松散介质力学

赵彭年 编著

地震出版社

1995

松散介质力学

赵彭年 编著

地震出版社

1995

（京）新登字 095 号

内 容 简 介

本书是作者集多年的教学与研究实践，并结合国内外的科研成果而编写的一本简明易懂、自成系统的专著，着重介绍松散介质力学的基本理论及其在地基承载能力、挡土墙土压力、边坡稳定性和地下工程围岩稳定分析中的应用。

本书读者只需具有高等数学与材料力学的基础，即可顺利阅读，从而涉足松散介质力学研究进展的前沿课题。本书可供高等院校土建、水利、岩土工程和工程力学等专业师生以及有关的科研、工程技术人员参考。

松散介质力学

赵彭年　编著

责任编辑：王　伟

责任校对：庞娅萍

*

地 震 出 版 社 出版

北京民族学院南路 9 号（100081）

中国地质大学轻印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

*

850×1168　1/32　6.625 印张　176 千字

1995 年 6 月第一版　1995 年 6 月第一次印刷

印数 0001—1000

ISBN 7-5028-1225-3/O·21

（1645）　定价：10.00 元

前　言

在房建、桥梁、道路、水工、国防、矿山和冶金等工程中，经常需要研究松散介质力学问题，例如，地基承载能力、挡土墙土压力、边坡稳定性及地下工程围岩稳定分析等．尽管国外已出版过几本有关松散介质力学的专著，但它们各有自身的特点和侧重面；目前国内涉及这方面的论著或讲义尚属少见．因此，现在迫切需要编著一本内容新颖、兼顾各种研究方法、注重基本理论与实际应用、入门性的书籍．

有关专业的大学高年级学生及工程技术人员虽已了解一些松散介质极限平衡的工程分析方法，但对大量以塑性力学原理叙述的松散介质力学文献，却难以问津．作者根据自己多年讲授松散介质力学与塑性力学的教学经验及一些研究论文，并结合国内外的科研成果，编著了这本简明易懂、自成系统的松散介质力学专著．为自学本书内容，读者只需具有高等数学、材料力学课程的基础，并不苛求其他预备知识．

本书可供高等院校土建、水利、岩土工程和工程力学等专业师生以及有关科研、工程技术人员参考．

北京建筑工程学院赵明薇同志整理了部分书稿，并参加了绘制原图工作；本书的出版还受到了有关同志的热情支持与帮助，作者在此致以深切的谢意!

由于作者水平有限，书中难免有错误和不当之处，敬请读者批评指正。

主要符号

σ_x，σ_y，σ_z	直角坐标正应力分量
σ_r，σ_θ，σ_z	圆柱坐标正应力分量
σ_r，σ_θ	极坐标正应力分量
τ_{yz}，τ_{zx}，τ_{xy}	直角坐标剪应力分量
$\tau_{\theta z}$，τ_{zr}，$\tau_{r\theta}$	圆柱坐标剪应力分量
$\tau_{r\theta}$	极坐标剪应力分量
σ_1，σ_2，σ_3	主应力
σ_{ij}	应力张量
u，v，w	位移分量
u_i	位移矢量
v_x，v_y，v_z	直角坐标速度分量
v_i	速度矢量
ε_x，ε_y，ε_z	直角坐标正应变分量
ε_r，ε_θ	极坐标正应变分量
γ_{yz}，γ_{zx}，γ_{xy}	直角坐标剪应变分量
$\gamma_{r\theta}$	极坐标剪应变分量
ε_{ij}	应变张量
$\dot{\varepsilon}_x$，$\dot{\varepsilon}_y$，$\dot{\varepsilon}_z$	直角坐标正应变率分量
$\dot{\varepsilon}_r$，$\dot{\varepsilon}_\theta$	极坐标正应变率分量
$\dot{\gamma}_{yz}$，$\dot{\gamma}_{zx}$，$\dot{\gamma}_{xy}$	直角坐标剪应变率分量
$\dot{\gamma}_{r\theta}$	极坐标剪应变率分量
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	应变率张量
E	杨氏弹性模量
G	剪切弹性模量
μ	泊松比；滑移线与第一主应力方向夹角；摩擦系数

目　录

第一章　绪　论

§1.1　松散介质力学的任务

大量的几何尺寸基本属于同一量级的颗粒所构成的介质（砂土、砾石土、碎煤、水泥及其他颗粒状和粉状材料），其物理性质介于固体和液体的中间状态，被称为松散介质或散粒体。

松散介质与固体不同：松散介质的颗粒具有部分流动性，仅在一定范围内能保持其形状。例如，砂堆只有在其自由斜面与水平面之间的角度不超过某一极限值时，才能保持本身的形状，处于平衡状态。这个极限角度称为自然安息角或自然坡角。当斜坡超过自然坡角而有必要防止松散介质坍落时，宜采用挡土墙，此时，砂堆将对挡土墙产生压力。松散介质基本没有抵抗拉伸的能力，或者抗拉强度很低，一般只能在承受压应力的条件下工作。松散介质的抗剪强度随剪切面上的正压力而改变，正压力增加，抗剪强度也增加。松散介质与液体不同：液体具有更大的流动性，没有固定的形状，抵抗剪切力的能力更小。

松散介质分类：一类是颗粒之间不存在粘结力，称为理想松散介质，例如干燥的砂、谷物、碎石等。理想松散介质不具有抗拉强度。另一类是颗粒间有胶结物充填，有粘结力，能保持一定的几何形状，并能承受不大的拉应力，称为粘性松散介质，例如粘土之类的物质。大多数岩石都是依靠其造岩矿物颗粒的粘结力以及能起作用的内摩擦力来抵抗破坏的，因此，也可将岩体介质视为粘性松散介质。

在房屋建筑、桥梁、道路、水工建设、国防及采矿等工程中，经常遇到松散介质力学问题。这主要反映在以下几个方面：

(1) 散粒体极限载荷问题：确定地基的承载能力；研究在自重和外力作用下的边坡的稳定性等。

(2) 散粒体和相邻物体间的作用问题：散粒体对料仓壁的作用；土壤对挡土墙的作用等。

(3) 地下工程围岩稳定分析：散粒体压力理论及围岩的弹塑性应力分析等。

(4) 散粒体动力学：碎矿石的运动规律以及贮料塔放出物料时的受力状态等。

松散介质力学的任务是研究松散介质受力时的极限平衡和运动规律，它的中心问题是确定松散介质的极限破坏载荷。

§1.2 松散介质力学的研究方法

松散介质力学是固体力学的一个分支。目前，松散介质力学采用的计算简图主要是整体的连续介质的模型，即认为：松散介质毫无空隙地充满了其所占有的空间。实际上，松散介质的颗粒间有空隙存在，但是，这些空隙的几何尺寸一般不会超过颗粒本身的空间量级，与被研究范围的尺寸相比，极其微小，可以忽略不计。这样就可以认为，松散介质在其整个几何空间内是连续的。

如果要对松散介质进行全面的静力学分析，那么在加载过程中它应当满足以下条件：

(1) 松散介质内每一点处，应该处于平衡状态；

(2) 松散介质内的应力状态，必须与作用在其上的外力保持平衡；

(3) 在一点发生的变形必须与其周围所有点的变形相容，即不发生断裂或重叠；

(4) 每一点处的应力、应变分量必须满足该松散介质的应力-应变关系；

(5) 在松散介质的每一点处，不违反该松散介质的破坏准则(见§3.3)。

应用象有限元方法一类的数值技术，能够求得整个散粒体内的应力和应变状态，但计算是很复杂的。

松散介质力学只考虑松散介质最终将达到的破坏状态。设散粒体上作用着某一载荷，当载荷较小时，散粒体将不会发生变形流动，而处于静平衡状态。当载荷增加到一定限度时，散粒体将开始变形流动。松散介质的这种由静平衡到动平衡的过渡状态，称之为极限平衡状态，导致这种极限平衡状态的载荷，称为极限载荷。极限平衡理论只研究散粒体最后达到破坏状态时所能承受外力的能力，而不考虑达到这种状态以前的变形过程。由此可见，极限平衡理论的分析方法比上面所列的全面分析方法简单。

1773 年，极限平衡理论的奠基人库仑（C.A.Coulomb）陈述了极限平衡的基本原理，并将其应用于被水平面限制的填土对光滑竖直挡土墙的土压力问题。1857 年，朗肯（W.J.M.Rankine）研究了倾斜平面下半无限松散介质的极限平衡问题。这是松散介质极限平衡理论发展的初始阶段。

极限平衡理论的进一步发展按两个方向进行。第一个方向属于简化的极限平衡理论，它假定存在某种简单形状的滑移面，散粒体沿着滑移面滑动而发生破坏。这些滑移面的形状，可以是平面、棱柱面或圆柱面等。从而，可以用初等方法求解许多重要的实际问题。在这个简化理论中，每个问题的研究，被归结为寻找所选形状滑移面的最不利位置。尽管简化理论缺乏充分的根据，但是它仍然能给出可接受的结果。所以，辅助于可利用的图表的简化理论，至今仍被工程界所广泛使用。

遵循朗肯思想的第二个方向，试图建立严格的极限平衡理论。1903 年，德国学者克特尔（F.Kötter）建立了散粒体的塑性平衡方程式，为极限平衡理论朝严密的数学理论发展开辟了道路。此后，不少学者继续在这方面进行研究，解决了一些个别的问题，如普朗特尔（L.Prandtl）、诺沃托尔采夫（В.И.Новоторцев）、卡考（A.Caquot）等。

前苏联学者索科洛夫斯基（В.В.Соколовский）首先应用了滑移线（特征线）法来解塑性平衡方程式，成功地解决了一系列重要的散粒体塑性平衡问题，并于 1942 年出版了著名的《松散介质静力学》一书（1960 年该书出版了第三版），从而建立了完整的松散介质塑性平衡理论。此后，戈卢什克维奇（С.С.Голушкевич）提出了积分极限平衡方程的图解法，别列赞采夫（В.Г.Березанчев）研究了轴对称的完全极限平衡问题，继续发展了这方面的理论。

但是，索科洛夫斯基松散介质静力学理论的应用有一定局限性。这是因为，它忽略了松散介质在这种静力许可应力场下能否真正变形滑动的问题。关于确定极限载荷时必须同时考虑静平衡和动平衡的概念，首先出现在金属材料的塑性理论中。英国学者希尔（R.Hill）对极限平衡下了定义。此后，普拉格尔（W.Prager）和德鲁克尔（D.C.Drucker）把这一概念用于土体稳定分析，并建立了应力场和应变速度场之间的关系式，希尔德（R.T.Shield）推导了塑性流动方程式。

值得注意的，正如斯潘塞尔（A.J.M.Spencer）所指出的：基于库仑假设的理论，在土力学中已广泛被接受，并且在许多情况下，似乎以满意的方式决定了在散粒状介质中的应力场。但是，决定散粒状介质流动与变形的方程陈述，是更困难的和有争论的问题。甚至在平面变形的情况下，许多理论已被建议，但没有一个被认为是一般情况下都是可应用的（即不同的理论适用于不同情况）。

用滑移线解法可以求得松散介质极限平衡状态的应力场、变形速度场及相应的极限载荷。但是这种精确解法，除了很简单的情况外，很少能获得精确解答。一般情况下，需用复杂的数值积分得到近似解。极限平衡理论的另一种严格解法，是塑性极限分析方法。这种方法不考虑极限状态下松散介质中的真实应力场及变形速度场，而是直接求得塑性极限载荷。一般来讲，可找到塑

性极限载荷的下限值及上限值。1975 年陈惠发（W.F.Chen）出版了有影响的专著《极限分析与土的塑性》，书中详细论述了应用于土力学的塑性极限分析原理，并研究了广泛的重要课题。

松散介质的另一种计算模型为粒状介质，即由相互接触的、形状规则的固体颗粒组成的介质。这种介质可以是无侧压和有侧压的。颗粒的相互作用服从概率法则。近年来，有人着手用概率法分析散粒体力学问题，并取得了一些成果。

实验方法是研究松散介质力学的重要手段，它不仅能给出松散介质平衡破坏形式的一般概念，也能给出确定的且相当可靠的定量结果。实验法即能直接为工程服务，又能检验理论分析，并为理论计算提出必要的基本参数数据。在 1977 年克列因（Г.К.Клейн）所发表的《散粒体结构力学》书中，介绍了前苏联学者所进行的很多试验方法与试验结果。

第二章　松散介质力学的基本概念

第一章已简要阐述了松散介质力学的任务及其研究方法，现以边坡稳定问题为例，从工程问题中引出极限平衡概念。

边坡体在自重力、地下水压力、地震力及外部载荷作用下，其内部将产生一定的应力状态。按照边坡体材料的物理性质，这个应力状态对应着确定的应变状态。无论是评定自然边坡或现存的人工边坡，或是在一定的工程地质和工作条件下，设计新的边坡，稳定性分析解决的是边坡体的最终破坏条件。依赖于边坡体的材料性质，边坡体内的整体应力分布控制了边坡的变形、运动和破坏区的发展。要对边坡进行完整的力学分析，必须先要求得其内的应力、应变分布规律。但是，由于地质构造、材料性质和工作条件的复杂性，很难对边坡进行严格全面的力学分析。从工程应用的观点，人们最感兴趣的，是边坡濒临破坏的极限平衡状态。例如，在给定的工作环境条件下，当坡高一定时，最大的坡角是多少？

对松散介质极限平衡状态进行力学分析的方法有：简化的极限平衡方法、滑移线解法、塑性极限分析方法。工程技术人员对简化的极限平衡方法比较熟悉。松散介质力学主要研究后两种方法。

为了理解、运用和发展松散介质力学分析的方法，在力学基础知识方面，我们需要做一些准备。在材料力学中，虽然大家已经了解了变形体力学的一些基本概念，如应力、应变和弹性虎克定律等，但要对二维或三维散粒体的极限平衡状态进行力学分析，还需要一些较系统的变形体力学知识。本章首先介绍松散介质力学的一些基本概念（也适用于一般连续介质），为以后的学习与应用打好基础。

§2.1　一点的应力状态

材料力学中已经建立了通过受力物体一点的某个微面上的应

力矢量概念。这里应指出，材料力学中处理的是连续、均匀的材料模型；而边坡稳定分析，应区分两种情况：

(1) 对均质边坡的力学分析，一般采用连续介质力学模型，即认为边坡体材料为均匀连续的。但对于岩土材料，即使采用连续介质力学模型，材料也绝非是连续均匀的。例如，土体是颗粒状的多相材料，而岩体中充满了节理、裂隙等。因此在建立应力概念时，微面的含意应理解为：相对于工程地质力学问题来讲，微面很小，以致可以用数学分析的方法来研究；但为要保持材料的统计宏观性质不变，微面又不能取为无限小。对于土坡及结构面不够发育的或松散的岩体边坡，可用连续介质力学方法处理。

(2) 对于由象断层、节理和层面等结构面控制的岩体边坡，应当用不连续介质的分析方法来研究其稳定问题。

为了分析物体内一点 P 的应力状态，即通过 P 点的各个微面上应力矢量的大小和方向，我们在 P 点从物体内取出一个微小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴（图 2.1）。将每一个面上的应力矢量，向坐标轴投影，得一个正应力分量和两个剪应力分量。正应力用 σ 表示，为表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个坐标角码，例如正应力 σ_x 作用在垂直于 x 轴的面上，同时也是沿着 x 轴的方向。剪应力用 τ 表示，加上两个坐标角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴，例如剪应力 τ_{xy} 表示作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向。如果某一个微面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，那么这个微面上的应力分量就以沿坐标轴反方向为正；相反，如果某一个微面上的外法线是沿着坐标轴的反方向，那么这个微面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正。图 2.1 中所示的应力分量全部是正的。对于正应力来说，压应力为正，拉应力为负（注意，材料力学中以拉应力为正，压应力为负；而岩土力学中通常存在压应力状态，所以一般以压应力为正，拉应力为负）。

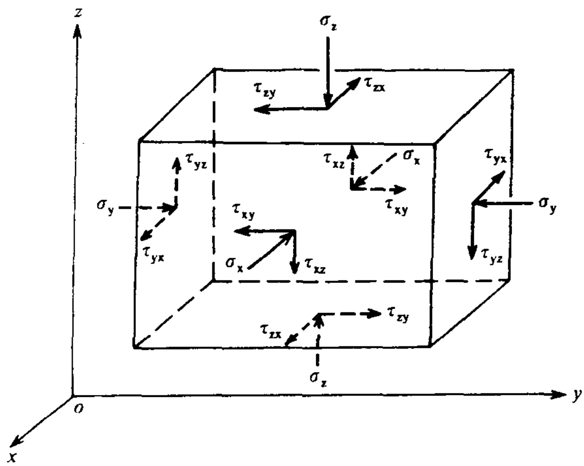

图 2.1 应力分量

由材料力学中的剪应力互等定理：作用在两个互相垂直的微面上并且垂直于该两面交线的剪应力相等，可知 6 个剪应力分量之间有互等关系：

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}，\ \tau_{zx}=\tau_{xz}，\ \tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{2.1.1}$$

假定物体中任一点 P 处的应力分量 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy} 的值为已知，试求经过 P 点的任一斜微面上的应力。为此，在 P 点附近取一平面 ABC，平行于这一斜微面，并与经过 P 点而平行于坐标面的三个平面形成一个微小的四面体 PABC（图 2.2）。当平面 ABC 趋近于 P 点时，微面 ABC 上的应力就成为该斜微面上的应力。

令平面 ABC 的外法线为 N，其方向余弦为

$$\cos(N,\ x)=l,\ \cos(N,\ y)=m,\ \cos(N,\ z)=n$$

设三角形 ABC 的面积为 ΔS，则三角形 BPC、CPA、APB 的面积分别为 $l\Delta S$、$m\Delta S$、$n\Delta S$。四面体 PABC 的体积用 ΔV 代表。斜面 ABC 上的应力矢量在坐标轴反方向上的投影，用 X_N、

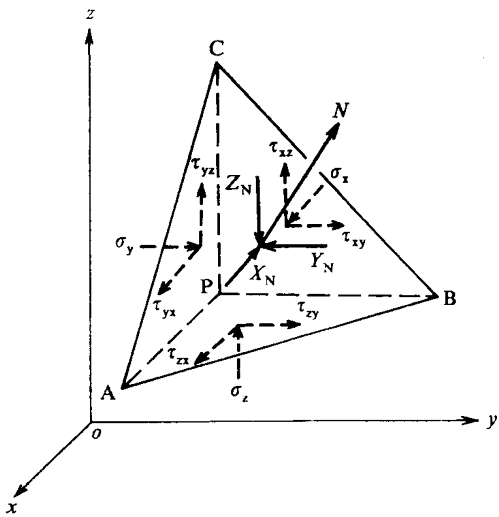

图 2.2　斜微面上的应力

Y_N、Z_N 代表。根据四面体的平衡条件$\sum F_x=0$，得

$$-X_N\Delta S+\sigma_x l\Delta S+\tau_{yx}m\Delta S+\tau_{zx}n\Delta S-X\Delta V=0$$

其中 X 代表单位体积材料所受的体力矢量在 x 轴反方向上的投影。由上式得

$$X_N+X\frac{\Delta V}{\Delta S}=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n$$

当斜面 ABC 趋近于 P 点时，由于 ΔV 是比 ΔS 更高一阶的微量，所以 $\Delta V/\Delta S$ 趋于零。于是即得出式(2.1.2)中的第一式。其余二式可分别由平衡条件$\sum F_y=0$ 及$\sum F_z=0$ 同样地求出：

$$\left.\begin{aligned}X_N&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\Y_N&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n\\Z_N&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\end{aligned}\right\}\tag{2.1.2}$$

特殊的情况下，如果斜面 ABC 是物体的边界面，则 X_N、Y_N、Z_N 成为物体表面每单位面积上所受的面力矢量，在坐标轴反方向上的投影$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$。因此有

$$\left.\begin{aligned}\overline{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \overline{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ \overline{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n\end{aligned}\right\} \tag{2.1.3}$$

这就是物体的应力边界条件，它表明应力分量的边界值与面力分量$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$之间的关系。

假设微面 ABC 上的压应力为 σ_N，则由投影关系可得

$$\sigma_N = X_N l + Y_N m + Z_N n$$

将式(2.1.2)代入，即得

$$\begin{aligned}\sigma_N = {} & \sigma_x l^2 + \tau_{xy} lm + \tau_{xz} ln + \tau_{yx} ml + \sigma_y m^2 \\ & + \tau_{yz} mn + \tau_{zx} nl + \tau_{zy} nm + \sigma_z n^2\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

假设两个方向 S、T，使 NST 形成右手直角坐标系。在坐标系 NST 中，也有 6 个应力分量 σ_N、σ_S、σ_T、τ_{ST}、τ_{TN}、τ_{NS}。对于应力分量 σ_S、σ_T、$\cdots\tau_{NS}$ 也有类似于式(2.1.4)的公式。于是，式(2.1.4)等表示，当坐标系旋转时，两个坐标系下应力分量的变换公式。如果一个量（一点的应力状态），在任一坐标系下用 9 个分量（应力分量）决定，当坐标系旋转时，它的分量按照类似于式(2.1.4)的关系变换，那么，这个量就叫做二阶笛卡尔张量。因此，我们有应力张量，它可表示为

$$\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

§ 2.2　主应力及应力莫尔圆

假设经过物体内任一点 P 的某个微面上的剪应力等于零，则该微面上的正应力称为在 P 点的一个主应力，该微面称为在 P 点的一个应力主平面，而该微面的法线方向，称为在 P 点的一个应力主方