欧几里得
空间中的分析

[美] K.Hoffman 著　欧阳光中 陈惠江 朱学炎 译

高等教育出版社

欧几里得空间中的分析

[美] K. Hoffman 著

欧阳光中 陈惠江 朱学炎 译

高等教育出版社

本书根据K.Hoffman著«Analysis in Euclidean Space»(1975)译出．原书是美国麻省理工学院数学分析课程两学期的教材．作者把实分析和复分析结合在一起向学生介绍数学分析的基本概念、基本原理和基本方法．全书共8章，前五章的重点是：完备性、收敛性、紧性和连续性．第6章通过赋范线性空间复习了前五章的主要结果，然后转向 R^n 上的Lebesgue积分，最后讨论 R^n 上的可微映射、隐函数定理、逆函数定理和变数变换定理．

本书可供高等学校数学系、物理系及工科有关专业大学生、研究生和教师参考．

欧几里得空间中的分析

［美］ K.Hoffman 著

欧阳光中　陈惠江　朱学炎　译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168　1/32　印张 16.25　字数 390,000

1988年7月第1版　1989年6月第1次印刷

印数 00,001— 1 870

ISBN 7-04-001954-X/O·713

定价　5.45元

前　言

这本教科书作为麻省理工学院两学期的数学分析课程的入门教材，是在教学过程中逐步发展起来的。课程的目的是向学生介绍数学分析的基本概念、基本原理和基本方法。

读这本书的学生需要具备扎实的微积分知识，包括单变量以及(某些）多变量微积分，（或许）再加上微分方程初步和线性代数。本书前几章只是在某些例题和习题中用到矩阵，因此在第一学期是不需要线性代数知识的．在麻省理工学院，初等微积分课程被压缩为一年，之后，学生才有一学期的微分方程和线性代数课程．因此，听这门课的一大半是二年级学生．进入麻省理工学院的许多学生在高中时已读过微积分课程，因而也有相当数量的一年级学生听这门课．其余往往是诸如物理系或电子工程系的三年级学生、四年级学生或研究生．我们假定学生缺乏严密的数学思想的训练，按我们的习惯，增设了辅导课，用来帮助学生掌握正确的数学定义和数学证明．设想读者已经掌握了初等数学相当多的技巧并熟悉许多数学思想，因此，在许多学院，本书也可作为三年级、四年级或研究生的分析课程。

本书与其它教科书在两方面有区别．第一，尽力把实分析和复分析结合在一起讲．多年来，这两个内容分设为两门课，因而使复变函数论的讲授时间推迟了．第二，直接把 R^n 拓广到赋范线性空间的子空间上，而不是把 R^n 拓广到度量空间．这样做在教学上的优点是它使原材料的处理与 Euclid 空间相似，学生很容易观察到 Euclid 空间的大部分结论在赋范线性空间依然成立，而赋范线性空

间的记号也与 R^n 的记号一样。这种方法，就象中学代数是为具有恒等元的交换环中的运算作准备一样，学生也可依法进行拓广。

第一学期可讲完前五章的绝大部分，重点是四大基本概念：完备性、收敛性、紧性和连续性。这里介绍了 n 维欧氏空间内有关集合和函数的基本结论。这种介绍方式便于对微积分学作一番认真的复习。和一般微积分课程相比，本书较着重幂级数展开。第五章讨论复的幂级数和复解析函数初步理论。在第一学期的正式安排中，往往把 §1.6 中线性几何的复习略去。感到时间紧迫或赞成把实分析和复分析分开来讲的教师也可略去 §5.5—§5.10 关于解析函数与 Fourier 级数方面的全部或一部分，这样做不会使本书的其余部分脱节。

第二学期从第六章开始。第六章通过赋范线性空间复习了第一学期的主要结果。作者认为学生确实能够注意到这样的事实，即他们所接触到的论证是形式的，因此在更一般的场合依然有效。此时，我们着重指出，第一学期的两个最基本的结果——R^n 的完备性和 Heine-Borel 定理——依赖于有限维性。这自然地引导到讨论：(i) 完备(Banach)空间，Baire 类型定理和收缩不动点原理，(ii) 各种赋范线性空间的紧子集，特别是等度连续性与 Ascoli 定理。之后，课程转向 R^n 上的 Lebesgue 积分，这是由具有紧支柱的连续函数空间的完备化而得到的。我们讨论了积分与测度的大多数基本性质，并简短地介绍了正交展开（特别是 Fourier 级数）。书的最后一章讨论了 R^n 上的可微映射、隐函数定理、逆函数定理以及变数变换定理。因为只是在变数变换定理的证明中用到 Lebesgue 积分，所以，如有必要，教师可提前讲授这一章。

最后再说几句。有些数学家看了这些讲义后会说：“一门初等分析课怎能不提到偏微分方程或变分学呢？”另一些数学家会问：

“一门基本分析课怎能不涉及到对数学或其它科学领域的应用呢?”回答是不存在这样的初等分析课程，因为在一门课程里实在无法包括这样广泛而深刻的内容。编写初等教程似乎有三种处理方法：(i) 着重一般概念和一般原理，(ii) 着重艰深的数学分析(一般思想的来源)，(iii) 着重对科学和工程学的应用。本书属第一类。对某些学生，主要是对将要进入数学、物理或(抽象)电子工程等研究院的学生来说，本书可能是很有价值的。而对于需要超出初等水平的高等微积分或分析的学生来说，本书是不合适的，作者也根本不打算适合于他们。

使用过这本课堂笔记并指出错误或提出改进意见的同事极多，谨向八年来对本书有帮助的人表示感谢。我要感谢S.Minsker, D. Ragozin 和 D. Wilken，他们都帮助作者改正笔记并管理麻省理工学院的教学事务。我特别感谢 D. Ragozin，他写了 Lebesgue 积分一章初稿。我得到 S. Koulouras 夫人的帮助，她打印了原稿，也得到 V. Wiley 小姐的帮助，她打印了修改稿和最终的手稿。最后，我感谢 A. Wester 和 Prentice-Hall 公司的全体工作人员。

K. Hoffman

给学生的前言

这本书将向你们介绍数学分析的许多一般原理。假定你们已具有一些数学知识，例如已牢固地掌握了一元函数和多元函数微积分课程(至少一年)，以及简短的微分方程课程。因为许多习题和例题涉及到矩阵，如果你们懂点初步的线性代数知识，那将是有益的。§1.6中总结了后面习题和例题所必需的材料，但是线性代数基础知识对阅读本书并不是必须的，因为在第六章之前，线性代数在正文中并未用到。

你们将遇到许多新的概念，要求你们理解它们的正确定义，某些应用，以及它们的普遍意义。按书末的索引，看一下究竟有多少条术语你能正确地陈述，这样就能从数量上判断掌握知识的情况，但是对这些定义作实质的理解将在你阅读本书的能力中显示出来。对书中的一些“证明”，你可能觉得有困难，甚至不懂什么叫“证明”。发生这种情况的原因，可能是你对基本概念的定义理解模糊，也可能是你不能掌握定义的确切涵义，这时，请你去复习一下定义。

你们也将学到许多内容丰富的和精彩的数学知识。为了使学习更有条理，本书为你们准备了补充材料和技巧：

1. 附录：在附录里讨论集、函数和势(有限、无限、可列与不可列集)。正文以附录的知识为基础。可以先读集与函数的那一部分，其余部分可以在书中用到时再参考。

2. 文献目录：本书有一份简短的文献目录，当你碰到困难或需要越出本书范围的内容时，就可以查阅它。

3． 符号表：当书中出现你不认识的符号时，请使用这份表。

4． 索引：本书索引是相当广泛的，它可以指引你去查阅有关的概念和讨论过的结论。

最后一件事是请利用习题来检查你们的理解程度。绝大多数习题有如“找出这个”，“证明那个”，“正确还是错误?”等明确的指示或问题。偶尔也有习题不这样说，它将是一个简单的陈述句，如“每一个可微函数是连续的”，这是要求证明的。这样写法是作者试图打破一遍又一遍单调地说“证明……”。带*号的习题(通常)是很困难的。即使某些不带*号的习题难住了你们，那也不必泄气，它们中有一些还是不久前的重大数学发现呢。

K. Hoffman

目　录

第1章 数和几何

1.1 实数系

阅读本书必须熟悉实数系，应当掌握实数的基本代数运算和由数的大小顺序导出的不等式。本节着重叙述数系中人们不大熟悉的一些性质。

首先介绍数系的基本代数性质，并进而引进实数系的全部性质。设R是实数集。

A. 域公理 实数集R有如下两种运算：第一种运算是加法运算，对R内的每一对元素x、y，有R内的一个元素$x+y$与它对应；第二种运算是乘法运算，对R内每一对元素x、y，有R内的一个元素xy与它对应。这两种运算具有以下性质：

1. 加法是可交换的，即对R内的每一对元素x、y，有

$$x+y=y+x.$$

2. 加法是可结合的，即对R内的一切x、y和z，有

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

3. 在R内有唯一元素0（零），使得对于R内的一切x，有$x+0=x$。

4. 对R内每一个元素x，R内存在唯一的元素$-x$，满足

$$x+(-x)=0.$$

5. 乘法是可交换的，即对R内一切x和y，有

$$xy=yx.$$

6. 乘法是可结合的，即对R内一切x、y和z，有

$$(xy)z=x(yz).$$

7．在 R 内存在唯一的元素 1（单位元素），使对 R 内一切 x，均有 $x1=x$。

8．对 R 内每一个非零元素 x，R 内有唯一元素 x^{-1}（或 $\frac{1}{x}$）满足 $xx^{-1}=1$。

9．$1\neq 0$。

10．对 R 内的一切 x、y 和 z，乘法在加法上是可分配的：

$$x(y+z)=xy+xz.$$

B．顺序公理 在 R 上存在一种关系 $<$，叫做小于，具有性质：

1．如果 x 和 y 在 R 内，那么下面的三个关系式

$$x<y;\quad x=y;\quad y<x$$

有一个且只有一个成立。

2．$x<y$ 等价于 $0<y-x$。

3．如果 $0<x$ 和 $0<y$，则 $0<(x+y)$，并且 $0<xy$。

C．完备公理 如果 S 和 T 是 R 的非空子集，满足

(i) $R=S\cup T$；

(ii) 如果对 S 内的每个 s 和 T 内的每个 t，有 $s<t$，则在集 S 内有最大数，或在集 T 内有最小数，这两件事中必有一件是成立的。

上述性质通常可概括为，实数集对于它的加法、乘法和顺序来说，(A) 它是一个域，(B) 它是有序的，(C) 按顺序它是完备的。简言之，实数系是完备的有序域。

从域公理（A），我们可导出以后将要用到的各种代数关系。然而，我们不想这样做。而是使用不加说明的基本恒等式，如二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},$$

或几何级数的公式

$$1-x^{n+1}=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n).$$

从公理可定义**正整数集**

$$Z_+=\{1, 2, 3, \cdots\},$$

它是由数1，1+1，1+1+1，…组成的集。然后我们可证明**数学归纳法**：

如果S是R的一个子集，使得

(a) $1\in S$;

(b) 如果$x\in S$则$(x+1)\in S$,

则S必包含每一个正整数。我们还可以定义**整数集**

$$Z=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\},$$

和**有理数集**

$$Q=\left\{\frac{m}{n};\ m\in Z, n\in Z_+\right\}.$$

并验证

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq},$$

等等。或许(逻辑上)我们可以进行这些推导，然而这将是耗费时间的，而且对于理解分析实际上又无任何帮助。

类似地可以从顺序公理(B)(容易地)建立几个不等式。如果$x<y$，则$x+z<y+z$；如果$x<y$并且$0<c$则$cx<cy$。$x\leqslant y$意味着$x<y$或$x=y$。$x<y$也可写成$y>x$。数x的**绝对值**定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{如果 } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{如果 } x<0.\end{cases}$$

绝对值具有性质：

$$|xy|=|x|\,|y|,$$

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|,$$
$$|x-y|\geqslant|x|-|y|.$$

这些不等式我们不证了.

现在有理由提出这样的一个问题，是否可以不从公式 (A), (B), (C) 出发推导实数系的各种性质？为什么要选中这些特殊性质,并由它们出发来决定实数系?这有两个主要原因,

第一,分析学立足于数的概念,所以我们必须清楚地阐明什么是实数系. 实数系的本质基于如下两个定理：(i)存在一个完备的有序域；(ii)任何两个这样的域是同构的,即在两个域的数之间存在一个一一对应关系，这种对应关系保持加法、乘法和顺序运算. 选中(A), (B)和(C)的第二个原因是这样做能帮助我们理解完备性 (C). 而实数系的完备性和关于它的种种表示是本分析学的主要内容.

我们不打算证明实数系的存在和唯一性. 我们假定读者掌握了有序域的计算而对数系的完备性并不熟悉，在后面的两节中可以看到完备性的实质. 现在我们将先说明什么是完备性.

直观上,性质(C)表明,如果把实数想象为直线上的点,那末这直线是没有空隙的. 我们怎样才能把“直线”R分成两个非空集合S与T的并集,使得在S内的每一个数均小于在T内的任一数呢?只有一种方法可以实现,即在某一点分割直线,把它分割成两段. 设S是其中的一段，而T是另一段,当然,这分点本身必须放在S内或者T内. 从而分点必是S内的最大数或者是T内的最小数.

确切地说,假定选择任一实数c，以c为分点，我们得到合于公理(C)的两种略有不同的分割：

$$S=\{s\in R;\ s\leqslant c\},$$
$$T=\{t\in R;\ t>c\},$$

或

$$S=\{s\in R; s<c\},$$
$$T=\{t\in R; t\geq c\}.$$

在第一个类型，S 中有最大数，在第二个类型，T 内有最小数。完备性表明，除此以外，再无其它可能出现。

例1 考察有理数系 Q，它由一切有理数组成，其中加法、乘法和顺序均与 R 中一样。因为有理数的和、差、积、商仍是有理数，在公理(A)中，用 Q 代替 R，域公理是满足的。同样，Q 满足顺序公理(B)。因此，有理数系是有序域。然而，它并不是完备的。很早以前，古希腊人就注意到(粗略地说) 有理数集有空隙，例如，点 $\sqrt{2}$ 就是空隙。更正确地说，他们证明了，不存在有理数 x 满足 $x^2=2$。这意味着在点 $\sqrt{2}$ 处分割有理数集将显示出 Q 不是完备的。这是由于集 $S=\{s\in Q; s<\sqrt{2}\}$ 没有最大数而集 $T=\{t\in Q; t>\sqrt{2}\}$ 也没有最小数。下面我们描述这一情况，但并不提到 $\sqrt{2}$。

假如定义

$$S=\{s\in Q; s<0 \text{ 或 } 0\leqslant s, \text{ 且 } s^2<2\},$$

(1.1)

$$T=\{t\in Q; 0<t \text{ 并且 } t^2>2\}.$$

显然 S 和 T 是 Q 的非空子集，并且 S 内的任一数均小于 T 内的每一个数。重要的是，在 Q 内不存在 x 满足 $x^2=2$，但是有

$$Q=S\cup T.$$

T 有最小数吗？令 $t\in T$，则 $t^2>2$。取 r 是一个十分小的正有理数，使它满足 $(t-r)^2>2$ (以及 $t-r>0$)；也就是说，应有 $(t-r)\in T$，因此 T 没有最小数。同理，S 没有最大数。所以，有理数系不具有完备性(C)。

为什么我们不能在实数系找出相似的例子呢？当然，这是由于实数系的完备性。让我们象上面一样做，并仔细地看看区别在哪

里。象(1.1) 那样定义集S和T，不过要用R代替Q。我们断定S和T是非空的，S内的每一数均小于T内的每一个数。可以证明S没有最大数和T没有最小数，而完备性(C)指出只有一种可能性，就是$R\neq S\cup T$，亦即必有某个实数既不属于S又不属于T。容易看到，如果x是一个实数，而$x\notin S$和$x\notin T$，则$x^2=2$。因此，由完备性得知在R内存在数2的平方根。

习　题

从基本性质(A)，(B)和(C)出发，推导实数的性质(习题 1—10)。

1. 若$x<y$并且$z<w$，则$x+z<y+w$。
2. 若$x<0$，则$-x>0$。
3. 若$x+y=x$，则$y=0$。
4. 对R内的每一个x，均有$x0=0$。
5. 若$x<y$并且$y<z$，则$x<z$。
6. 若$xy=0$，则$x=0$或若$y=0$。
7. (a) $(-x)y=-(xy)$。提示：$[x+(-x)]y=?$

   (b) $(-x)(-y)=xy$。
8. 对R内每一个x，$x^2\geqslant 0$。
9. 若$x<y$，则$x<\frac{1}{2}(x+y)<y$。
10. 若$x^2+y^2=0$，则$x=y=0$。
11. 用实数系的完备性证明：每一个正实数有唯一的正平方根。
12. 整数集(其中加法，乘法和顺序与R中一样)不是完备的有序域。正确地说，请指出整数集不满足条件(A)，(B)，(C)中的哪一个？

1.2　完备性的推论

我们将讨论实数系完备性的几个应用。首先，介绍几个基本术语。

定义　设A是实数集，亦即A是R的一个子集。如果存在数$b\in R$，使得