

洲圓海鏡全譯

测圆海镜今译

〔元〕李冶著

白尚恕译

钟善基校

山东教育出版社

一九八五年·济南

责任编辑：徐世典

封面设计：曹敬恭

封面题字：蒋维崧

测 圆 海 镜 今 译

(元) 李冶 著 白尚恕 译 钟善基 校

*

山东教育出版社出版

(济南经九路胜利大街)

山东省新华书店发行 山东新华印刷厂德州厂印刷

*

850×1168毫米32开本 24.25印张 4插页 539千字

1985年1月第1版 1985年1月第1次印刷

印数1—2,176

书号 13275·18 定价(平) 5.95元

测圆海镜今译

序

李冶，原名治，字敬斋，号仁卿，真定栾城（今河北省栾城县）人。生于1192年，卒于1279年，终年88岁。李冶是我国宋、元时代杰出的数学家，生平著述很多，《测圆海镜》是他的代表作。

在《测圆海镜》问世之前，我国虽有以文字代表未知数用以布列方程和多项式的工作，但是直到李冶时代才系统而概括地总结了这种天元术。在我国数学的发展中，天元术不仅直接影响着后世的数学，即使在世界数学的发展中，天元术也起着极其重要的作用。李冶在《测圆海镜》里系统而明确地总结了天元术；对于高次方程的解法、各种勾股容圆、小数记法以及代数式的写法等方面也多所创新。李冶在《测圆海镜》里的成就是巨大的，既超过了同时期印度、阿拉伯的贡献，也超过了同时期的欧洲数学，它处于世界数学里遥遥领先的地位。

《测圆海镜》所用语句与今不同，所用名词也异，可以说其词简意深。阅读起来，很难了解其确切含意。为了便于研究我国古代数学及其发展，对这一名著很有必要加以今译。白尚恕同志以通俗语句及现代数学符号将《测圆海镜》全部译为今文，并作了校订和注释。这样，既可使国内、外对我国古代数学有兴趣的人士便于查阅，又使我国古代数学便于传播。这是

一件迫切需要的工作。

仅志数语以为序，并借以庆祝此书之出版。

魏 庚 人

1982年6月于陕西师范大学

前 言

李冶，原名治，字仁卿，号敬斋，金真定栾城（今河北栾城县）人。金明昌三年（1192年）生于其父李遘任职的大兴城（今北京市大兴县），后到元氏（今河北元氏县）求学，于金正大七年（1230年）应试，中“词赋进士”，命名高陵（今陕西高陵县）“主簿”。由于蒙古军进攻陕西，未到任便改调钧州（今河南禹县）任“知钧州事”，金天兴元年（1232年）蒙古军攻占钧州，便弃官北上，三年（1234年）金亡，李冶流落在忻、崞（今山西忻县、崞县）一带，后隐居于崞东的桐川。在当时，虽然他的处境十分艰难，经常饥寒交迫，几乎无法自存，但他处之泰然，仍坚持学术研究。正如他自己所说：“览吾之编，察吾苦心，其悯我者当百数，其笑我者当千数。乃若吾之所得自得焉耳，宁复为人悯笑计哉？”

李冶自幼酷爱数学，在隐居期间，得到“洞渊九容”之说，便朝夕推敲，苦心钻研，终于戊申年（1248年）秋写成《测圆海镜》十二卷。三年后他回到元氏，隐居于封龙山，在山上聚众讲学。后来见到有人写成《益古集》一书，在这书的启发下，遂写成另一数学名著《益古演段》三卷。

中统元年（1260年）忽必烈在上都（今内蒙古正蓝旗）登极，次年（1261年）拟授于显职，李冶则以老病为辞不受，至元二年（1265年）召为翰林学士，期年，李冶又以老病为辞，退居封龙山，登坛设座传授技艺。至元十六年（1279年）卒，

终年八十八岁。

李冶在《敬斋古今註》说：“翰林视草，唯天子命之，史馆秉笔，以宰相监之，特书佐之流，有司之事，非作者所敢自专非非是是也。今者，犹以翰林史馆为高选，是工谀誉而善缘饰者为高选也，吾恐识者羞之。”这就是他一再以老病为辞的原因，也是对当局不满，逃避现实，自命清高的思想情绪。

李冶在《测圆海镜》中说：“数本虽穷，吾欲以力强穷之，彼其数不惟不能得其凡，而吾之力且惫矣。然则数果不可以穷耶？既以名之数矣，则又何为而不可穷也。故谓数为虽穷，斯可；谓数为不可穷，斯不可。”即是说，数是难以认识的，但不得强以认识。如说数是难以认识犹可，如说数不可认识，则不可。又说：“何则？彼其冥冥之中，固有昭昭者存；夫昭昭者其自然之数也，非自然之数其自然之理也。数一出于自然，吾欲以力强穷之，使隶首复生亦未如之何也已。”即是说，数与数有其规律，若不按其规律强穷之，则为不可能。可见李冶对数学研究有其独特的见地。

李冶一生著述较多，计有《测圆海镜》十二卷、《益古演段》三卷、《敬斋古今註》四十卷、《泛说》四十卷、《壁书丛削》十二卷、《文集》四十卷。虽然后三种著作早经散失，但他仍不失是我国古代著名的数学家兼文史学家。

《测圆海镜》是我国古代一部数学名著，不仅是论述容圆的专著，也是天元术之代表作。

在此之前，除《九章算术》卷九第十六问论述勾股容圆外，宋石信道《铃经》、秦九韶《数书九章》以及“洞渊”都论及容圆问题。李冶乃依据“洞渊”九容之说，编撰《测圆海镜》一书。如李冶说：“余自幼喜算数，恒病夫考圆之术，……，

老大以来，得洞渊九容之说，日夕玩绎，而响之病我者，使爆然落去而无遗余。山中多暇，客有从余求其说者，于是乎又为衍之，遂累一百七十问。”

我国代数学的发展，也是先文词代数，然后符号代数。李冶则基于前人，加以引伸和提高，形成这部天元术巨著，从而为解决设定未知数及布列方程之困难迈出重要的一步。《测圆海镜》不仅是一部我国数学重要遗产，而且也是一部世界珍贵文献。

李冶过勾股形内切圆心、切点等画出直线，把勾股形分割成大小十五个相似勾股形，并把相似勾股形之间的线段关系集中在一起，称为《识别杂纪》。《识别杂纪》共有692条关系，其中除有8条属于谬误者外，其余684条都正确无误，在此基础上广泛运用天元术解勾股容圆问题。

《测圆海镜》十二卷，全书列有一百七十题，基本上都是依据《识别杂纪》列出天元式，以求勾股容圆问题。

通览全书，不难发现李冶在数学方面的贡献：

1. 用一个文字按其不同位置及系数以表示未知数的各项，使得由文词代数能顺利地演变成符号代数。

2. 对十进小数的表示法，与现今十进小数表示法，只差一个小数点。

3. 利用乘法消去分母，使分式化为整式。这方法与现今分式方程的解法相一致。

4. 利用乘方消去根号，使根式化为有理式。这方法与现今无理方程的解法相一致。

5. 创立升位法或降位法，对某些特殊方程在解法上提供了方便。

6.在某种意义上,对正整指数幂与负整指数幂的理解,与现今的理解比较相近。

7.在所列方程的次数上,比唐初、王孝通时代有显著的增高。

8.所列方程突破了秦九韶(1202—1261年)“实常为负”的限制。

9.对于筹式的写法,给四元术提供了有利条件。

10.在书末出现了文词代数式的初步尝试。

由于我国传统数学的局限性,又因限于容圆问题,所以《测圆海镜》也存在有美中不足之处:

1.只列举方程解法的名称,未曾详细介绍解方程的具体方法。

2.只考虑方程的一个正根。

3.在运算中,只用数字核算,难免出现偶合现象。

4.全书一百七十问都是同一题设,阅读起来,难免有重复之感。

5.“圆城图式”中缺少“弦上容圆”图。

纵如上述,《测圆海镜》仍不失为我国古代一部数学名著。

《测圆海镜》脱稿后,由于当时只注重理学,以致多年来未能刊刻发行。李冶去世以后,方能出版,但流传不广。

清代,戴震(1724—1777年)供职于四库全书馆,校订天文、数学书,《测圆海镜》中的案语可能是戴震所加,他虽然校订了一些疑误,但是难免仍有脱漏之处,后来又由李锐(1773—1817年)重加校算,并写了案语,同时给出四套数据列于《识别杂纪》之后。李锐于嘉庆二年(1797年)校毕,次年

(1798年)便收入《知不足斋丛书》中。此后李锐校本便成为流行较广的版本。

《〈测圆海镜〉今译》是以《知不足斋丛书》本为蓝本，参照李俨、钱宝琮、程廷熙、李迪等各家之说进行翻译，并写出注释和校订文字四百多条，同时对全书作了断句和标点工作。为了便于查阅，在每卷之前增设了两幅“圆城图式”，在每问的又问及又法的原文前增添了〔又一问〕、〔又一法〕等字样。由于《知不足斋丛书》本有大号字及小号字之别，为了便于阅读，凡原文是小号字的词句都括以方括号，以示区别。全书采用先原文、再注释、后译文的编排形式。

在每问算法的译文中，都增写了设定已知数为某数及未知数为某数的文字。对于按语的译文都括以方括号，借以表示对应于原文的按语。

由于水平所限，差错及不妥之处实属难免，尚希读者指正。

白 尚 恕

一九八一年二月于北京师范大学

重刻测圆海镜细草序

测圆海镜，何为而作也？所以发挥立天元一之术也。算数之书，《九章》尚已。少广著开方之法，方程别正负之用。立天元一者，融会少广、方程而加精焉者也。李敬斋自序称：“老大以来，得洞渊九容之说。日夕玩绎，而响之病我者，使爆然落去，而无遗馀”。盖其精心孤诣，积累数十年，而后能神明变化，无不如志。若此，洎乎明代，算学衰歇，顾箬溪应祥，作《测圆海镜分类释术》、《测圆算术》等书，以立天元一无下手之处。每章辄删去细草，而但演开带从诸乘方法，舍其本而求其末，不知妄作之罪，应祥实无可辞焉。国朝梅文穆公，肄业蒙养斋，亲受圣祖仁皇帝指示算法，始悟西人所译借根方，即古立天元一之术，流入彼中者，于所著《赤水遗珍》中，论之甚悉。于是立天元术，又得章明。文穆之功，斯为巨矣！其为术也，广大精微，无所不包。大之而踰离度数，小之而米盐凌杂。凡它术所能御者，立天元皆能御之。它术所不能御者，立天元独能御之。自古天文家，若元郭太史守敬，所造授时术，中法号为最密，而其求周天弧度，以三乘方取矢，亦用立天元术。载在授时术草者，可覆而按，则其为用，亦神哉矣！以元论之，又非独如是已也。今欧逻巴本轮均轮椭圆地动诸法，其密合无加矣。原其推步之密，由于测验，测验既精，济以算术，则有弧三角法。所以算弧三角者，则有八线表。所以立八线表者，则先求六等边、四等边以至十八、十四等边。其求十八等边、十四等边二

法，则用益实、减实归除。所谓益实、减实归除者，究其实，即借根方。借根方，即立天元一。然则西法之精符天象，独冠古今，亦立天元术有以资之也。试以是书所列一百七十问，反复研究，考之于二千年以来，相传之《五曹》、《孙子》诸经，盖无以逾其精深，又证之以数万里而外译撰之《同文算指》诸编，实不足拟其神妙。而后知立天元者，自古算家之秘术。而海镜者，中土数学之宝书也。惜流传之本，不可多得。元视学浙江，从文澜阁《四库全书》中，钞得一本，宁波教授丁君小雅杰又以所藏旧本见赠，但通之者鲜。细草多讹，因属元和李君尚之锐算校一过，其文字隐奥难晓及立术于率不通者，李君又杂记数十条于书之上下方，盖敬斋此书，为数百年绝学。元知学友中，惟尚之独能明之，其精通妙悟，即今之敬斋也。且其所以发明古人之术，阐释圣祖之言者，为功亦巨矣哉！歙县鲍君以文廷博请以是书刊入《知不足斋丛书》第二十集，即以畀之，及其刻成，而有序之如此。

嘉庆三年正月乙酉内阁学士兼礼部侍郎文渊 阁直阁事仪徵阮元序

测圆海镜序

数本难穷，吾欲以力强穷之，彼其数不惟不能得其凡，而吾之力且惫矣。然则数果不可以穷耶？既以名之数矣，则又何为而不可穷也。故谓数为难穷，斯可；谓数为不可穷，斯不可。何则？彼其冥冥之中，故有昭昭者存。夫昭昭者其自然之数也，非自然之数其自然之理也。数一出于自然，吾欲以力强穷之，使隶首复生，亦未如之何也已。苟能推自然之理以明自然之数，则虽远而乾端坤倪，幽而神情鬼状，未有不合者矣。吾自幼喜算数，恒病夫考圆之术例，出于牵强，殊乖于自然，如古率、徽率、密率之不同，截弧、截矢、截背之互见，内外诸角，析剖枝条莫不各自名家，与世作法及反复研究，卒无以当吾心焉。老大以来，得洞渊九容之说，日夕玩绎，而响之病我者，使爆然落去，而无遗余。山中多暇，客有从余求其说者，于是乎又为衍之，遂累一百七十问。既成编，客复目之。测圆海镜盖取夫天临海镜之义也。昔半山老人集唐百家诗选，自谓废日力于此良可惜，明道先生以上蔡谢君记诵为玩物丧志，夫文史尚矣，犹之为不足贵，况九九贱技能乎。嗜好酸碱，平生每痛自戒敕，竟莫能已，类有物凭之者，吾亦不知其然而然也。吾尝私为之解曰，由技兼于事者言之，夷之礼，夔之乐，亦不免为一技。由技进乎道者言之，石之斤，扁之轮，岂非圣人之所与乎。览吾之编，察吾苦心，其悯我者当百数，其笑我者当千数。乃若吾之所得，则自得焉耳。宁复为人悯笑计哉。

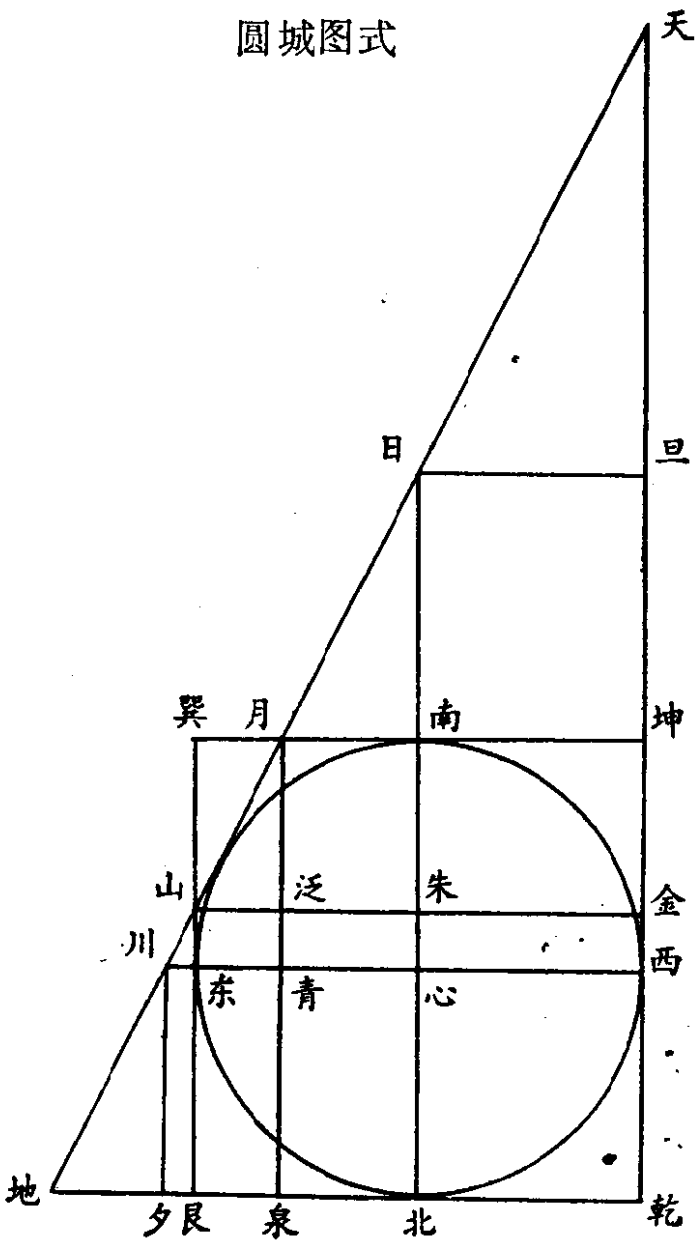
戊申秋九月晦日栳城李冶序。

目 录

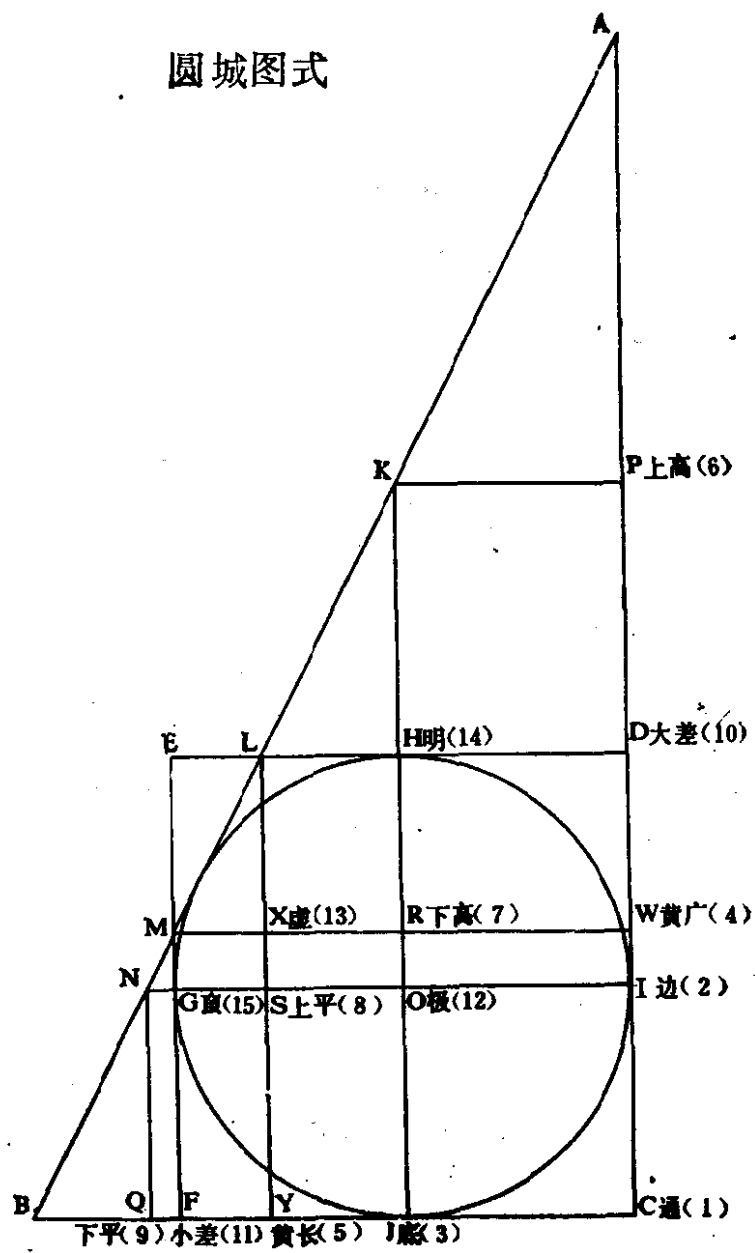
第 一 卷	1
总率名号	2
今问正数	7
识别杂纪	17
附：新设四率	114
第 二 卷 正率一十四问	152
第 三 卷 边股一十七问	196
第 四 卷 底勾一十七问	260
第 五 卷 大股一十八问	319
第 六 卷 大勾一十八问	378
第 七 卷 明重前一十八问	436
第 八 卷 明重后一十六问	508
第 九 卷上 大斜四问	583
第 九 卷下 大和八问	597
第 十 卷 三事和八问	629
第十一卷 杂糅一十八问	651
第十二卷 之分一十四问	711

测圆海镜细草卷第一

翰林学士知制诰 同修国史栾城李 冶撰



圓城圖式



總率名號

【原文】

天之地為通弦〔1〕，天之乾為通股，乾之地為通勾。
天之川為邊弦〔2〕，天之西為邊股，西之川為邊勾。
日之地為底弦〔3〕，日之北為底股，北之地為底勾。

天之山为黄广弦^[4]，天之金为股^[5]，即股方差也^[6]。

金之山为勾。

月之地为黄长弦^[7]，月之泉为股，泉之地为勾，即勾方差也^[8]。

天之日为上高弦^[9]，天之旦为股，旦之日为勾

日之山为下高弦^[10]，日之朱为股，朱之山为勾。

月之川为上平弦^[11]，月之青为股，青之川为勾。

川之地为下平弦^[12]，川之夕为股，夕之地为勾。

天之月为大差弦^[13]，天之坤为股，坤之月为勾。

山之地为小差弦^[14]，山之艮为股，艮之地为勾。

日之川为皇极弦^[15]，日之心为股，心之川为勾。

日之山为太虚弦^[16]，月之泛为股，泛之山为勾。

日之月为明弦^[17]，日之南为股，南之月为勾。

山之川为重弦^[18]，山之东为股，东之川为勾。

【注释】

〔1〕“天之地”的“之”字：在这里应解释为到或至的意思。如《国策》：“驱而之薛”。“天之地”或“天之于地”就是由“天”到“地”，有时则指“天”到“地”的线段，或线段“天地”之长。用现代术语表示，即线段 AB 之长。

“通”就是贯通。如图，天地乾勾股形，即 $\triangle ABC$ 是最大的勾股形，与各勾股形相互贯通。所以称此勾股形为大勾股形或通勾股形；有时也称为正勾股形。其三边则分别称为大勾、通勾或正勾，大股、通股或正股，大弦、通弦或正弦。

圆城图式中所标方向为上南。下北。左东。右西，与现在的习惯不一致。

〔2〕“边”、即是旁侧、边缘的意思。天川西勾股形，即 $\triangle ANI$ ，就