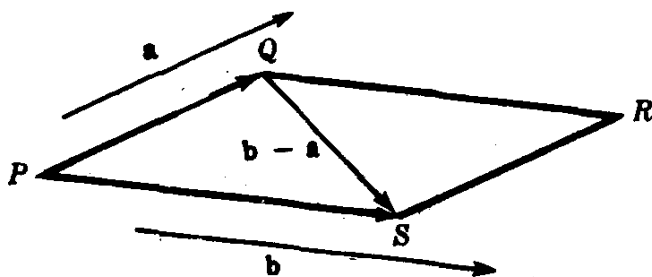


圖 1-4

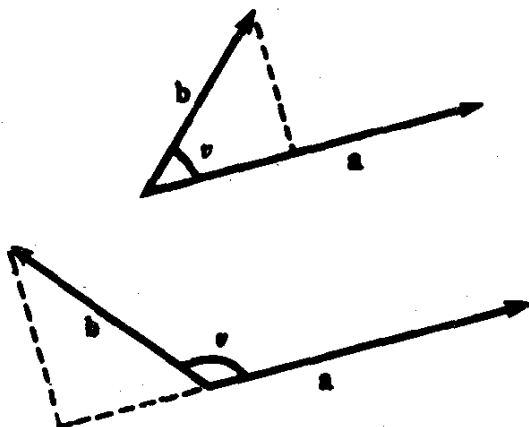
內積

設平面上任意兩向量為 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ ，其內積 (inner product, 數積 scalar product 或 點積 dot product)， $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 定義為一數。若 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 中有一為零向量，則 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ；否則 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$ ，其中 θ 為 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之夾角。數積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ 簡記為 $\mathbf{a}^2$ ； $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 = a^2$ 。若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ，則稱兩向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 為正文 (orthogonal)。若 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均為正常向量，則 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 表示 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 互相垂直。

若兩正常向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夾角為銳角，則 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ ；否則 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ 。總之， $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 之絕對值等於 $|\mathbf{a}|$ 與 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 上正射影之長的乘積，或是 $|\mathbf{b}|$ 與 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上正射影之長的乘積 (圖 1-5)。

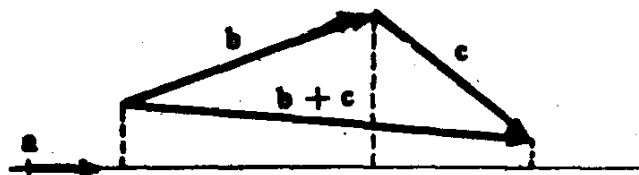
下列應用到內積的幾個基本規則甚易了解： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ， $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ 。

4 向量、張量與群

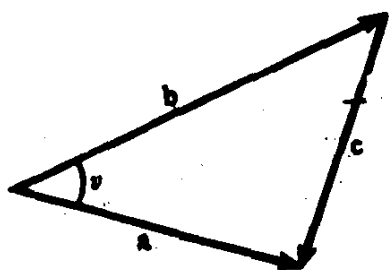


■ 1-5

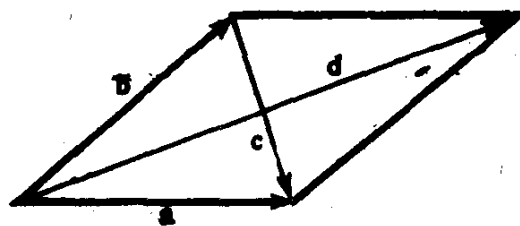
$k(a \cdot b)$ 。結合律的純內積形式是沒有意義的，如 $(a \cdot b) \cdot c$ ，即一數 $(a \cdot b)$ 和一向量 c 的內積，而 $(a \cdot b)c$ 和 $a(b \cdot c)$ 則有意義，因為它們分別平行向量 c 和 a ，故一般而言它們彼此是不同的。然而，分配律是成立的： $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ，因若 $a = 0$ ，則等號兩邊均為 0。若 $a \neq 0$ ，則向量 $b + c$ 在 a 上的正射影等於向量 b 和 c 在 a 上正射影的和（圖 1-6）。



■ 1-6



■ 1-7



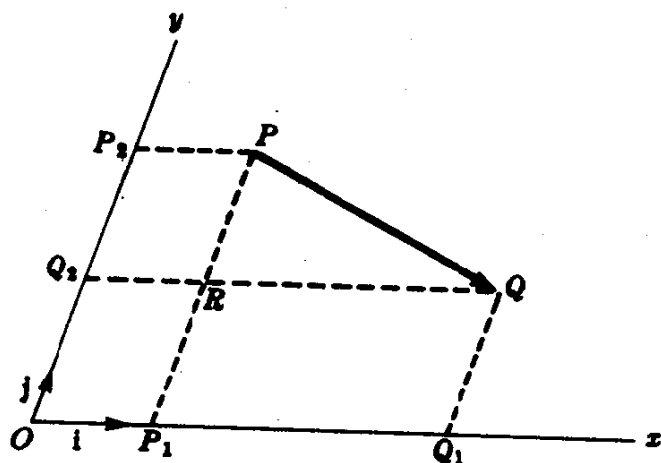
■ 1-8

例1-1. $c^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = a^2 + b^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ，即為餘弦定律： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \nu$ (圖1-7)。□

例1-2. $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = a^2 - b^2$ ，當 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ 時，則此平行四邊形為一菱形，故 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 0$ ，即一菱形的對角線是相互垂直 (圖1-8) □

坐標系

今介紹平面上的坐標系，首先討論一般平行坐標系 (general parallel coordinate system)，取不在同一線上的任意兩正常向量為 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ ，此兩向量稱為基本向量 (base vector)；次取一點 O ，從點 O 畫兩向量分別為 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ ，則 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 決定此坐標系的方向軸，此兩軸分別稱為 X 軸和 Y 軸，點 O 稱為此坐標系的原點。平面上之正向旋軸為從 X 軸向 Y 軸方向之旋軸 (逆時針方向) (圖1-9)。



■ 1-9

任一 (自由) 向量 $\mathbf{PQ}$ 是唯一由一有序實數對 (x, y) 所決定的， (x, y) 為向量的坐標：當 P_1Q_1 是 $\mathbf{PQ}$ 平行 Y 軸在 X 軸上的射影時，則已知向量的 X 坐標 (橫坐標) 可由方程式 $P_1Q_1 = xi$ 求得。同理，當 P_2Q_2 是 $\mathbf{PQ}$ 平行 X 軸在 Y 軸上的射影時，已知向量的 Y 坐標 (縱坐標) 可由方程式 $P_2Q_2 = yj$ 求得；因此，吾人可得 $\mathbf{PQ} = \mathbf{PR} + \mathbf{RQ} = \mathbf{RQ} + \mathbf{PR} = P_1Q_1 + P_2Q_2 = xi + yj$ 。因此，向量 $\mathbf{PQ} = (x, y)$ 為基本向量的線性組合 (linear combination)，其係數之大小由坐標而決定。 $\mathbf{PQ}$ 稱為沿 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 的方向可

6 向量、張量與群

被分解成兩分量。

本書除了少數例外之外，均採用通常直角坐標系 (usual right-angled coordinate system)，此即以兩垂直的單位向量為基本向量： $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$ 及 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$ 。

今吾人甚易以坐標形式表示前面所介紹的向量運算。設 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ， $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ 則

$$\begin{aligned} k\mathbf{a} &= k(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = (ka_1)\mathbf{i} + (ka_2)\mathbf{j} = (ka_1, ka_2), \\ \mathbf{a} \pm \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \pm (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 \pm b_1)\mathbf{i} + (a_2 \pm b_2)\mathbf{j} \\ &= (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2), \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) \\ &= a_1b_1\mathbf{i}^2 + a_2b_2\mathbf{j}^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

一向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ 之長為 $a = \sqrt{a^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ，兩向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之夾角 v 可由下式求得：

$$\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

最後由方程式 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ 分別與 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 的內積可得 $\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$ ，這裡有關坐標系形式的特別假設僅用於與內積有關係者。

今平面上點 P 的坐標可定義為從原點 O 到點 P 之位置向量 (position vector) $\mathbf{OP}$ 的坐標，設兩點 P 和 Q 之坐標為 $P = (x_1, y_1)$ 和 $Q = (x_2, y_2)$ ，則向量 $\mathbf{PQ}$ 的坐標即為此向量終點與始點之坐標差： $\mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} - \mathbf{OP} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 。兩點 P 和 Q 的距離 $PQ = |\mathbf{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (圖 1-10)。

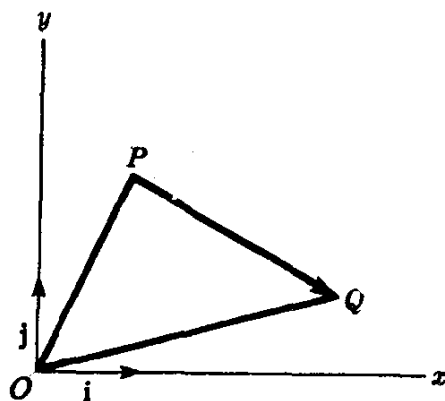


圖 1-10

解析幾何

設直線 l 上一已知點為 $P_0 = (x_0, y_0)$ ， l 之一法線向量 (normal vector) 為 $\mathbf{v} = (a, b)$ ， l 上之任一點 $P = (x, y)$ 恒可使向量 $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{v}$ 的內積為 0； $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = (x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ ，即 $ax + by + c = 0$ ，其中 $c = -ax_0 - by_0$ (圖 1-11)。 l 上的所有點均滿足此方程式，線 l 外之點均不能滿足之。因此它是直線之一方程式，而 l 是此方程式之圖形。一般而言， x 和 y 之任一方程式 $F(x, y) = 0$ 之圖形為由能滿足 $F(x, y) = 0$ 之數對所對應的所有點所形成的。若 $b \neq 0$ ，則此直線與 Y 軸不平行，故此方程式可表為 $y = \alpha x + q$ ，其中 α 為此直線的斜率。 $(1, \alpha)$ 為平行此直線之一向量。

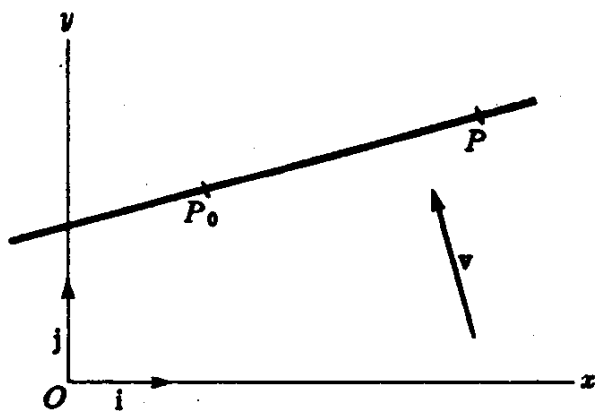


圖 1-11

若一單位向量 $\mathbf{n} = (\alpha, \beta)$ ， $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ，用以決定直線 l 之方程式，且所有的項均移至等號的左邊，則稱此方程式為**正規化** (normalized)： $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ 。此時，平面上任一點 $P_1 = (x_1, y_1)$ 至此直線之距離 p 等於將點 P_1 的坐標代入此方程式的左邊： $p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \alpha(x_1 - x_0) + \beta(y_1 - y_0) = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma$ 。(因 (x_0, y_0) 滿足 $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$)。此距離所帶的符號對應於 $\mathbf{n}$ 的方向。

當直線 l 包含一點 $P_0 = (x_0, y_0)$ 和向量 $\mathbf{u} = (h, k)$ 時，則此直線能以下列之**參數形式** (parametric form) 表示： $\mathbf{OP} = \mathbf{OP}_0 + t\mathbf{u}$ ，即

$$x = x_0 + ht$$

$$y = y_0 + kt.$$