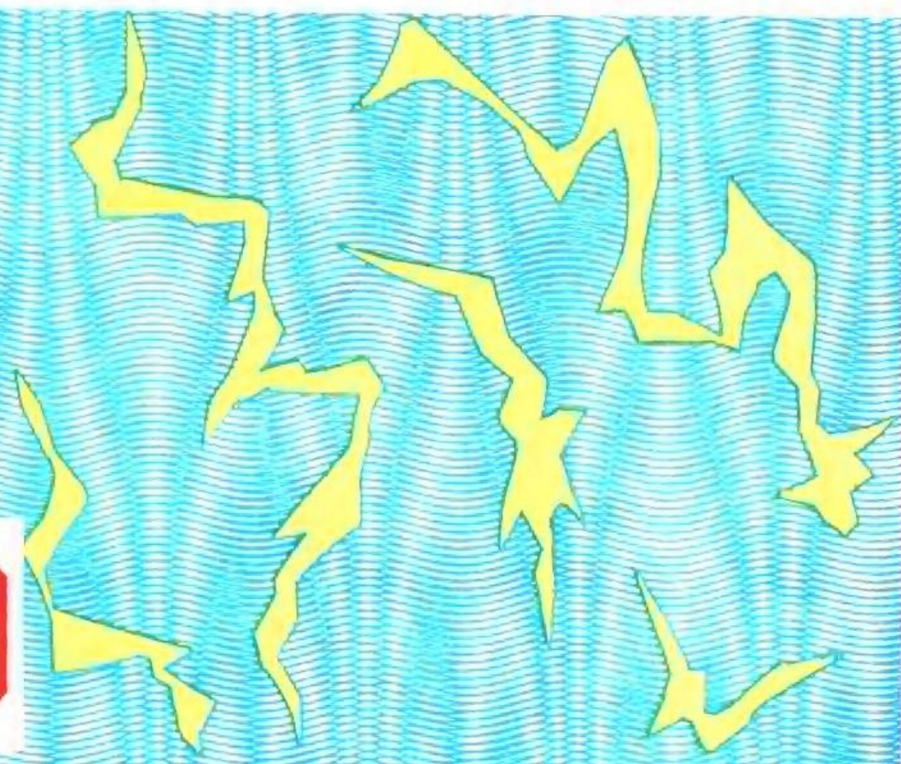


带电粒子束 的自场

罗应雄 编著



科学技术文献出版社

0189159

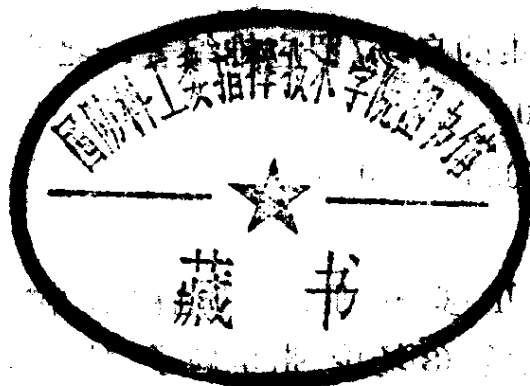


科工要字第802 2 0028497 3

带电粒子束的自场

罗应雄 编著

GF124/21



科学技术文献出版社

(京)新登字130号

内 容 简 介

本书全面讨论了带电粒子束在不同环境中产生的场。这种场反作用于带电粒子束，有有害的一面，也有可利用的一面。了解带电粒子束的自场，是研究各种束流不稳定性和设法改善束流品质必不可少的一步。全书共分六章：运动电荷的场的经典理论，空间电荷场，尾场，耦合阻抗，束流负载，束流崩溃。本书可供从事与带电粒子束有关的专业(加速器、电子束器件、粒子束武器等)人员参考。同时，全书贯穿了电动力学的具体应用，因此可作为高校师生在讲授和学习这门课时的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

带电粒子束的自场/罗应雄编著.-北京:科学技术文献出版社,1994.10

ISBN 7-5023-2150-0

I.带… II.罗… III.①带电粒子.粒子束-场论②粒子束:带电粒子-场论 ③场论-带电粒子.粒子束 IV.O572.2

科学技术文献出版社出版

(北京复兴路15号 邮政编码100038)

北京建外印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

1994年10月第1版 1994年10月第1次印刷

850×1168毫米 32开本 8.375印张 220千字

科技新书目:320—097 印数:1—1000册

定价:11.30元

前 言

近几十年来，加速器行业有了蓬勃发展。它在医疗、工业辐照、无损探伤、材料科学、核物理研究和高能物理研究等方面得到了广泛应用。迄今，全世界各类加速器的拥有量不下3000台，能量从几十keV到几十GeV。单从加速器的能量来看，平均每十年增加一个数量级。

单粒子理论（或称零流理论）曾经是而且仍然是设计各类加速器的有力工具。近年来，应用方面对带电粒子束的品质要求越来越高。例如，用于自由电子激光的加速器和直线对撞机都对束流的发射度和能散度提出了极高的要求。在这种情况下，带电粒子之间的相互作用以及带电粒子与环境的相互作用就不能忽略了。这些相互作用严重影响带电粒子束的品质，深入研究实属必要。

什么叫束，我们不打算在这里下一个严格的定义。本书谈到的束，指的是一大群近轴粒子（近轴假设），它们大体上平行于轴线运动。轴线可以是直的，也可以是弯的。束中粒子的运动，既依赖于外场，又依赖于束中其它粒子产生的场。

本书定名为《带电粒子束的自场》，是相对于外加电磁场而言的。带电粒子束在外加电磁场作用下的运动，已有许多专门论著。有关加速器、电子显微镜、质谱仪、各种微波放大管以及更一般的有关电子光学方面的论著，就是典型的例子。本书只讨论带电粒子束的自场，说得确切些，是带电粒子束在特定环境下产生的场。下面我们将看到，带电粒子束产生的场的形态，与环境密不可分。这是因为，由于环境的差异，束流感应的电荷分布将有差异。

第一章介绍运动电荷产生的场的经典理论，它是以后各章的预备知识。第二章论述的是空间电荷场，这方面的理论已经比较成熟

而且为大家所熟悉。作者只扼要地概述一下某些结论，并系统地介绍各种模型的计算公式，便于读者应用。在该章的最后，介绍了两种自洽分布与自洽解，目的在于给理论工作者一些启发。第三章是本书的重点。作者介绍了国际上有关束流尾场方面的最新研究成果。尾场是束流品质变坏的祸根，又是一种很有希望的新加速器原理。尾场的理论还不完善，尚有许多问题留待后人去解决。第四章的内容是耦合阻抗，是从另一个角度来论述尾场效应。在某些特定条件下，束流通过的结构耦合阻抗是可以测量出来的。测量结果可用来对理论进行检验。第五章的内容是大家熟知的束流负载效应。第六章阐述了束流崩溃的机制和某些结论。束流崩溃是束流不稳定性中最重要的一种。

空间电荷效应和束流负载效应是最早被研究的现象，已经研究得比较深透。本世纪60年代，发现了束流崩溃现象，科学家们通过大量的实验和理论计算搞清楚了这种现象的规律。到80年代，科学研究需要用到高密度高质量带电粒子束团，于是，尾场效应成为突出的问题。一批加速器科学家对尾场进行了深入的研究，取得了卓著的成果，但仍然有一些问题令人迷惑不解。

以上这些研究是在不同的时期进行的，理论阐述冗长而且分散。作者力图把空间电荷场、尾场、束流负载、束流崩溃等现象统一在一个理论框架中，并阐明它们之间的联系。但由于现实的图像太复杂，在这里只能开个头而已。

如果把有时间结构的带电粒子束流在特定环境下产生的场作Fourier分析，各种模式的场就会一目了然。直流部分对应于空间电荷场，交流部分就是第三章到第六章所讨论的对象。

束流所处环境在这里指的是束流通过的结构。即使是很简单的结构，束流产生的场一般都极为复杂。除了少数简单的、理想化的情况可得到简明的表达式以外，绝大多数情况下都只能得到近似解，或者只能用无穷级数之和或积分来表达。因此，借助于大型计算机进行大量计算是必不可少的。有时，还必须通过实验来修正理论。

本书不讨论有关粒子的碰撞问题。全书一律采用MKSA有理单位制。

作者

1993年3月于中国科学院高能物理研究所

目 录

| | |
|-------------------------------------|--------|
| 前言 | (v) |
| 第一章 运动电荷的场的经典理论 | (1) |
| §1.1 基本关系 | (1) |
| §1.2 自由空间中运动点电荷的场 | (2) |
| §1.3 理想导体管道内运动电荷的场 | (9) |
| 第二章 空间电荷场 | (15) |
| §2.1 概述 | (15) |
| §2.2 无限长椭圆柱模型 | (19) |
| §2.3 有限长圆柱模型 | (23) |
| §2.4 均匀分布的椭球模型 | (27) |
| §2.5 圆盘模型 | (31) |
| §2.6 圆环模型 | (34) |
| §2.7 宏粒子模型 | (36) |
| §2.8 无外场时束流的膨胀 | (40) |
| §2.9 空间电荷限制流 | (44) |
| §2.10 一维束流自洽分布 | (49) |
| §2.11 二维自洽分布与K-V方程 | (58) |
| 第三章 尾场 | (66) |
| §3.1 概述 | (66) |
| §3.2 尾场的定义 | (70) |
| §3.3 电阻壁管道中运动电荷的电磁场, $m = 0$ 的情形 | (75) |
| §3.4 电阻壁管道中运动电荷的电磁场, $m \geq 1$ 的情形 | (80) |
| §3.5 电阻壁管道中的尾势 | (83) |
| §3.6 腔体中的纵向尾势 | (89) |

| | | |
|------------|-------------------------|---------|
| §3.7 | 腔体中的横向尾势 | (99) |
| §3.8 | 盒形腔中束团的尾势 | (104) |
| §3.9 | 无限长周期结构中的尾势 | (111) |
| §3.10 | 不连续同轴管中的电磁场 | (117) |
| §3.11 | 环形腔中的电磁场 | (126) |
| §3.12 | 非 δ 函数电荷的纵向尾场的特性 | (133) |
| §3.13 | 尾场加速器 | (138) |
| 第四章 | 耦合阻抗 | (145) |
| §4.1 | 概述 | (145) |
| §4.2 | 阻抗与损耗因子的关系 | (151) |
| §4.3 | 阻抗的若干特性 | (153) |
| §4.4 | 电阻壁管道的阻抗 | (162) |
| §4.5 | 窄带阻抗的一般求法 | (164) |
| §4.6 | 其它几种典型结构的阻抗 | (174) |
| §4.7 | 高频阻抗的一般求法 | (184) |
| §4.8 | 用衍射模型求高频阻抗 | (199) |
| 第五章 | 束流负载 | (211) |
| §5.1 | 引言 | (211) |
| §5.2 | 稳态束流负载 | (213) |
| §5.3 | 点电荷与其辐射场的相位关系 | (216) |
| §5.4 | 束流负载和尾场的关系 | (219) |
| §5.5 | 束流负载引起的相位滑移 | (220) |
| §5.6 | 瞬态束流负载 | (222) |
| §5.7 | 束流负载的衍射模型 | (230) |
| 第六章 | 束流崩溃 | (234) |
| §6.1 | 引言 | (234) |
| §6.2 | 回授型束流崩溃 | (236) |
| §6.3 | 积累型束流崩溃 | (242) |
| §6.4 | 单束团束流崩溃, 二粒子模型 | (249) |

| | |
|------------------------|---------|
| §6.5 提高束流崩溃阈电流的措施..... | (252) |
| 参考文献..... | (253) |

第一章 运动电荷的场的经典理论

§1.1 基本关系

在相对论力学中，粒子质量 m 与其运动速度有关。假如粒子的静止质量为 m_0 ，当它以速度 v 运动时，质量就变成

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0\gamma. \quad (1.1.1)$$

其中， $\beta = v/c$ ， c 是光速。 γ 称为相对论因子。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (1.1.2)$$

在相对论力学中，粒子动量的表示式为

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m_0\gamma\mathbf{v}. \quad (1.1.3)$$

动量的大小即为

$$p = m_0\gamma v = m_0c\beta\gamma. \quad (1.1.4)$$

粒子的总能量 ϵ 与粒子动量 p 之间的关系由下式表示：

$$\epsilon^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2. \quad (1.1.5)$$

m_0c^2 称为粒子的静止能量。由(1.1.2)式和(1.1.5)式不难推出

$$\gamma = \frac{\epsilon}{m_0c^2}. \quad (1.1.6)$$

γ 也可看成是粒子的总能量（以静止能量 m_0c^2 为单位）。显然，粒子的动能是

$$U = \epsilon - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2. \quad (1.1.7)$$

由(1.1.2)式还可得到

$$\beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}, \quad (1.1.8)$$

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{1}{\beta\gamma^3}. \quad (1.1.9)$$

(1.1.8)式和(1.1.9)式告诉我们,当粒子能量很高时,其速度将趋近光速。而当粒子速度接近光速时,能量变化引起的速度变化是极微小的。

本书从头至尾,都用符号 β , γ 代表带电粒子的速度和能量。

本书多处用到Fourier变换。现引述如下以备查。

设函数 $f(t)$ 满足:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \text{ 存在,}$$

(2) $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内分段光滑,则下两式存在:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = F(\omega), \quad (1.1.10)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t). \quad (1.1.11)$$

此时,称 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的Fourier变换,称 $f(t)$ 为 $F(\omega)$ 的反Fourier变换。

若令

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\omega),$$

则Fourier变换可写成更对称的形式

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.1.12)$$

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.1.13)$$

§1.2 自由空间中运动点电荷的场

在经典理论中,点电荷是一个线度趋于零的带电体。如果认为它只作平动而无转动,就不用考虑它的磁矩。这样,点电荷的运动

状态可用 R 和 v 来描述。 R 是点电荷的坐标， v 是其速度。

设点电荷的电量为 Q ，则电荷密度 ρ 和电流密度 J 可用以下两式表示：

$$\rho = Q\delta(R - r) \quad (1.2.1)$$

$$J = Qv\delta(R - r) \quad (1.2.2)$$

其中， δ 是 δ 函数， $R(X, Y, Z)$ 是点电荷的坐标， $r(x, y, z)$ 是观察点的坐标， $v = dR/dt$ ，如图1.2.1所示。点电荷所产生的电磁场可由推迟势公式求出^[1]。首先写出标量势 ϕ 和矢量势 A 。

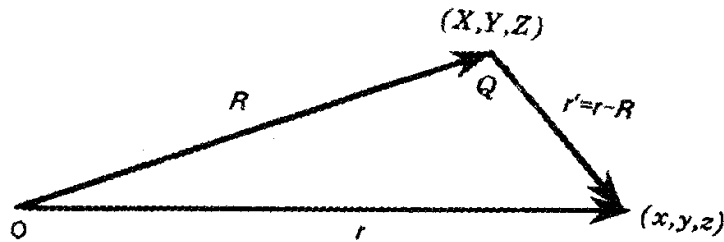


图1.2.1 点电荷的位置矢

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(R, t - \frac{r'}{c})}{r'} dX dY dZ \quad (1.2.3)$$

$$A(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J(R, t - \frac{r'}{c})}{r'} dX dY dZ. \quad (1.2.4)$$

其中， ϵ_0 是真空介电常数，其值为 8.85×10^{-12} 库²/牛·米²； μ_0 是真空磁导率，其值为 $4\pi \times 10^{-7}$ 牛/安²。 c 是光速。 $r' = r - R$ 是源点到观察点的矢径，故有

$$r' = \left[(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.2.5)$$

把(1.2.1)和(1.2.2)式代入(1.2.3)和(1.2.4)式，得到

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\delta[R - r(t - \frac{r'}{c})]}{r'} dX dY dZ, \quad (1.2.6)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{v}(t - \frac{r'}{c}) \delta[R - r(t - \frac{r'}{c})]}{r'} dX dY dZ. \quad (1.2.7)$$

由于被积函数是 $[R - r(t - \frac{r'}{c})]$ 的函数，而积分变量是 X, Y, Z ，需要通过某种变换把它们统一起来。引入

$$\xi = X - x \left\{ t - \frac{1}{c} [(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]^{1/2} \right\},$$

$$\eta = Y - y \left\{ t - \frac{1}{c} [(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]^{1/2} \right\},$$

$$\zeta = Z - z \left\{ t - \frac{1}{c} [(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]^{1/2} \right\}.$$

则有

$$\delta \left[R - r \left(t - \frac{r'}{c} \right) \right] = \delta(\xi, \eta, \zeta),$$

$$dX dY dZ = \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta.$$

不难求出

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(X, Y, Z)} = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'}{cr'}.$$

因而有

$$dX dY dZ = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'}{cr'}} d\xi d\eta d\zeta. \quad (1.2.8)$$

将(1.2.8)式代入(1.2.6)和(1.2.7)式中，可得到

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\left[r'(t') - \frac{\mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{r}'(t')}{c} \right]}, \quad (1.2.9)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{v}(t')}{\left[r'(t') - \frac{\mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{r}'(t')}{c} \right]} \quad (1.2.10)$$

其中,

$$t' = t - \frac{r'}{c} \quad (1.2.11)$$

是推迟时间。(1.2.9)和(1.2.10)式就是Lienard-Weichert势。其物理意义是,空间某一观察点于 t 时刻的场值,不由 t 时刻而由 t' 时刻点电荷的位置和速度所决定。

有了 ϕ 和 \mathbf{A} ,就可通过下式求出电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad (1.2.12)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.2.13)$$

但要注意,(1.2.9)和(1.2.10)式右边是 t' 的函数,而(1.2.12)

和(1.2.13)式是对观察点的空时坐标求偏导,因此必须把 ∇ 和 $\frac{\partial}{\partial t}$

分别变换成 $\nabla'_{t'}$ 和 $\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)_r$ 来表示。其中 $\nabla'_{t'}$ 表示当 t' 为常数时

对观察点坐标求偏导, $\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)_r$ 表示 r 不变时对 t' 求偏导。

由(1.2.11)式得到

$$r'(t') = c(t - t'),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} r'(t') = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) = \frac{\partial r'(t')}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r'(t')}{\partial t'} &= \frac{d}{dt'} r'(t') = \nabla' [r'(t')] \cdot \frac{d\mathbf{R}(t')}{dt'} \\ &= -\frac{\mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{r}'(t')}{r'}. \end{aligned}$$

由此得到

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{r}'(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{cr'(t')}} = \frac{r'(t')}{K(t')}.$$

其中,

$$K(t') = r'(t') - \frac{\mathbf{r}'(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c}. \quad (1.2.14)$$

最后得到变换关系为

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{r'(t')}{K(t')} \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (1.2.15)$$

用类似的方法, 可得到 ∇ 和 $\nabla_{t'}$ 之间的变换关系如下:

$$\nabla = \nabla_1 - \frac{r'(t')}{K(t')c} \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (1.2.16)$$

其中, ∇_1 表示当 t' 为常数时对 $r'(t')$ 的第一宗量(即 x, y, z)求偏导数。有了(1.2.15)和(1.2.16)式, 即可求得电场和磁场。

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{K^3} (1 - \beta^2) (\mathbf{r}' - r' \boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{K^3 c^2} (\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\alpha}) (\mathbf{r}' - r' \boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{K^2 c^2} r' \boldsymbol{\alpha} \right], \quad (1.2.17)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q c}{4\pi} \left[\frac{1}{K^3} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}') (1 - \beta^2) + \frac{1}{K^3 c^2} (\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\alpha}) (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}') + \frac{1}{K^2 c^2} (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}') \right]. \quad (1.2.18)$$

其中, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, $\boldsymbol{\alpha}$ 是加速度。由(1.2.17)和(1.2.18)式不难看出, \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 存在如下关系:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}'}{cr'} \times \mathbf{E}. \quad (1.2.19)$$

即磁感应强度 \mathbf{B} 总是垂直于 \mathbf{E} 也垂直于 \mathbf{r}' 。而且, \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 仅与 t' 时刻点

电荷的位置、速度、加速度有关。在导出 (1.2.19) 式时, 已经认定有如下关系式:

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2 \quad (1.2.20)$$

电场和磁场都可分解成两部分。一部分与电荷速度 β 有关, 另一部分与电荷的加速度 α 有关。与速度有关的部分正比于 $1/r'^2$, 与加速度有关的部分正比于 $1/r'$ 。在对 Poynting 向量进行面积分后可得出结论: 在自由空间, 匀速运动的带电粒子不能辐射能量, 只有加速运动的带电粒子才能辐射能量。这是容易理解的。因为当带电粒子作匀速运动时, 我们总是可以找到一个惯性坐标系, 使粒子在该坐标系中为相对静止。显然, 静止的带电粒子不能辐射能量。

当 \mathbf{v} 为常矢量时, $\alpha = 0$, 这时有

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{K^3} (1 - \beta^2) (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'\beta) \right]. \quad (1.2.21)$$

令

$$\rho_t = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'\beta),$$

(1.2.21) 式可改写成

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2) \rho_t}{[(1 - \beta^2) \rho_t^2 + (\rho_t \cdot \beta)^2]^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2) \rho_t}{\rho_t^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2}}. \quad (1.2.22)$$

其意义可用图 1.2.2 来说明。在时刻 t' , 电荷在 A 点, 到观察点的矢径为 \mathbf{r}' ; 在时刻 t , 电荷到达 B 点, 到观察点的瞬时矢径为 ρ_t 。 $AB = v(t - t') = \mathbf{r}'\beta$, P 点的场完全决定于电荷在 A 点时的速度和加速度, 但电场的方向却取 ρ_t 的方向, 即电场的方向取电荷的瞬时位置到观察点的矢径方向。

同理可得到

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \rho_t (1 - \beta^2)}{\rho_t^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2}}. \quad (1.2.23)$$

从 (1.2.22) 和 (1.2.23) 式还可以得出结论: 当 $\beta \rightarrow 1$ 时, 只有在 $\psi = 90^\circ$ 附近才有电磁场。因为分母中的 $\sin \psi$ 必须趋于 1, 场才不

为零。可以证明，空间中存在电磁场的区域对点电荷的张角正比于 $1/\gamma$ 。当 γ 很大时，电磁场几乎都集中在垂直于电荷前进方向的平面上，如图1.2.3的样子。

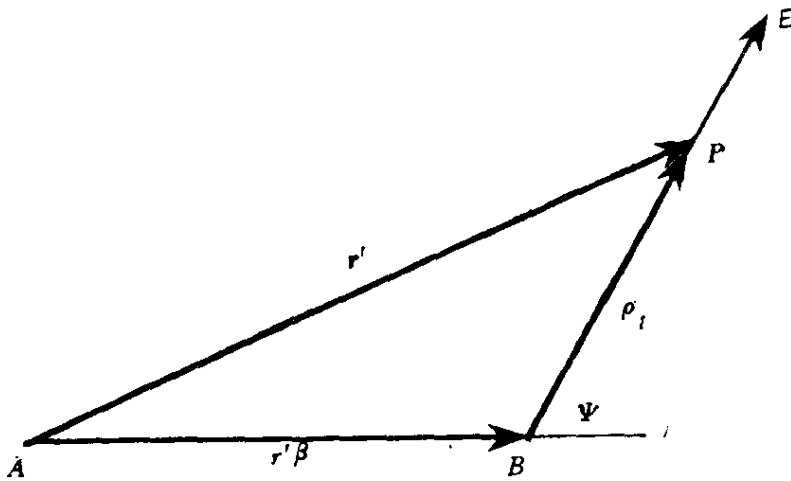


图1.2.2 点电荷的电场与瞬时矢径的关系

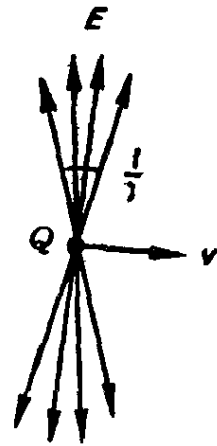


图1.2.3 自由空间高速带电粒子的电场形状

把电场分解成平行于运动方向和垂直于运动方向的两部分，得到

$$E_{//} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\rho^2t\gamma^2}, \quad (1.2.24)$$

$$E_{\perp} = \frac{Q\gamma}{4\pi\epsilon_0\rho^2t}. \quad (1.2.25)$$

再一次看到，电场沿速度方向收缩，场的大小与瞬时矢径的模的平方成反比。图1.2.4是原来静止于 $Z = 0$ 的点电荷在 $t = 0$ 时突然被加速，随后以恒速运动的电场分布^[2]，磁场可根据(1.2.19)式得出。

若有两个电荷各为 Q 的带电粒子并排前进，速度都是 v ，径向距离为 r ， $\psi = 90^\circ$ ，则它们之间的作用力为

$$F_r = Q(E_r - vB_\theta), \quad (1.2.26)$$

把(1.2.25)和(1.2.23)式代入上式，得到