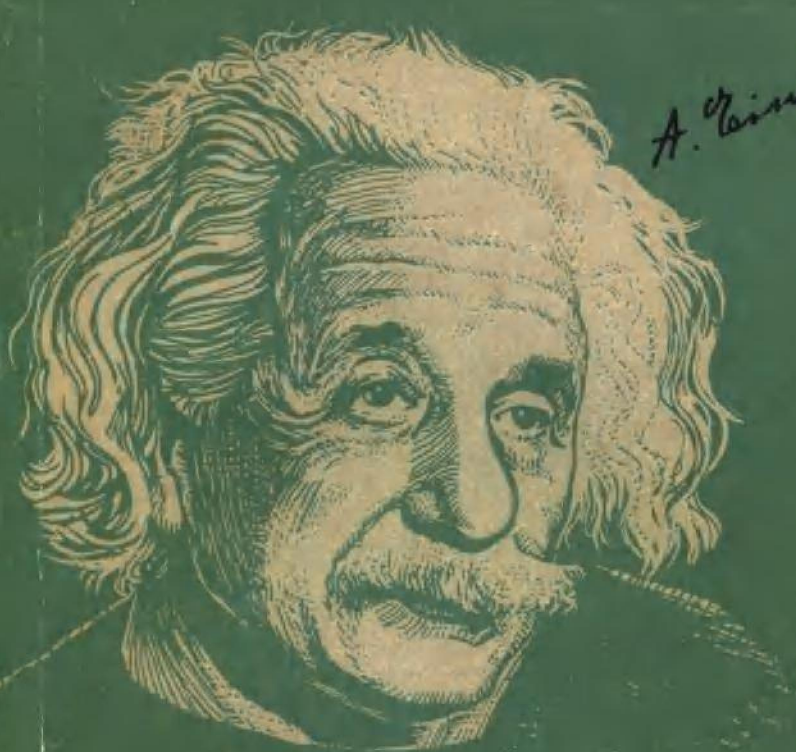




相对论的意义

A. 爱因斯坦

科学出版社

相对论的意义

A. 爱因斯坦 著

李 灏 译

科学出版社

1979

ALBERT EINSTEIN
THE MEANING OF RELATIVITY
Fifth Edition, 1955

内 容 简 介

本书是爱因斯坦系统地阐述相对论的唯一著作。作者以他特有的论述才能,简要地评述了相对论前物理学中空间与时间的概念,介绍了狭义相对论与广义相对论的基本内容,并对相对论的成就和其发展中存在的关键问题作了精辟探讨。对于相对论有兴趣的读者,这本书具有很大的启发性,可以作为进一步研究现代相对论的基础。

本书可供物理学工作者,对相对论有兴趣的读者参考。

相 对 论 的 意 义

A. 爱因斯坦 著

李 灏 译

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1961 年 11 月 第 一 版 开本: 850 × 1168 1/32
1979 年 1 月 第 六 次 印 刷 印张: 3 3/4
印数: 29,281—117,400 字数: 93,000

统一书号: 13031·921

本社书号: 1305·13—1

定 价: 0.52 元

中译本再版说明

1979年3月14日，是爱因斯坦诞辰一百周年，我们再版本书，以示纪念。

本书是爱因斯坦根据1921年在美国普林斯敦大学所作的多次演讲编成。初版于1922年，以后曾再版和重印几十次，已被译成世界各种文字，是爱因斯坦本人系统地阐述相对论的唯一著作。作者不但深刻地评述了相对论前物理学中的空间、时间概念，而且系统严谨地介绍了狭义相对论和广义相对论的基本内容。在本书历次再版过程中，爱因斯坦曾经多次修订补充。例如，1946年第三版时增添了附录一，主要论述A. 弗利德曼在1922年提出的宇宙膨胀理论，从内容看来，显然写成时间要早于1946年。第四版时作者增添了附录二，阐述引力理论的推广。第五版时又彻底改写了附录二，标题易为“非对称场的相对论性理论”，其中有些部份是作者在逝世前几个月写成的，这是爱因斯坦表述统一场论的最后尝试。由此可见爱因斯坦历来对本书的重视。作者在本书中以亲身的体验，对相对论的成就及其发展中存在的问题作了精辟论述，对我们进一步研究相对论有很大的启发性。

本书对研究相对论历史，特别是爱因斯坦思想的发展，也是很有价值的。

中译本是按爱因斯坦生前审定的最后一版第五版翻译的。这次再版是采用原来纸型印刷，补入了爱因斯坦1954年12月为第五版写的说明，并改正了一些印刷错误和翻译不当之处。

第五版说明

在现在这一版中,我彻底修订了原来的附录二“引力理论的推广”,并将标题易为“非对称场的相对论性理论”,因为我已成功地简化了场方程的推导和形式,其中一部份工作得到了我的助手考夫曼(B. Kaufman)的合作. 这样整个理论就变得更清楚了,而内容没有改变.

A. 爱因斯坦

1954年12月

目 录

中译本再版说明	i
第五版说明	iii
第一章 相对论前物理学中的空间与时间	1
第二章 狭义相对论	16
第三章 广义相对论	36
第四章 广义相对论(续)	51
附录一 论“宇宙学问题”	71
附录二 非对称场的相对论性理论	87
索引	110

第一章 相对論前物理学中的空間与時間

相对論和空間与時間的理論有密切的联系。因此我要在开始的时候先簡單扼要地考究一下我們的空間与時間概念的起源，虽然我知道这样做是在提出一个引起爭論的問題。一切科学，不論自然科学还是心理学，其目的都在于使我們的經驗互相協調并将它們納入邏輯体系。我們习惯上的空間与時間概念和我們經驗的特性又是怎样联系着的呢？

我們看来，个人的經驗是排成了序列的事件；我們所記得的各个事件在这个序列里看来是按照“早”和“迟”的标准排列的，而对于这个标准則不能再作进一步的分析了。所以，对于个人來說，就存在着“我”的时间，也就是主觀的时间，其本身是不可測度的。其实我可以用数去和事件如此联系起来，使較迟的事件和較早的事件相比，对应于較大的数；然而这种联系的性質却可以是十分随意的。将一只时計所指出的事件順序和既定事件序列的順序相比較，我就能用这只时計来确定这种联系的意义。我們將时計理解为供給一联串可以計数的事件的东西，它并且还具有一些我們以后会說到的其他性質。

各人在一定的程度上能用語言来比較彼此的經驗。于是就出現各个人的某些感觉是彼此一致的，而对于另一些感觉，却不能建立起这样的一致性。我們慣于把各人共同的因而多少是非个人特有的感觉当作真实的感覺。自然科学，特別是其中最基本的物理学，就是研究这样的感觉。物理物体的概念，尤其是刚体的概念，便是这类感觉的一种相对恆定的复合。在同样的意义下，一个时計也是一个物体或体系，它还具有一个附加的性質，就是它所計数的一联串事件是由都可以当作相等的元素构成的。

我們的概念和概念体系所以能得到承認，其唯一理由就是它

們是适合于表示我們的經驗的复合；除此以外，它們并无別的关于理性的根据。我深信哲学家¹⁾曾对科学思想的进展起过一种有害的影响，在于他們把某些基本概念从經驗論的領域里（在那里它們是受人們制約的）取出来，提到先验論的不可捉摸的頂峯。因为即使看起来观念世界不能借助于邏輯方法从經驗推导出来，但就一定的意义而言，却是人类理智的創造，沒有人类的理智便无科学可言；尽管如此，这个观念世界之依赖于我們經驗的性質，就象衣裳之依赖于人体的形状一样。这对于我們的時間与空間的概念是特別确实的；迫于事实，为了整理这些概念并使它們适于合用的条件，物理学家只好使它們从先验論的奥林帕斯山（Olympus）²⁾降落到人间的实地上来。

現在談談我們对于空間的概念和判断。这里主要的也在于密切注意經驗对于概念的关系。在我看来，彭加莱（Poincaré）在他的“科学与假設”（*La Science et l'Hypothèse*）一书中所作的論述是認識了真理的。在我們所能感覺到的一切剛体变化中間，那些能被我們身体任意的运动抵消的变化是以其簡單性为标志的；彭加莱称之为位置的变化。凭簡單的位置变化能使两个物体相接触。在几何学里有根本意义的全等定理便和处理这类位置变化的定律有关。下面的討論看来对于空間概念是重要的。将物体 $B, C, \dots$ 附加到物体 A 上能够形成新的物体；就說我們延伸物体 A 。我們能延伸物体 A ，使之与任何其他物体 X 相接触。物体 A 的所有延伸的总体可称为“物体 A 的空間”。于是，說一切物体都在“（随意选择的）物体 A 的空間”里，是正确的。在这个意义下我們不能抽象地談論空間，而只能說“属于物体 A 的空間”。在日常生活中确定物体相对位置时，地壳处在如此主要的地位，由此而形成的抽象的空間概念，当然是无可置护的。为了使我們自己免于这项极严重的錯誤，我們將只提到“参照物体”或“参照空間”。以后会看

1) 这里所說的哲学家应指唯心主义哲学家。——中文譯本編者註。

2) 希腊神話傳說奥林帕斯山是神所居之处；这里就是指天上而言。——中文譯本編者註。

到,只是由于广义相对論才使得这些概念的精细推究成为必要.

我不打算詳細考究参照空間的某些性質,这些性質导致我們將点設想为空間的元素,將空間設想为連續区域.我也不企图进一步分析一些表明連續点列或綫的概念为合理的空間性質.如果假定了这些概念以及它們和經驗的固体的关系,那就容易說出空間的三維性是指什么而言;对于每个点,可以使它与三个数 x_1, x_2, x_3 (坐标)相联系,办法是要使这种联系成为唯一地相互的,而且当这个点描画一个連續的点系列(一条綫)时,它們就作連續的变化.

在相对論前的物理学里,假定理想刚体位形的定律是符合于欧几里得几何学的.这个意义可以表示如下:标志在刚体上的两点构成一个間隔.这样的間隔可取多种方向和我們的参照空間处于相对的靜止.如果現在能用坐标 x_1, x_2, x_3 表示这个空間里的点,使得間隔两端的坐标差 $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, 对于間隔所取的每种方向,都有相同的平方和:

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2, \quad (1)$$

則这样的参照空間称为欧几里得空間,而这样的坐标便称为笛卡儿坐标¹⁾. 其实,就以把間隔推到无限小的极限而論,作这样的假定就够了. 还有些不很特殊的假設包含在这个假設里; 由于这些假設具有根本的意义,必須喚起注意. 首先,假設了可以随意移动理想刚体. 其次,假設了理想刚体对于取向所表現的行为与物体的材料以及其位置的改变无关,这意味着只要能使两个間隔重合,則随时随处都能使它們重合. 对于几何学,特别是对于物理量度有根本重要性的这两个假設,自然是由經驗得来的;在广义相对論里,須假定这两个假設只对于那些和天文的尺度相比是无限小的物体与参照空間才是有效的.

量 s 称为間隔的长度. 为了能唯一地确定这样的量,需要随意地規定一个指定間隔的长度;例如,令它等于 1 (长度单位). 于是就可以确定所有其他間隔的长度. 如果使 x_ν 綫性地依赖于参

1) 这关系必須对于任意选择的原点和間隔方向(比率 $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$)都能成立.

量 λ ,

$$x_v = a_v + \lambda b_v,$$

便得到一条綫,它具有欧几里得几何学里直綫的一切性質. 具体地说,容易推知,将間隔 s 沿直綫相繼平放 n 次,就获得长度为 $n \cdot s$ 的間隔. 所以长度所指的是使用单位量杆沿直綫量度的結果. 下面会看出:它就象直綫一样,具有和坐标系无关的意义.

現在考虑这样一种思路,它在狭义相对論和在广义相对論里处在相类似的地位. 我們提出問題:除掉曾經用过的笛卡儿坐标之外,是否还有其他等效的坐标? 間隔具有和坐标选择无关的物理意义;于是从我們的参照空間里任一点作出相等的間隔,則所有間隔端点的軌跡为一球面,这个球面也同样具有和坐标选择无关的物理意义. 如果 x_v 和 x'_v (v 从1到3)都是参照空間的笛卡儿坐标,則按两个坐标系表示球面的方程将为

$$\sum \Delta x_v^2 = \text{恆量}, \quad (2)$$

$$\sum \Delta x'_v{}^2 = \text{恆量}. \quad (2a)$$

必須怎样用 x_v 表示 x'_v 才能使方程(2)与(2a)彼此等效呢? 关于将 x'_v 表作 x_v 的函数,根据泰勒(Taylor)定理,对于微小的 Δx_v 的值,可以写出

$$\Delta x'_v = \sum_a \frac{\partial x'_v}{\partial x_a} \Delta x_a + \frac{1}{2} \sum_{a\beta} \frac{\partial^2 x'_v}{\partial x_a \partial x_\beta} \Delta x_a \Delta x_\beta + \cdots.$$

如果将(2a)代入这个方程并和(1)比較,便看出 x'_v 必須是 x_v 的綫性函数. 因此,如果令

$$x'_v = a_v + \sum_a b_{va} x_a, \quad (3)$$

而

$$\Delta x'_v = \sum_a b_{va} \Delta x_a, \quad (3a)$$

則方程(2)与(2a)的等效性可表示成下列形式:

$$\sum \Delta x'_v{}^2 = \lambda \sum \Delta x_v^2 \quad (\lambda \text{ 和 } \Delta x_v \text{ 无关}). \quad (2b)$$

所以由此知道 λ 必定是常数. 如果令 $\lambda = 1$, (2b)与(3a)便供給条件

$$\sum_{\nu} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (4)$$

其中按照 $\alpha = \beta$ 或 $\alpha \neq \beta$ 有 $\delta_{\alpha\beta} = 1$ 或 $\delta_{\alpha\beta} = 0$. 条件(4)称为正交条件,而变换(3),(4)称为綫性正交变换. 如果要求 $s^2 = \sum \Delta x_\nu^2$ 在每个坐标系里都等于长度的平方,并且总用同一单位标尺来量度,則 λ 須等于 1. 因此綫性正交变换是我們能用来从参照空間里一个笛卡儿坐标系变到另一个的唯一的变换. 我們看到,在应用这样的变换时,直綫方程仍化为直綫方程. 将方程(3a)两边乘以 $b_{\nu\beta}$ 并对于所有的 ν 求和,便逆演而得

$$\sum_{\nu} b_{\nu\beta} \Delta x'_\nu = \sum_{\nu\alpha} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} \Delta x_\alpha = \sum_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} \Delta x_\alpha = \Delta x_\beta. \quad (5)$$

同样的系数 b 也决定着 Δx_ν 的反代換. 在几何意义上, $b_{\nu\alpha}$ 是 x'_ν 軸与 x_α 軸間夹角的余弦.

总之,可以說在欧几里得几何学里(在既定的参照空間里)存在优先使用的坐标系,即笛卡儿系,它們彼此用綫性正交变换来作变换. 参照空間里两点間用量杆測得的距离 s ,以这种坐标来表示就特別簡單. 全部几何学可以建立在这个距离概念的基础上. 在目前的論述里,几何学和实在的东西(刚体)有联系,它的定理是关于这些东西的行为的陈述,可以証明这类陈述是正确的还是錯誤的.

人們尋常習慣于离开几何概念与經驗間的任何关系来研究几何学. 將純粹邏輯性的而且与在原則上不完全的經驗无关的东西分离出来是有好处的. 这样能使純粹的数学家滿意. 如果他能从公理正确地即沒有邏輯錯誤地推导出他的定理,他就滿足了. 至于欧几里得几何学究竟是否真确的問題,他是不关心的. 但是按我們的目的,就必須將几何学的基本概念和自然对象联系起来;沒有这样的联系,几何学对于物理学家是沒有价值的. 物理学家关心几何学定理究竟是否真确的問題. 从下述簡單的考虑可以看出: 根据这个观点,欧几里得几何学肯定了某些东西,这些东西不仅是從定义按邏輯推导来的結論.

空間里 n 个点之間有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个距离 $s_{\mu\nu}$; 在这些距离和 $3n$ 个坐标之間有关系式

$$s_{\mu\nu}^2 = (x_{1(\mu)} - x_{1(\nu)})^2 + (x_{2(\mu)} - x_{2(\nu)})^2 + \dots$$

从这 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个方程里可以消去 $3n$ 个坐标, 由这样的消去法, 至少会获得 $\frac{n(n-1)}{2} - 3n$ 个有关 $s_{\mu\nu}$ 的方程¹⁾. 因为 $s_{\mu\nu}$ 是可測度的量, 而根据定义, 它們是彼此无关的, 所以 $s_{\mu\nu}$ 之間的这些关系并非本来是必要的.

从前面显然知道, 变换方程(3)、(4)在欧几里得几何学里具有根本的意义, 在于这些方程决定着由一个笛卡儿坐标系到另一个的变换. 在笛卡儿坐标系里, 两点間可測度的距离 s 是用方程

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2$$

表示的, 这个性質表示着笛卡儿坐标系的特性.

如果 $K_{(x_\nu)}$ 与 $K'_{(x'_\nu)}$ 是两个笛卡儿坐标系, 則

$$\sum \Delta x_\nu^2 = \sum \Delta x'_\nu{}^2.$$

右边由于綫性正交变换的方程而恆等于左边, 右边和左边的区别只在于 x_ν 換成了 x'_ν . 这可以用这样的陈述来表示: $\sum \Delta x_\nu^2$ 对于綫性正交变换是不变量. 在欧几里得几何学里, 显然只有能用对于綫性正交变换的不变量表示的量才具有客觀意义, 而和笛卡儿坐标的特殊选择无关, 并且所有这样的量都是如此. 这就是有关处理不变量形式的定律的不变量理論对于解析几何学十分重要的理由.

考虑体积, 作为几何不变量的第二个例子. 这是用

$$V = \iiint dx_1 dx_2 dx_3$$

表示的. 根据雅可俾定理, 可以写出

$$\iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \iiint \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

1) 其实有 $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ 个方程.

其中最后积分里的被积函数是 x'_ν 对 x_ν 的函数行列式, 而由 (3), 这就等于代换系数 $b_{\nu\alpha}$ 的行列式 $|b_{\mu\nu}|$. 如果由方程 (4) 組成 $\delta_{\mu\alpha}$ 的行列式, 則根据行列式的乘法定理, 有

$$1 = |\delta_{\alpha\beta}| = \left| \sum_{\nu} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} \right| = |b_{\mu\nu}|^2; |b_{\mu\nu}| = \pm 1. \quad (6)$$

如果只限于具有行列式 $+1$ 的变换¹⁾(只有这类变换是由坐标系的連續变化而来的), 則 V 是不变量.

然而不变量并非是表示和笛卡儿系的特殊选择无关的唯一形式. 矢量与张量是其他的表示形式. 讓我們表示这样的事实: 具有流动坐标 x_ν 的点位于一条直綫上. 于是有

$$x_\nu - A_\nu = \lambda B_\nu \quad (\nu \text{ 由 } 1 \text{ 到 } 3).$$

可以令

$$\sum B_\nu^2 = 1,$$

而并不限制普遍性.

如果将方程乘以 $b_{\beta\nu}$ (比較 (3a) 与 (5)) 并对于所有的 ν 求和, 便得到

$$x'_\beta - A'_\beta = \lambda B'_\beta,$$

其中

$$B'_\beta = \sum_{\nu} b_{\beta\nu} B_\nu; A'_\beta = \sum_{\nu} b_{\beta\nu} A_\nu.$$

这些是参照第二个笛卡儿坐标系 K' 的直綫方程. 它們和参照原来坐标系的方程有相同的形式. 因此显然直綫具有和坐标系无关的意义. 就形式而論, 这有賴于一个事实, 即 $(x_\nu - A_\nu) - \lambda B_\nu$ 这些量变换得和間隔的分量 Δx_ν 一样. 設对于每个笛卡儿坐标系所确定的三个量象間隔的分量一样变换, 这三个量的总合便称为矢量. 如果矢量对于某一笛卡儿坐标系的三个分量都等于零, 則对于所有的坐标系的分量都会等于零, 因为变换方程是齐次性的. 于是可以不須倚靠几何表示法而获得矢量概念的意义. 直綫方程的这种性質可以这样表示: 直綫方程对于綫性正交变换是协变的.

1) 这样說来, 有两种笛卡儿系, 称为“右手”与“左手”系. 每个物理学家和工程师都熟悉两者之間的区别. 不能按几何学来規定这两种坐标系, 而只能作两者之間的对比, 注意到这一点是意味的.

現在要簡略地指出有些几何对象导致张量的概念. 設 P_0 为二次曲面的中心, P 为曲面上的任意点, 而 ξ_ν 为間隔 P_0P 在坐标軸上的投影. 于是曲面方程是

$$\sum a_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 1.$$

在这里以及类似的情况下, 我們要略去累加号, 并且了解求和是按出現两次的指标进行的. 这样就将曲面方程写成

$$a_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 1.$$

对于既定的中心位置和选定的笛卡儿坐标系, $a_{\mu\nu}$ 这些量完全决定曲面. 由 ξ_ν 对于綫性正交变换的已知变换律 (3a), 容易求得 $a_{\mu\nu}$ 的变换律¹⁾:

$$a'_{\sigma\tau} = b_{\sigma\mu} b_{\tau\nu} a_{\mu\nu}.$$

这个变换对于 $a_{\mu\nu}$ 是齐次的, 而且是一次的. 由于这样的变换, 这些 $a_{\mu\nu}$ 便称为二秩张量的分量(因为有两个指标, 所以說是二秩的). 如果张量对于任何一个笛卡儿坐标系的所有分量 $a_{\mu\nu}$ 等于零, 則对于其他任何笛卡儿系的所有分量也都等于零. 二次曲面的形状和位置是以 (a) 这个张量描述的.

可以定出高秩(指标个数較多的)张量的解析定义. 将矢量当作一秩张量, 并将不变量(标量)当作零秩张量, 这是可能和有益的. 在这一点上, 可以这样提出不变量理論的問題: 按照什么規律可从給定的张量組成新张量? 为了以后能够应用, 現在考虑这些規律. 首先只就同一参照空間里用綫性正交变换从一个笛卡儿系变换到另一个的情况来討論张量的性質. 由于这些規律完全和維数无关, 我們先不确定維数 n .

定义 設对象对于 n 維参照空間里的每个笛卡儿坐标系是用 n^α 个数 $A_{\mu\nu\rho\cdots}$ (α = 指标的个数) 規定的, 如果变换律是

$$A'_{\mu'\nu'\rho'\cdots} = b_{\mu'\mu} b_{\nu'\nu} b_{\rho'\rho} \cdots A_{\mu\nu\rho\cdots}, \quad (7)$$

則这些数就是 α 秩的张量的分量.

1) 根据(5), 方程 $a'_{\sigma\tau} \xi'_\sigma \xi'_\tau = 1$ 可以換成 $a'_{\sigma\tau} b_{\sigma\mu} b_{\tau\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 1$, 于是立即有上述結果.

附識 只要 $(B), (C), (D) \cdots$ 是矢量, 則由这个定义可知

$$A_{\mu\nu\rho\cdots} B_{\mu} C_{\nu} D_{\rho} \cdots \quad (8)$$

是不变量. 反之, 如果知道对于任意选择的 $(B), (C)$ 等矢量, (8) 式总能导致不变量, 則可推断 (A) 的张量特性.

加法与減法 将同秩的张量的相应分量相加和相減, 便得等秩的张量:

$$A_{\mu\nu\rho\cdots} \pm B_{\mu\nu\rho\cdots} = C_{\mu\nu\rho\cdots} \quad (9)$$

由上述张量的定义可得到証明.

乘法 将第一个张量的所有分量乘以第二个张量的所有分量, 就能从秩数为 α 的张量和秩数为 β 的张量得到秩数为 $\alpha + \beta$ 的张量:

$$T_{\mu\nu\rho\cdots\alpha\beta\gamma\cdots} = A_{\mu\nu\rho\cdots} B_{\alpha\beta\gamma\cdots} \quad (10)$$

降秩 令两个确定的指标彼此相等, 然后按这个单独的指标求和, 可从秩数为 α 的张量得到秩数为 $\alpha - 2$ 的张量:

$$T_{\rho\cdots} = A_{\mu\mu\rho\cdots} \left(= \sum_{\mu} A_{\mu\mu\rho\cdots} \right). \quad (11)$$

証明是

$$\begin{aligned} A'_{\mu\mu\rho\cdots} &= b_{\mu\alpha} b_{\mu\beta} b_{\rho\gamma} \cdots A_{\alpha\beta\gamma\cdots} = \delta_{\alpha\beta} b_{\rho\gamma} \cdots A_{\alpha\beta\gamma\cdots} = \\ &= b_{\rho\gamma} \cdots A_{\alpha\alpha\gamma\cdots}. \end{aligned}$$

除了这些初等的运算規則, 还有用微分法的张量形成法(扩充):

$$T_{\mu\nu\rho\cdots\alpha} = \frac{\partial A_{\mu\nu\rho\cdots}}{\partial x_{\alpha}}. \quad (12)$$

对于綫性正交变换, 可以按照这些运算規則由张量构成新的张量.

张量的对称性質 如果从互换张量的指标 μ 与 ν 所得到的两个分量彼此相等或相等而反号, 則这样的张量便称为对于这两个指标的对称或反称张量.

对称条件: $A_{\mu\nu\rho} = A_{\nu\mu\rho}$.

反称条件: $A_{\mu\nu\rho} = -A_{\nu\mu\rho}$.

定理 对称或反称特性的存在和坐标的选择无关, 其重要性就在于此. 由张量的定义方程可得到证明.

特殊张量.

I. 量 $\delta_{\rho\sigma}$ (4) 是张量的分量 (基本张量).

证明 如果在变换方程 $A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha}b_{\nu\beta}A_{\alpha\beta}$ 的右边用量 $\delta_{\alpha\beta}$ (它按 $\alpha=\beta$ 或 $\alpha\neq\beta$ 而等于 1 或 0) 代替 $A_{\alpha\beta}$, 便得

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha}b_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu}.$$

如果将 (4) 用于反代换 (5), 就显然会有最后等号的证明.

II. 有一个对于所有各对指标都是反称的张量 ($\delta_{\mu\nu\rho\cdots}$), 其秩数等于维数 n , 而其分量按照 $\mu\nu\rho\cdots$ 是 123... 的偶排列或奇排列而等于 +1 或 -1.

证明可借助于前面证明过的定理 $|b_{\rho\sigma}| = 1$.

这些少数的简单定理构成了从不变量理论建立相对论前物理学和狭义相对论的方程的工具.

我们看到: 在相对论前的物理学里, 为了确定空间关系, 需要参照物体或参照空间; 此外, 还需要笛卡儿坐标系. 设想笛卡儿坐标系是单位长的杆子所构成的立方构架, 就能将这两个概念融为一体. 这个构架的格子交点的坐标是整数. 由基本关系

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2, \quad (13)$$

可知这种空间格子的构杆都是单位长度. 为了确定时间关系, 还需要一只标准時計, 例如放在笛卡儿坐标系或参照构架的原点上. 如果在任何地点发生一个事件, 我们立即就能给它指定三个坐标 x_ν 和一个时间 t , 只要确定了在原点上的時計和该事件同时的时刻. 因此我们对于隔开事件的同时性就 (假设地) 给出了客观意义, 而先前只涉及个人对于两个经验的同时性. 这样确定的时间在一切情况下和坐标系在参照空间中的位置无关, 所以它是对于变换 (3) 的不变量.

我们假设表示相对论前物理学定律的方程组, 和欧几里得几何学的关系式一样, 对于变换 (3) 是协变的. 空间的各向同性与均

勻性就是这样表示的¹⁾，現在按这个观点来考虑几个較重要的物理方程。

质点的运动方程是

$$m \frac{d^2 x_v}{dt^2} = X_v, \quad (14)$$

(dx_v) 是矢量； dt 是不变量，所以 $\frac{1}{dt}$ 也是不变量；因此 $\left(\frac{dx_v}{dt}\right)$ 是矢量；同样可以証明 $\left(\frac{d^2 x_v}{dt^2}\right)$ 是矢量。一般地說，对時間取微商的运算不改变张量的特性。因为 m 是不变量（零秩张量），所以 $\left(m \frac{d^2 x_v}{dt^2}\right)$ 是矢量，或一秩张量（根据张量的乘法定理）。如果力 (X_v) 具有矢量特性，則差 $\left(m \frac{d^2 x_v}{dt^2} - X_v\right)$ 也是矢量。因此这些运动方程在参照空間的每个其他笛卡儿坐标系里也有效。在保守力的情况下，能够容易認識 (X_v) 的矢量性質，因为存在势能 Φ 只依赖于质点的相互距离，所以它是不变量。于是力 $X_v = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_v}$ 的矢量特性

便从关于零秩张量的导数的普遍定理得到証明。

乘以速度，它是一秩张量，得到张量方程

$$\left(m \frac{d^2 x_v}{dt^2} - X_v\right) \frac{dx_v}{dt} = 0.$$

降秩并乘以标量 dt ，我們获得动能方程

$$d\left(\frac{mq^2}{2}\right) = X_v dx_v.$$

如果 ξ_v 表示质点和空間固定点的坐标之差，則 ξ_v 具有矢量

1) 即使在空間有优越方向的情况下，也能将物理学的定律表示成对于变换(3)是协变的；但是这样的式子在这种情况下就不适宜了。如果在空間有优越的方向，則以一定方式按这个方向取坐标系的方向，会簡化对自然現象的描述。然而另一方面，如果在空間没有唯一的方向，則确定自然界定律的表示式而在方式上隱藏了取向不同的坐标系的等效性，是不合邏輯的。在狭义和广义相对論里，我們还要遇到这样的观点。