高等数学

上册

高等学校试用教材

高 等 数 学

上 册

天津大学数学教研室
《高等数学》编写组编

人 民 教 育 出 版 社

本书是编者根据1977年11月高等学校工科教材编写会议制定的编写大纲编写的．共分三册出版．主要内容，上册包括一元微积分与常微分方程；中册包括级数，矢量代数与空间解析几何，多元微积分；下册为线性代数初步与概率论初步．本书可作高等工科院校同名课程的试用教材或教学参考书。

高等学校试用教材

高等数学

上册

天津大学数学教研室

《高等数学》编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 17　字数 400,000

1979年11月第1版　1980年6月第1次印刷

印数　00,001—12,700

书号 13012·0400　定价 1.20 元

前　言

本书是依照1977年11月在西安召开的高等学校工科教材编写会议所制订的编写大纲编写的．根据与会多数同志的意见增编了线性代数与概率论初步两章，供不学《工程数学——线性代数》和《工程数学——概率论与数理统计》两书的专业选用．全书分为三册，总授课时数计划为270学时(其中线性代数与概率论为50学时)．预篇中的各节可供自学，如果须要讲授，建议不超过4学时．

书中在一节或一段之首标有“*”号的部分是供选学的内容，以适应不同专业的需要．书中的小字部分是大纲范围以外的内容，以备参考．

习题是本课程的有机的组成部分．在每一节之后列有本节的基本题，在每一章之后列有复习题作为补充练习．有一些复习题与专业知识有关，或难度较大，读者宜根据自己的情况选作．

本书由祝肇栋、林镇中、欧俊豪、寇述舜、高立仁诸同志执笔，并有曾绍标、王家生等同志参加编写．原稿曾经由伉铁健、周国才同志审阅．

本书承浙江大学主审，主审人是周茂清教授．参加审稿的有北京工业学院，东北工学院，哈尔滨工业大学，西北电讯工程学院，上海交通大学，华中工学院，广西大学，成都地质学院，西南交通大学等校．他们对原稿中的失误多所指正．在编写过程中我们还得到了许多兄弟院校的同志们热情的帮助．谨此一并致以深切的谢意！

限于我们的水平，书中的缺点和错误一定很多，我们恳切地希望同志们批评指正．

天津大学数学教研室《高等数学》编写组

1979年9月

目　　录

预　篇

在这一部分里我们只简略地叙述几项本课程所需的预备知识，它们大多是在中学已经学过的.

0.1 实　数

“数”这个概念最初是由于比较多少，进而进行统计或度量而逐渐产生的. 由数数就逐渐产生了 1,2,3,⋯ 这种正整数的概念，所以叫做**自然数**. 数又是和运算密切相关的. 首先是加法，随后是乘法. 两个自然数相乘或相加的结果还是自然数，而且还发现它们都遵守结合律和交换律，用一个自然数去乘两个自然数的和还遵守分配律. 有了加法和乘法也就有需要去考虑它们的逆运算. 但是两个自然数相除的结果往往不是自然数，这就产生了分数. 当然，一个自然数也可以看作是分母为 1 的分数. 两个正数相减的结果往往不是正数，于是产生了负数，以及作为正数与负数之间的中性数——零. 所谓**有理数**就是用一个不为零的整数去除一个整数所得的既约分数，零也是有理数. 对有理数进行加、减、乘、除(零不能作除数)的结果还是有理数，有理数作有限次自乘的幂还是有理数.

我们知道，一个真分数一定可以写成有尽小数或(不尽的)循环小数. 反之，一个有尽小数或循环小数必可化为真分数. 所以，有理数也就是整数、有尽小数和循环小数.

如果用直线段的长度作比喻，那么凡是可以与单位长度有公度的(可通约的)线段的长度就是一个正有理数.

但是，很多线段的长度是不能与单位长度通约的.

例如，边长为1的正方形的对角线的长度就不能表为单位长度的有理数倍．我们知道它的长度是$\sqrt{2}$（$\sqrt{2}$非有理数的证明见0.4第一段的例2）．这种数就叫做**无理数**．除了正数的开方根（还有负数的奇次方根）可以是无理数外还有非常多其它无理数．例如，圆周率π（$=3.14159\cdots$）和自然对数底e（$=2.71828\cdots$）．等都是无理数．

无理数不能表为整数之比，在用小数表示时必是不尽的非循环小数．反之，不尽的非循环小数是无理数．

有理数和无理数统称为**实数**．在定义了对于实数的运算之后就有了一个实数体系．实数对加法和乘法遵守交换律、结合律和分配律．本课程主要就在实数系内讨论．

我们常用**实数轴**上的点作为实数的几何表示(图象)．所谓实数轴就是一条指定了正向，于其上选定了原点O，并且规定了单位长度的有向直线．每一个实数都对应了实数轴上的一个点．负数对应的是在数轴上原点左侧(负侧)的点，正数对应的是在数轴上原点右侧(正侧)的点，而此点到原点的距离则等于这个实数的正值．零就对应着原点（图0-1）．反之，实数轴上每一个点都对应着这样的一个实数．因此我们说实数与实数轴上的点是一一对应的．实数在实数轴上对应的点叫做**实点**．有理数对应的是**有理点**，无理数对应的是**无理点**．因为实数与数轴上的点是一一对应的，所以本课程有时用“实数”，有时用“实点”，不再区分．

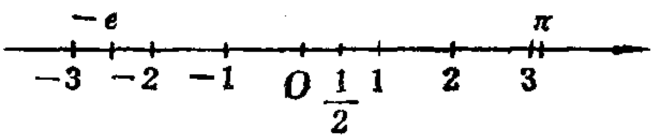

图 0-1

实数系有以下性质：

(1)**有序性**　即，任二实数a与b必能比较其大小：或是$a<b$，或是$a=b$，或是$a>b$，三者必居其一，且仅能有一种关系成立．

（2） **稠密性** 即，任二不同的实数 a 与 b 之间必有第三个不同的实数．例如，$\frac{a+b}{2}$就是一个．其实，仅就有理数系来说已经就是稠密的了．可以想像在数轴上一个无论多么小的线段里都密密麻麻地挤着无穷多个有理点，这就是稠密！

（3） **连续性** 我们承认直线是连续的，也就是说在数轴上任何两个不同点之间必被实点所充满，由于数轴上的点与实数一一对应，全体实数也就是连续的了．对比来看，有理数虽是稠密的，但是并不连续，因为任何两个不同的有理数之间必有非有理数（无理点）存在．如果只看有理数，它们之间总是有间隙的，而实数则不然，它们已经连通起来毫无间隙了．

0.2 集　　合

集合是数学的一个基础概念，我们认为已知而不再给定义．通常我们把作为一个整体看待的一些事物就叫做一个集合．例如，“正有理数”、“本书的附图”、“数轴上 0 与 1 之间的点”、“本校的男生”等等都是集合．组成集合的个体叫做这个集合的**元素**，或简称为**元**．所谓“给出了一个集合”就是任举一个所考虑的对象必可确定它是不是这个集合的元素．集合常用大写字母如 S, A, C, M, E 等等表示，元素就用小写字母如 a, b, c, x, t 等等表示．如果 a 是集合 S 的一个元素，就写为

$$a \in S$$

读作“a 属于 S”．a 不是集合 S 的元素就写为

$$a \overline{\in} S$$

读作“a 不属于 S”．例如，若以 A 代表“本校一年级男生”这个集合，那么 $a \in A$ 就是说 a 是本校一年级的男生．如果 E 代表“本校的女生”这个集合，那么 $b \overline{\in} E$ 就是说 b 不是本校的女生．

不含任何元素的集合叫做**空集合**．例如，“大于 3 的负数”就是一个空集合．空集合的记号是$\varnothing$．

集合有不同的给出方式．一个只包含 a, b, c 三个元素的集合就可以用花括号把元素都括起来作为一个整体表为$\{a, b, c\}$．可以想到，集合

$$\{2, 4, 6, 8, \cdots, 2n, \cdots\}$$

就是“所有的正偶数”．“$\cdots$”的意思是按照这个性质类推．

用元素 x 的共性 $P(x)$给出一集合的常用表示法是

$$\{x \mid P(x)\}$$

例如上面这个偶数集合就可以表为

$$S=\{x \mid x \text{ 是偶数，且 } x>0\} \text{ 或 } S=\{x \mid x=2n, n\in \boldsymbol{N}\},$$

意思是集合 S 是由一切这样的元素 x 组成的：每个 x 都是正的偶数．又例如

$$E=\{\text{点}(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

表示E是由平面上这样的点(x, y)所组成的：每个点或位于中心在原点的单位圆内或在圆周上．

须要说明的是空集$\varnothing$不可以表为$\{0\}$，因为$\{0\}$的意思是由“0”这一个单独元素构成的集合．如果要用这种方式表示，那就表为$\{\ \ \}$好了．

本课程里最常用的是一些数集．它们是

自然数集合 $\boldsymbol{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$，

整数集合 $\boldsymbol{Z}=\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$，

有理数集合 $\boldsymbol{Q}=\{r \mid r=\dfrac{p}{q}, q\neq 0 \text{ 且 } p \text{ 和 } q \text{ 是无公因子的整数}\}$，

以及

实数集合 $\boldsymbol{R}=\{x \mid x \text{ 是有理数或无理数}\}$．

以下列出几个有关于集合的定义．本课程里也用到一些它们的记号．

定义 已给两个集合 A 与 B．如果每一个 A 的元素都是 B 的元素，就称 A 是 B 的**子集**，记为

$$A\subset B$$

读作"B 包含 A"．

例如，$\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}$, $\{x\mid x=2n, n\in\boldsymbol{N}\}\subset\boldsymbol{N}$.

依此定义便应当认为 $A\subset A$.

须要补充的一点是，我们规定空集总是任何集合的子集：

$$\varnothing\subset A$$

定义 若集合 A 与集合 B 的元素完全相同，则称 A 与 B **相等**，记为

$$A=B$$

读作"A 等于 B"．

定义 由集合 A 的一切元素与集合 B 的一切元素所组成的集合叫做 A 与 B 的**并**，记为

$$A\cup B$$

即，

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

（见图 0-2）．

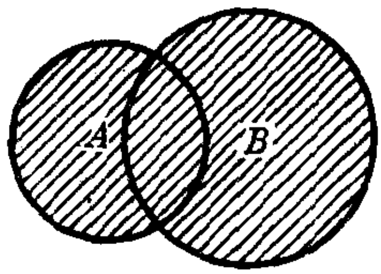

图 0-2

例如，$\boldsymbol{N}_0=\boldsymbol{N}\cup\{0\}=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$是一切非负的整数集合．易见

$$\{x\mid x=2n, n\in\boldsymbol{N}\}\cup\{x\mid x=2n-1, n\in\boldsymbol{N}\}=\boldsymbol{N}$$

及

$$\boldsymbol{Z}\cup\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}$$

又例如，若 A 是"本校一年级学生"，B 是"本校男生"，则 $A\cup B$ 就是"本校一年级女生与全校男生"．

定义 由属于集合A又属于集合B的一切元素组成的集合叫做A与B的**交**，记为

$$A\cap B$$

即

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

(见图 0-3).

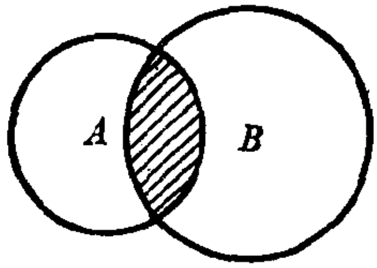

图 0-3

例如前例中，$A\cap B$ 就是"本校一年级男生". 又例如

$$\{x\,|\,x=2n,\ n\in\boldsymbol{N}\}\cap\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\boldsymbol{N}\}=\varnothing$$

$A\cap B=\varnothing$的意思就是集合A与集合B没有共同的元素，它们是不相交的.

定义 由属于集合A但不属于集合B的一切元素组成的集合叫做A与B的**差**，记为

$$A\setminus B$$

即

$$A\setminus B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

(见图 0-4).

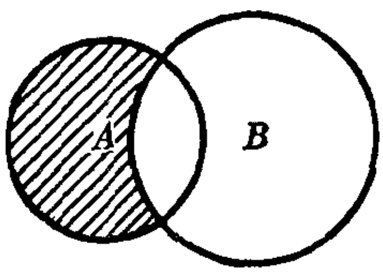

图 0-4

就前面"本校学生"那个例来说，$A\setminus B$ 就是"本校一年级女生". 又例如，$\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$就是全体不为 0 的实数. 这个集合也有时简写为$\boldsymbol{R}\setminus 0$.

习　题

1. 已给 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,4,6,8\}$. 试写出 $A\cup B$ 及 $A\cap B$；又 $B\setminus A=$？
2. 举一个空集的例子.

0.3 绝 对 值

a的绝对值，用$|a|$表示，它的定义是

$$|a|=\begin{cases}a, & 若\ a\geqslant 0;\\ -a, & 若 a<0.\end{cases}$$

这表明不为零的数 a 与其相反数 $-a$ 也有共性，那就是它们的绝对值相同，即 $|a|=|-a|$. 从几何上讲，a点与$-a$ 点到原点的距离相等，所以 a 点到原点的距离就等于 a 的绝对值(图 0-5). 显然永远有 $|a|\geqslant 0$, 这是绝对值的特性。

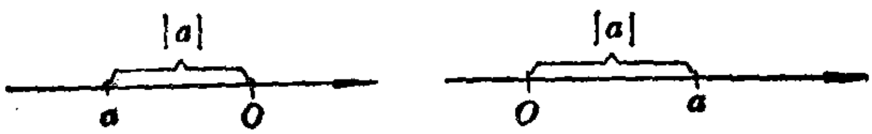

图 0-5

由定义可见

$$若\ a>0, 则\quad -|a|<a=|a|,$$
$$若\ a<0, 则\quad -|a|=a<|a|,$$
$$若\ a=0, 则\quad -|a|=a=|a|.$$

从以上分析的三种情况可见，当 $a\in \boldsymbol{R}$ 时

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a| \tag{0.1}$$

恒成立. 此处"$\leqslant$"是或者"$<$"成立，或者"$=$"成立，当然不会是"$<$"与"$=$"同时成立的意思。

关于绝对值和不等式有一个重要定理，就是若 ε 是一个正数，$\varepsilon\in \boldsymbol{R}_+=\{x\,|\,x\in \boldsymbol{R}$ 且$x>0\}$, 而 x 是一个实数，$x\in \boldsymbol{R}$, 则不等式

$$|x|<\varepsilon \tag{0.2}$$

与不等式

$$-\varepsilon<x<\varepsilon \tag{0.3}$$

等价，记为

$$|x|<\varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon<x<\varepsilon \tag{0.4}$$

这个等价性是很容易从图形上看出来的(见图 0-6).

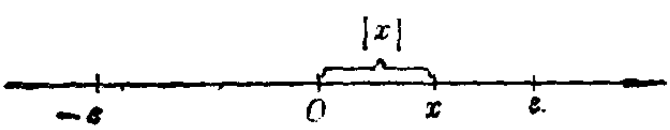

图 0-6

为了证明两式的等价性，先要注意一个关于不等式的定理：若 $a, b\in \boldsymbol{R}$，则$a<b$ 与$-a>-b$等价. 例如，$2<3$，同时就有$-2>-3$.

现在证明(0.4).

若 $x\geqslant 0$，则$|x|=x$. 于是(0.2)化为$x<\varepsilon$，而此时$-\varepsilon<x$是自然的. 故由(0.2)可得(0.3). 反之，(0.3)的右半部$x<\varepsilon$就是(0.2)所以由(0.3)又可得(0.2).

若 $x<0$，则$|x|=-x$. 于是(0.2)化为$-x<\varepsilon$，也就是$x>-\varepsilon$，而此时$x<\varepsilon$是自然的. 所以由(0.2)可得(0.3). 反之，由(0.3)的左部$-\varepsilon<x$可得$-x<\varepsilon$，即$|x|<\varepsilon$而得(0.2). 这就证明了(0.4).

已知，若$x=-\varepsilon$或$x=\varepsilon$都有$|x|=\varepsilon$. 所以得证不等式$|x|\leqslant\varepsilon$与不等式$-\varepsilon\leqslant x\leqslant\varepsilon$等价，记为

$$|x|\leqslant\varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon\leqslant x\leqslant\varepsilon \tag{0.5}$$

在本课程里还常用一组与(0.4)相似的等价不等式. 如果x_0是一个实数，δ是一个正数，x是实数，则不等式$|x-x_0|<\delta$与不等式$x_0-\delta<x<x_0+\delta$等价，记为

$$|x-x_0|<\delta \Longleftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta \tag{0.6}$$

这是因为由(0.4)可知$|x-x_0|<\delta$等价于$-\delta<x-x_0<\delta$，而这也就是$x_0-\delta<x<x_0+\delta$.

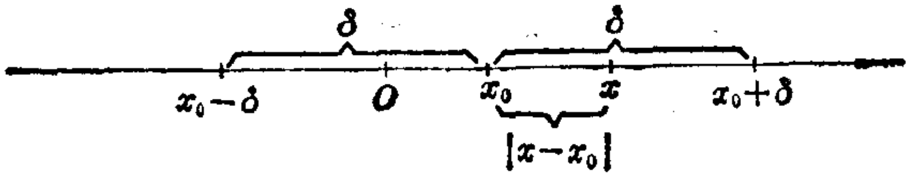

图 0-7

由图形(见图 0-7)可见，绝对值不等式

$$|x-x_0|<\delta$$

的几何意义就是x点介于$x_0-\delta$与$x_0+\delta$两点之间.

关于绝对值的运算有以下定理：