基础微积分

JICHUWEIJIFEN

基础微积分

华　青　邵之泉　俞颂萱　编著

知识出版社
上海

内 容 提 要

本书介绍微积分的发展历史与基本知识。内容分为集合、极限等预备知识，一元函数的导数与微分，一元函数的积分等三篇，并介绍了微积分产生的经过和最新状况。本书通过对典型问题和例题的分析、解答与归纳，总结微积分的一般思维方式和常用解题方法、规律。每章后都有提要，习题都有答案或提示，书后还附有多元函数微积分简介和常用积分表等。

本书的特点是：起点较低，较多地联系到初等数学的知识，概念直观，通俗易懂，说理由浅入深，系统性较强，并注意微积分的应用。本书可供自学青年与一般读者学习使用，可作为职工大学、电视大学的学员的自学读物，也可供专科学校与各类中等学校的学生与数学教师以及有关人员参考。

基础微积分
华 青 邵之泉 俞颂董 编著
知识出版社出版发行
（上海古北路650号）
（沪 版）
新华书店上海发行所经销 上海东方印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/32 印张 19.25 插页 2 字数 420,000
1987 年 12 月第 1 版 1987 年 12 月第 1 次印刷
印数：1-5,000
ISBN7-5015-5233-9/O·22
定价：3.75 元

编者的话

微积分是数学的一个重要分支，是研究函数的极限、导数、微分、不定积分、定积分的性质和应用的一门学科。它是现代科学与技术以及自然科学的各个分支中广泛应用的最基本的数学工具之一：凡是复杂图形的研究，化学反应过程的分析，物理方面的多种应用，气象预报，弹道、人造卫星轨迹的计算，运动状态的研究，以及地质学与农业科学等，都要用到微积分。

微积分研究的对象是客观世界中变量之间的一种有规律性的数量联系以及它们的变化规律。初等数学主要是研究常量之间的数量关系，而微积分研究的内容与结论，一方面离不开初等数学，另一方面比初等数学更广泛、更深刻。由于微积分研究的对象是变量，决定了研究时必须运用辩证方法，从变化观点出发引入变量，从变量之间相依关系去考察问题。

根据自学特点，本书由浅入深地介绍微积分的基础知识，并帮助读者学会分析与归纳，寻找解题途径，掌握解题方法。为了使读者了解从初等数学发展到高等数学的有关过程，本书适当介绍了微积分发展史，附录中还简单介绍多元函数的微分与积分概念。此外，配置了较多的例题与习题，并注意照顾到典型性与完整性，书后有答案与提示，以便于读者自行核对。本书也可供教师作为教学参考书。

编　者

1984.3

绪　言

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门科学。初等数学是常量数学，高等数学是变量数学。微积分是高等数学的基础和重要部分。微积分作为研究事物运动和变化规律的数学方法，它是辩证法在数学中的应用。微积分的发展经历了漫长而曲折的道路。

1．变量数学在古代的萌芽

“无限细分，无限求和”的微积分思想，在古代希腊等国家和中国就已经有了萌芽。

早在两千多年以前的古希腊，地中海沿岸的奴隶们在繁重的生产劳动中就认识到，搬运笨重货物时利用滚动要比滑动省力，便在运输中广泛应用圆轮和圆轴的车子，还用圆形的辘轳从井里提水，在建筑工程上也将它作为起重工具。那时已经出现了水轮机，利用流水的冲力推动水轮，水轮又经过齿轮的作用带动碾磨。车轮、车轴、水轮和齿轮等工件制造得好坏直接影响到生产，就迫切需要对圆形有精确的认识。正是在进一步研究圆形的过程中，出现了“无限细分，无限求和”的微积分思想的萌芽。因此，生产实践是数学发展的源泉。

古希腊杰出的数学家、发明家、工程师——阿基米德（公元前 287～前 212），总结了前人的经验，用古典几何方法提出了曲边三角形面积的求法，即抛物线弓形的面积是底边相等、顶点相同（弓形的顶点取为到底边的垂直距离最大的点）的三角形面积的三分之四。他借喻了原子论：物质是由原子（分子）

组成，把平面图形视为由线段组成，应用了“不可分量”的概念。所谓不可分量是指，一条直线可以分成若干小线段，小线段又可再分，直至成为点则不可分，故称点为直线的不可分量。平面图形可分割成相互平行的窄条(面积)，窄条又可再分，直至分成线段，则不可分，故称线段为平面的不可分量。同样，平面是立体图形的不可分量。因此得到了由线组成平面图形，由平面组成立体的思想。由这样的“原子论”方法所找到的真理，后来连同其严格的、当时惯用的反证法以书信形式发表了出来。但这样的“书信”，对于17世纪的数学家是不知道的——两千年间该信被认为散佚，直到本世纪初才完全偶然地被发现。他还用了同样的方法，计算出圆锥体的体积等于三分之一的外接柱体的体积，又解决了圆的面积，半圆及抛物线弓形的重心，球、抛物体的体积与重心等问题。

阿基米德研究圆的周长和面积的计算问题，利用圆的内接正多边形和外切正多边形来推算，边数越多，圆和多边形就越接近。从圆心到多边形顶点的半径把多边形分成一个个三角形，也同时把圆分成一个个扇形。多边形的边数越多，一个个三角形就越接近扇形，三角形的底边(即多边形的一条边)便近似扇形的圆弧(曲线)；三角形的面积便近似扇形的面积；各个三角形底边之和便近似圆周长；各个三角形面积之和就近似圆的面积。随着边数的增多，就越来越精确。阿基米德从最简单的6边形一直做到96边形，得出圆周长和圆的直径的比值，即圆周率π是$3\frac{10}{71}$与$3\frac{10}{70}$之间的数。在这个计算工作中，已包含了“无限细分，无限求和”的微积分思想的萌芽：多边形不断增加边数，这是对边数的“无限细分”；由许多三角形来求圆的周长与面积时，就是“无限求和”。这里直与曲的相互

转化，正是微积分的基本思想。

阿基米德在微积分上的奠基性的贡献，其特点是：突破了传统的有限运算，大胆地采用了“不可分量”无限逼近等新方法。但由于极限、无限、函数等概念不能解决，因此只停留在萌芽状态。

微积分的思想在中国古代也有萌芽。例如，中国春秋战国时期的著作《庄子·天下篇》里，就有“截杖问题”：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”汉朝刘歆（？～23）在《西京杂记》里提到“记里车”，记里车是利用车轮的转动，带动齿轮传动，把车的行程里数表示出来，所谓“车行一里，木人辄击一槌”。在这种车子的制造中，车轮和齿轮圆周长要计算得相当精确。天文学家张衡（78～139）制造了“浑天仪”，里面的仪器每天恰好均匀地转一周，它是用齿轮来传动的，也要求对圆周率计算得很精密。

《九章算术》是中国古代人民数学知识的重要结晶。中国古代著名数学家无不以《九章算术》为学习门径。所谓九章是指九数：方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股。魏晋数学家刘徽，“幼习九章，长再详览”，最后完成了他的名著《九章算术注》。他在书中提出了用正多边形计算圆周率的“割圆术”：“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”刘徽的“割”也就是细分，即通过不断倍增圆内接正多边形边数来求圆周率的办法。他运用了自己的割圆理论，割圆内接正384边形，得到圆周率π为3.14，后来又进一步割到正3072边形，得到π的更精确的数值为3.1416。南北朝时，祖冲之更进一步提出圆周率的上、下限为$3.1415926<\pi<3.1415927$，取约率$\pi=\dfrac{22}{7}$，密率$\pi=\dfrac{355}{113}$。

这些在当时世界上居领先地位。清初康熙年代(18 世纪初叶)所编《数理精蕴》中已算得 π 值到小数 19 位。所有这些都表现了朴素的极限思想。

7 世纪初中国隋代建造的赵州桥，是一座跨度 37 米的大石拱桥，那么大一个拱圈就是用一块块长方条石砌成的。条石是一段段直线，但看起来砌成的拱圈却是一条近似的弧形曲线。这是微积分“以直代曲”生动的现实原型。

那么，为什么当时没有能够形成完整的微积分理论呢?这问样也是由于当时的生产实践水平所决定的。不论是阿基米德所处的古希腊时代或者是刘徽所处的魏晋时期，当时的生产工具比较简单，机械的应用也不广泛，反映在力学方面，基本上限于研究力的平衡等一类静力学范围的问题，反映在几何学方面，也只是对简单的曲线和图形(土地面积与器物的容积)的计算，生产实践还没有提出进一步发展微积分思想的需要，数学还处在初等数学阶段。这说明一种数学思想的萌芽是生产实践提出需要的结果，它的进一步形成和完善，也只有当生产实践有了进一步需要的时候才能实现。

2．17 世纪微积分的产生

公元 1492 年，哥伦布发现了新大陆，证实了大地是球形的观念。1543 年，哥白尼发表了《天体运行论》。开普勒在 1609 年提出了有关行星绕日运动的第一定律与第二定律，1618 年又提出了第三定律。1609 年，伽利略用自制的望远镜观察了月亮、金星、木星等星球，把人们的视野引向遥远的地方。这些科学实践拓展了人们对世界的认识，引起了人类思想上的激变。16 世纪，西欧封建社会逐渐没落，出现了资本主义的生产萌芽，产生了新的生产关系，社会生产力有了很大的发展。例如，随着集中的手工工场的相继出现，纺织技术有了很大的

进步，原来的手摇纺车为自动纺车所取代；原来的人力搓洗呢绒，改用了水轮牵动的木槌打净漂洗。在采矿和冶金工业中，也出现利用人力、畜力、风力或水力牵引的各种机械装置。当时，有的水力锤重达一吨多。随着航海事业的发展，船身加大，需要更好地研究浮体的规律，这就促使了流体力学的发展。为了发动战争，要广泛使用枪炮，不断改进武器装备，要求更精确地掌握抛射体的运动规律，这就推动了运动学和动力学的发展。

航海、生产和军事技术大量的实践告诉我们，整个自然界都是处在毫不间断的运动和变化中，而反映在数量上，就需要人们去研究一个量如何与另一个量相依赖而变化的规律，即这时人们大量接触到的已经不是常量，而是各种各样的变量。这种从常量到变量，正是数学发展史中的一个重要转折。正如恩格斯所说："数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了。"变量进入数学以后，对数学研究的方法也提出了新的要求。17 世纪 30 年代，出现了笛卡儿和费尔马的解析几何。在解析几何里，可以用字母表示流动坐标，用代数方程刻划一般平面曲线，用代数演算代替几何量的逻辑推导，从而把对几何图形的性质的研究转化为对解析式的研究，使数与形紧密地结合了起来。这种新的数学方法取代古代的欧几里得几何的综合方法，是数学发展史中的质变，为 17 世纪下半叶微积分算法的出现准备了条件。

3．微积分与牛顿、莱布尼茨

英国物理学家兼数学家牛顿（1642～1727）和德国数学家莱布尼茨（1646～1716），从前人大量零碎、杂乱的研究成果中汲取有用的思想，分别从不同的角度创立了微积分学说。他们

把速度、切线、极值、面积等四类问题全部归结为微分和积分，并阐明了存在于导数与积分之间的十分隐蔽的深刻联系。这种联系为很大一类函数提供了计算定积分的方法。牛顿-莱布尼茨公式成了架设在导数和积分这两大支柱上的桥梁。恩格斯说："在一切理论成就中，未必再有什么象 17 世纪下半叶微积分的发明那样，被看作是人类精神的最高胜利了。"17～18 世纪的数学史，几乎可以说是微积分的发展史。

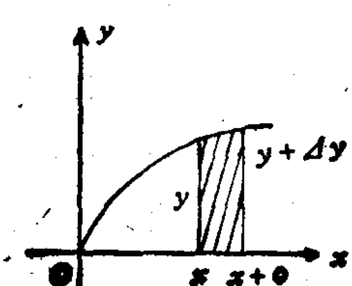
牛顿继承了伽利略的思想，把运动学的概念术语用于几何上，继承巴罗、费尔马等人的无穷小(不可分量)的观点和方法，把图形视为不可分量流动的结果，去求流数(即导数)。他完全改变了过去求积分(面积、体积、路程等)的方法，而是在求积分之前，先计算变量的流数，而后反向应用得到积分。

我们来看下面这个例子：

设已给出一条曲线，对应于横坐标 x 和纵坐标 y，若面积 $z=\left(\dfrac{n}{m+n}\right)ax^{\frac{m+n}{n}}$，那末如何确定 y 呢？

为计算方便，取 $\dfrac{an}{m+n}=c$ 和 $\dfrac{m+n}{n}=p$，则 $z=cx^p$。

令 x 的瞬或无穷小量为 o，于是新的坐标为 $x+o$，对应的面积瞬(无穷小矩形的面积)为 o 与 y 的积 $o\cdot y$。



牛顿也与伽利略一样，视 x 为时间，y 为运动的速度，不过他没有称 y 而称无穷小矩形 $o\cdot y$ 为面积瞬，这样在直观上易理解，因为这相当于时间乘速度。接着，他得出新的面积为

$$z+o\cdot y=c(x+o)^p.$$

牛顿用二项式公式展开：

$$z+o\cdot y=c\left(x^{p}+px^{p-1}\cdot o+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^{p-2}\cdot o^{2}+\cdots\right)。$$

再注意 $z=cx^{p}$，从而这两项相消，并除以 o，得

$$y=cpx^{p-1}+c\left[\frac{p\,(p-1)}{1\cdot 2}x^{p-2}\cdot o+\cdots\right]。$$

牛顿说：当 o“无限的小”时，“那些被它乘过的项与其他项相比就没有了，所以我们丢弃了它们”，于是得出：

$$y=cpx^{p-1}=ax^{\frac{m}{n}}。$$

这就是相应于面积 z 的纵坐标 y 的表达式。牛顿用运动学的语言把它称为“速度或迅度”，即面积变率。这也是他关于瞬时速度的定义及计算方法。顺便指出，牛顿不认为瞬时速度需要定义，而以运动的直观为满足。不过，若将这里的 z 视为运动路程，x 视为时间，很明显，瞬时速度是由平均速度而来，这是合理的。

牛顿的结论是这样的：若面积由 $z=\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$ 给出，则曲线将为 $y=ax^{\frac{m}{n}}$，反过来，若曲线是 $y=ax^{\frac{m}{n}}$，则面积自然是 $z=\frac{m}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$。

牛顿的例子中有两部分内容，一是求变率（速度），他的方法是利用增量瞬（无穷小量）及二项展开式来计算，而且还假定 p 可为负整数。由于 p 不一定是正整数，所以展开式可能是无穷项，这就是所谓二项式级数。二是积，他的意思是，如果对给定的曲线 y 求对应的面积，需要先找到一个量 z（y、z 都由表达式给出），若 z 的变化率是 y，则对应的面积就是 z。这样牛顿破天荒第一次给面积（或积分）以新的定义与计算方法，

再也不需要对无穷小元素做和，去进行冗长的计算，这正是牛顿的创举。

牛顿、莱布尼茨对微积分的创立起了奠基作用，因此，了解一下他们的个人简历是有必要的。

牛顿生于英国乌尔斯托帕的一个农家，父亲早逝，由母亲供他上学，得到伯父的帮助。1661 年进入剑桥大学三一学院读书，1665 年获得硕士学位。这时他有三大发现：(1)光谱分析；(2)万有引力定律；(3)微积分法。1669 年，牛顿年仅 27 岁便成了剑桥大学教授。1672 年牛顿被选为英国皇家学会会员，1703 年成为皇家学会的会长。他被称为一个为人类增添了光彩的人物。

莱布尼茨生于德国莱比锡，15岁进莱比锡大学攻读法律，通过接触近代哲学，察觉到了数学的重要性。1663 年得博士学位。他是一位法学家，又是一位数学家。他改制了帕斯卡的手摇计算机，能做加减乘除，并将它赠送给清朝的康熙皇帝，以表示他对中国的“先天八卦”图的推崇。他指出，这是世界上最早的二进位制。1673 年以后，他主要从事微积分的研究。1686年公布了微积分著作。与牛顿不同，莱布尼茨身后留下了巨大的亲笔遗稿。他创立了一些反映事物本质的数学符号，如在1675年的手稿里最早出现$\int$这个记号。莱布尼茨说：“把‘所有’写作$\int$，把‘所有l’写作$\int l$，即用以替代‘l之总和’是方便的”(这里 l 表示线)。不久以后，又出现了差数的记号d，并建立了有关这些记号的简单公式。但莱布尼茨后来才逐渐开始在记号$\int$下写 dx 或 dy。莱布尼茨的几十篇论文和笔记以及他与当时杰出数学家的通信，内容十分丰富多采，包括关于常

数、和、差、积、商、方幂、方根等微分计算法则，有理分式分解为简分式以及积分与积分求原函数的方法等。

微积分创立后，关于创立的优先权的争论在英国与德国之间激烈地进行着，双方互相指责对方是剽窃者。事实上，牛顿的大部分微积分研究成果是在莱布尼茨之前得出的，但公开发表微积分著作的时间，莱布尼茨却早于牛顿；而且他们的性格特点与研究角度也不相同。牛顿是从运动学出发，刻划变量的变化率，由瞬时速度引入流数（即现在的导数）的概念。牛顿在研究工作中比较谨慎、具体，带有经验性，始终受到物理观点的指导。莱布尼茨则从几何的角度出发，不是先讨论导数，而是从现在的微分入手，讨论几何中的切线和求积问题。莱布尼茨在研究中大胆、富于想象，喜欢推广，他的创作特征在于普遍化，尽量用普遍方法解决微积分问题。可见，微积分是牛顿、莱布尼茨各自独立地在异地创立的。

4．微积分的发展

与算术、几何、代数相比，微积分的历史要短得多，至今只有三百来年。纵观其发展过程，它经历了 17 世纪的奠基，18 世纪的争论和 19 世纪的革新，才逐渐发展成为今天的样子。

在整个 18 世纪，微积分曾受到一些长期习惯于初等数学传统观念的数学家特别是宗教势力的猛烈反对。但是，微积分在生产实践中和科学技术上的广泛应用，显示了它的强大生命力，终于经受了考验。

天体运动一直是当时的研究重点。在海洋上测定船只位置的实践需要推动了对它的研究。欧洲各个资本主义国家大量的商船和军舰作远洋航行，这就迫切需要能在远离大陆的情况下测定船只在海洋上的位置，即确定船只所在地点的经度和纬度。英国天文学家哈雷用微积分的方法通过计算断定，

1682 年出现的那一颗很大的彗星与 1531 年、1607 年出现过的是同一颗星，它以 76 年为周期绕太阳运转，并判断它将在 1758年底或 1759 年初再次出现。哈雷虽然在 1742 年死去，但他的科学预见如期得到证实。这颗彗星后来被命名为“哈雷彗星”。中国历史上有世界公认的关于哈雷彗星出现的最早和最完整的记载，从春秋时代鲁文公十四年（公元前 613 年）到 1910 年共有 31 次记载。1985 年底和 1986 年初，哈雷彗星又再度回归。

经过欧拉、拉格朗日等人的努力，微积分取得了进展。特别是欧拉系统化了 18 世纪微分学的全部资料，在他的《微分学》一书中，还第一次把导数作为微分学的基本概念。

1675 年英国建造了格林威治天文台，以后就以它所在的位置定为经度零度。当时人们发现利用月球的运行规律可以帮助确定经度。这就需要一张很精确的月球位置表。但是要制定这样一张月球表很不容易，因为月球不只受到地球的引力，而且还受到太阳的引力，所以需要在月球、地球、太阳相互吸引中确定月球的运动规律，这就是所谓“三体问题”。牛顿已经着手解决了这个问题。18 世纪初，欧拉把牛顿所研究的“三体问题”进一步归结成微分方程。欧拉还考虑到太阳距离月球远，因此对月球的影响要比地球对月球的影响相对地小一点，他便把太阳影响的一些次要项略去，将微分方程化得简单一些，便于求解。后来德国天文学家迈耶尔利用欧拉的这个“微扰方法”计算，在 1755 年编制出非常详细的月球表。经过格林威治天文台检验，这张月球表相当精确，在航海上得到实际使用。制定月球表测定经度的工作，说明微积分在当时的生产实践中就得到应用，并且微积分也在应用中进一步发展。微扰方法直到现在都是天文和物理研究中一个重要的数学方法。

用微积分计算船舶摇摆周期，这对船舶设计很有意义。在工程中时常利用绳索、滑轮系统以及皮带传动等，用微积分可解决拉力与负荷的关系，并考虑到摩擦的作用。微积分在弹道学方面的应用，促使火炮技术有很大发展。牛顿曾考虑空气对抛射体的阻力问题，开始用微积分去研究这个问题。瑞士数学家约翰·贝努利和欧拉继续研究弹道学，在 18 世纪初得出了炮弹运动规律的弹道微分方程。欧拉后来进一步提出求解这个微分方程的数值计算方法，把整个炮弹的飞行轨道分成一段一段，从炮弹出膛开始，逐段地计算，而过去所用的抛物线就不能精确地反映实际的飞行轨道。接着便有人用这个方法编制出精确的弹道曲线表，提高了大炮的射击效能。欧拉提出的这个“折线法”，也是一个基本的微分方程数值计算方法。

18 世纪关于微积分的争论和微积分的发展，使人们深感理论基础的重要，为19世纪的革新打下了基础。在 19 世纪最先从事“无穷小分析”改造的有柯西、波尔察诺和高斯。柯西把“无穷小”定义为以零为极限的变量，沿用至今；给出了现在大家公认的关于函数极限、连续的定义。他还用“极限理论”把微分、积分和无穷级数的概念严密化、系统化，为微积分奠定了新的逻辑基础，清除了它的“神秘性”，纠正了牛顿、莱布尼茨的一些讹误。以后，所谓“神秘的微积分”、“逝去的量的鬼魂的无穷小”，微积分的推导是“分明的诡辩”等一切对微积分的攻击、反对都销声匿迹了。

在中国，清代数学家李善兰于 1859 年初翻译了美国数学家罗密斯所著的《代微积拾级》，其内容虽然主要是平面解析几何与一元函数微积分，但在中国历史上却是第一本中文版的高等数学。

随着生产实践发展的需要，向微积分提出了更多的问题，

原先建立的微积分理论在大量的新问题面前也感到不够用了，函数的概念扩大了，它不再停留在一个变数 y 对另一个变数 x 的依存关系上，而是一个变数 y 对多个变数 t、x 等的依存关系。例如，要研究船在水流中的阻力和速度的流体力学问题，研究物体中的温度分布问题，研究弹性体受力变形和振动问题等，往往需要讨论多个变数的函数，所得出的微分方程也就更加复杂。在实践需要的推动下，微积分继续向微分方程、变分法，以及复变函数论等等数学领域深入发展，变数数学的内容越来越丰富了。

目　录