数学规划与优化设计

魏权龄　王日爽　徐　兵　汪家芸　白文林
编　著

国防工业出版社

内容简介

本书系统地介绍了线性规划与非线性规划（包括多目标决策问题）的理论、方法和应用，并给出主要性质、定理、定义和相互关系。全书共分五部分：第一部分为数学规划的一般性概念和预备知识；第二部分主要介绍线性规划的基本理论和方法；第三部分讨论非线性规划问题的理论和方法；第四部分介绍多目标数学规划；第五部分是最优化方法在工程设计中的应用。书中注意几何直观解释，并选入一定的例题和习题以供读者参考。

本书可供从事机械、建筑、电子、化学、航空与宇航等方面工作的工程技术人员、经济管理人员和军事技术人员学习使用，也可作为大专院校有关专业学生和研究生的教科书或参考书。

数学规划与优化设计

魏权龄　王日爽　徐　兵　汪家芸　白文林

编　著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$850\times1168^{1}/_{32}$　印张$20^{7}/_{8}$　553千字

1984年8月第一版　1984年8月第一次印刷　印数：00,001—10,500册

统一书号：15034·2661　　定价：4.20元

前　言

数学规划是在电子计算机出现以后，由于科学技术的发展和大量社会实践的需要而迅速发展起来的一门新兴学科。在许多部门，诸如建筑工程、船舶设计、航空与宇航、化学工程、电子科学、动力装置等许多工程设计和生产管理方面，数学规划得到了日益广泛的应用。它已深深地吸引了众多的工程师、经济学者、管理人员和军事专家，引起了他们的极大兴趣，并应用在各自的生产实践中。

我们编写本书的目的在于，向各行各业的工程技术人员、管理干部介绍数学规划与优化设计的理论和方法。同时为他们提供一些实用的方法以便用于各自的工作之中；也为了一些大专院校高年级学生、研究生学习之用。本书是将教学和培训科技人员所用的教材加以整理和充实而成，并附有习题和例题。

本书大致分为五部分：

第一部分（1～4章）数学规划的一般性概念和预备知识；

第二部分（5～6章）线性规划的基本理论和方法；

第三部分（7～16章）非线性规划问题的有关定理及解题方法；

第四部分（17章）多目标数学规划；

第五部分（18～22章）数学规划在飞行器设计中的应用。

由于水平有限，书中定有缺点错误，望读者批评指正。

书中包括了另外一些同志提供的资料，在此我们表示深切谢意。

一九八二年五月

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

符号说明

$\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$——$n$ 维行向量（或点）

$\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$——$n$ 维列向量（或点）

x_i——n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量

$(x_i)^2$——x_i 的平方

$\boldsymbol{x}^2$——向量 $\boldsymbol{x}$ 的第二点 $\boldsymbol{x}^2=[x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2]$

x_i^2——向量 $\boldsymbol{x}^2$ 的第 i 个分量

$\mathbf{0}$——零向量（行向量或列向量）

$\boldsymbol{x}>\boldsymbol{y}$——$\boldsymbol{x}$ 的每个分量都大于 $\boldsymbol{y}$ 的相应分量

α，α_i——实数

$[\alpha, \beta]$——闭区间 $\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta$

(α, β)——开区间 $\alpha<\xi<\beta$

$S=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}$ 所满足的性质$\}$——满足某种性质的 $\boldsymbol{x}$ 的全体（集合）

$S=\{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^n\}$——由 $\boldsymbol{x}^1$、$\boldsymbol{x}^2$、…、$\boldsymbol{x}^n$ 组成的有限集合

ϕ——空集

E_n——n 维欧氏空间

$\boldsymbol{x}\in S$——$\boldsymbol{x}$ 属于集合 S

$\boldsymbol{x}\notin S$——$\boldsymbol{x}$ 不属于集合 S

$X\cup Y$——X 与 Y 之并集合

$X\cap Y$——X 与 Y 之交集合

$X\setminus Y$——X 与 Y 之余集合

$X\subseteq Y$——Y 包含 X

$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(x_1)^2+\cdots+(x_n)^2}$——$\boldsymbol{x}$ 的欧氏模（范数或距离）

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\|=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}$——$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^0$ 之间的距离

$N_\varepsilon(\boldsymbol{x}^0)=\{\boldsymbol{x}\,|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\|<\varepsilon\}$——以 $\boldsymbol{x}^0$ 为中心，ε 为半径的邻域

$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$——二个 n 维向量的内积

$\mathrm{cl}(X)$——X的闭包

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$——$m\times n$ 矩阵

A^T——矩阵 A 的转置

A^{-1}——满秩方阵 A 的逆矩阵

$|A|=\det A$——方阵 A 的行列式

R——可行解集合

R^*——最优解集合

$f(\boldsymbol{x})$——向量 $\boldsymbol{x}$ 的函数（或 n 元函数）

$$f_x(\boldsymbol{x})=\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right]$$——$f(\boldsymbol{x})$ 的梯度（行向量）

$$\varphi_u(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u})=\left[\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u})}{\partial u_1},\ \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u})}{\partial u_2},\ \cdots,\ \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial u_n}\right]^T$$

——$\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u})$ 对 $\boldsymbol{u}$ 的偏导列向量

$$f_{xx}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n\partial x_n}\end{pmatrix}$$

——$f(\boldsymbol{x})$ 的 Hesse 矩阵

$$\frac{\partial(y_1,\ \cdots,\ y_n)}{\partial(x_1,\ \cdots,\ x_n)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$——Jacobi 矩阵

$\min(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$——数 α_1、α_2、…、α_s 中最小者

$\max(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$——数 α_1、α_2、…、α_s 中最大者

$\min\limits_{x \in R} f(x)$——$f(x)$ 在 R 上的最小值

$\max\limits_{x \in R} f(x)$——$f(x)$ 在 R 上的最大值

$\inf\limits_{x \in X} f(x)$——$f(x)$ 在 X 上的下确界

$\sup\limits_{x \in X} f(x)$——$f(x)$ 在 X 上的上确界

$x_{\min}$——最优（最小）解(点)

$f_{\min}$——目标函数的最优（最小）值

上述符号主要针对前 17 章，第 18 章以后采用专业上的习惯符号。

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章　数学规划问题的一般描述

数学规划（在本书中包括线性规划与非线性规划）是属于最优化理论的一个重要分支。早在1939年苏联的康托洛维奇（Л. В. Канторович）和美国的希奇柯克（F. L. Hitchcock）等人就在生产组织管理和制定交通运输方案方面首先研究和应用了线性规划方法。1947年旦茨基（G. B. Dantzig）等人提出了求解线性规划问题的单纯形方法，始为线性规划的理论与计算奠定了基础。非线性规划的基础性工作则是在1951年由库恩（H. W. Kuhn）和塔克（A. W. Tucker）等人完成的。到了七十年代，数学规划无论是在理论上和方法上，还是在应用的深度和广度上都得到了进一步的发展。

数学规划理论和方法的发展，始终是伴随着它的广泛应用不断臻善的，这就不能不提到它的应用领域。在工程、经济、商业、管理乃至一些基础科学中（如物理、化学等）都会涉及到数学规划的模型、理论和方法。

我国自1956年以来已开始有人从事线性规划和非线性规划的理论、方法及应用方面的研究工作。特别是近几年来，从事这方面工作的人员与日俱增。同时也促进了本学科的发展。更值得一提的是，为数不少的高等院校都已开设了数学规划或与之有关的课程，大量的人才和成果不断涌现。

数学规划的理论与方法在设计领域中的应用（即通常所说的"优化设计"），近几年来也得到很大发展。很多产品的设计由开始的仿制发展到目前的自行设计，并提出更高、更精的要求，使得我们不得不采用先进的设计方法和使用快速的电子计算机。数学规划的发展及快速电子计算机广泛的使用为设计部门应用最优（佳）设计提供了有利的先决条件。目前，在建筑、机械、电子、

化工、光学以及飞行器设计等部门都在不同程度上应用着最优设计方法。为了进一步使读者了解数学规划的实际内容和意义，我们在本章中将介绍数学规划的几个例子及其模型；并引进有关的定义和概念，以备以后各章的需要。

§1.1 数学规划的几个例子

设$f(x_1, \cdots, x_n)$、$g_1(x_1, \cdots, x_n)$、…、$g_m(x_1, \cdots, x_n)$、$h_1(x_1, \cdots, x_n)$、…、$h_p(x_1, \cdots, x_n)$都是n个变量x_1、…、x_n的实值函数。数学规划问题就是对某一性能指标$f(x_1, \cdots, x_n)$求最小（或最大），其中变量x_1、…、x_n应满足由函数$g_i(x_1, \cdots, x_n)$（$i=1$、…、m）、$h_j(x_1, \cdots, x_n)$（$j=1$、…、p）的不等式和等式所限定的条件，写成数学表达式，即求x_1、…、x_n，使得$f(x_1, \cdots, x_n)$达到最小值，记为

$$\min f(x_1, \cdots, x_n)$$

而且还要求满足限定的条件

$$g_i(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0, \quad i=1、\cdots、m$$
$$h_j(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad j=1、\cdots、p$$

我们称$f(x_1, \cdots, x_n)$为**目标函数**；称$g_i(x_1, \cdots, x_n)$（$i=1$、…、m）、$h_j(x_1, \cdots, x_n)$（$j=1$、…、p）为**约束函数**；称

$$\begin{cases} g_i(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0, & i=1、\cdots、m \\ h_j(x_1, \cdots, x_n) = 0, & j=1、\cdots、p \end{cases}$$

为**约束条件**；又称满足约束条件的一组变量值x_1、…、x_n为问题的**可行解**。如果目标函数及约束函数都为线性函数，则称其为**线性规划**；如果目标函数或约束函数中至少有一个函数是关于x_1、…、x_n的非线性函数时，就称其为**非线性规划**。

下面给出几个具体例子。

例 1 飞行器结构设计的最佳化

飞行器结构（如机翼、机身等）实际上是极为复杂的，为了便于进行理论设计和分析，我们总是对它进行简化，抽象成为可

计算的模型。从而可以把一个复杂的结构看成是由许多小的钣、杆元件组合而成，这就是所谓的结构离散化。例如，离散化后的机身、机翼情况如图 1-1 所示。

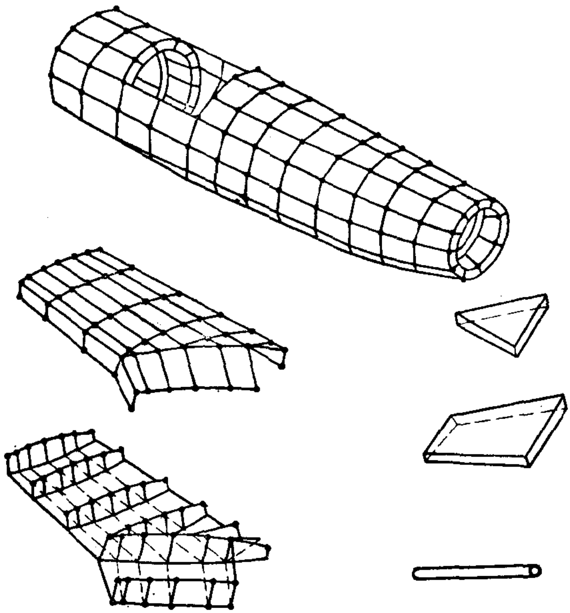

图 1-1

结构设计最佳化是求一组变量（在设计中称为设计变量）x_1、…、x_n（如钣的厚度和杆的截面积等）使得目标函数（如结构的重量）

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} l_i \rho_i x_i$$

达到最小，其中 l_i 为钣的平面面积或杆的长度；ρ_i 为钣或杆的比重。而设计变量 x_1、…、x_n 需要满足的约束条件为

$$\begin{cases} g_i(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0, & i = 1、\cdots、m \\ h_j(x_1, \cdots, x_n) = 0, & j = 1、\cdots、p \end{cases}$$

它们可以是几何尺寸的要求或在几种载荷情况下的材料所应承受的若干应力要求或位移要求等等。

由此，我们可以对数学规划问题

$$\begin{cases} \min f(x_1, \cdots, x_n) \\ g_i(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0, \quad i=1、\cdots、m \\ h_j(x_1, \cdots, x_n)=0, \quad j=1、\cdots、p \end{cases}$$

给以"物理"上的解释。即 x_1、…、x_n 为设计变量、目标函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为性能指标、约束条件为技术要求。于是数学规划问题可以理解为求一组设计变量 x_1、…、x_n，使其在满足技术要求的前提下，性能指标 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 达到最小（或最大）。有时，我们称设计变量、技术要求和性能指标为最优设计的三"要素"。

例 2 "喜糖问题"

现要筹办一件婚事，需要买些糖果，已知市场上甲级糖 2 元/斤，乙级糖 1 元/斤。本着喜事新办，勤俭节约的原则，要求花钱总数不能超过 20 元；而买糖总斤数不得少于 10 斤；要求甲级糖又不能少于 5 斤。问如何进行采买，使得在满足这些要求的前提下花钱最少？

设 x_1、x_2 分别为采买甲级糖和乙级糖的斤数。不难看出要求 x_1、x_2 必须满足下列条件：

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \leqslant 20 \\ x_1+x_2 \geqslant 10 \\ x_1 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

而使得目标函数

$$f(x_1, \cdots, x_2)=2x_1+x_2$$

最小化。

由于此数学规划的数学模型中目标函数及约束函数都是线性的，所以它是一个线性规划问题。

例 3 “投资问题”

假设在一段时间内可用于发展某种工业的总投资数为 a 亿元，又知道可兴建项目共有 n 个以供我们进行选择（我们把它们编号为 1、2、…、n），事先我们还知道，若选定第 j 个项目，则需投资 a_j 亿元，而在若干年内可得收益为 c_j 亿元。问如何进行投资才是最合理的？

我们令

$$x_j=\begin{cases}1，若对第 j 项目决定投资\\ 0，若对第 j 项目决定不投资\end{cases}$$

不难看出，x_1、…、x_n 应满足条件

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant a\\ x_j = 0 \text{ 或 } 1，\quad j=1、\cdots、n\end{cases}$$

由于条件 $x_j=0$ 或 1 等价于

$$x_j(x_j-1)=0，\quad j=1、\cdots、n$$

故约束条件可以改写为

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant a\\ x_j(x_j-1)=0，\quad j=1、\cdots、n\end{cases}$$

对于目标函数，如果我们只考虑总收益最大，则为

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

如果我们要求利率（即单位投资可得收益）最高，即为

$$\max \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com