周鸿兴　王连文　著

线性算子半群理论及应用

山东科学技术出版社

线性算子半群理论及应用

周鸿兴　王连文 著

国家自然科学基金资助项目

山东科学技术出版社

鲁新登字 05 号

线性算子半群理论及应用

周鸿兴　王连文　著

*

山东科学技术出版社出版

（济南市玉函路　邮政编码 250002）

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 32 开本 16.75 印张　4 插页 365 千字

1994 年 4 月第 1 版　1994 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—1000

ISBN　7—5331—1336—5

O·55　　定价：19.00 元

山东省泰山科技专著出版基金会
赞助单位

山东省财政厅

山东省出版总社

山东省科学技术委员会

山东科学技术出版社

山东泰山酿酒饮料集团总公司

董事长兼总经理张传礼

山东金泰集团股份有限公司

董事长兼总裁刘黎明

我们的希望

进行现代化建设必须依靠科学技术。作为科学技术载体的专著，正肩负着这一伟大的历史使命。科技专著面向社会，广泛传播科学技术知识，培养专业人才，推动科学技术进步，对促进我国现代化建设具有重大意义。它所产生的巨大社会效益和潜在的经济效益是难以估量的。

基于这种使命感，自 1988 年起，山东科学技术出版社设"泰山科技专著出版基金"，成立科技专著评审委员会，在国内广泛征求科技专著，每年补贴出版一批经评选的科技著作。这一创举已在社会上引起了很大反响。

1992 年，在山东省委、省政府的支持下，在原"泰山科技专著出版基金"的基础上，由山东省出版总社、山东省科学技术委员会和山东科学技术出版社共同成立了"山东省泰山科技专著出版基金会"，并得到企业界的热情赞助，为资助学术专著的出版提供了更加可靠的保证。

但是，设基金补助科技专著出版毕竟是一件新生事物，也是出版事业的一项改革。它不仅需要在实践中不断总结经验，逐步予以完善；同时，也更需要社会上有关方面的大力扶植，以及学术界和广大读者的热情支持。

我们希望，通过这一工作，高水平的科技专著能够及早问世，充分显示它们的价值，发挥科学技术作为生产力的作用，不断推动社会主义现代化建设的发展。愿基金会支持出版的著作如泰山一样，耸立于当代学术之林。

泰山科技专著评审委员会

1992 年 12 月

前　言

我们知道，n 个变量 $y_1(t),\cdots,y_n(t)$ 的非齐次常微分方程组可以用向量—矩阵的形式来表示：

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + u(t), y(0) = y_0 \tag{i}$$

其中 $y(t) = (y_1(t),\cdots,y_n(t))^{\tau}$ 是 n 维向量，即 $y(t) \in \boldsymbol{R}^n$，而 $u(t) \in \boldsymbol{R}^n$ 是非齐次项，A 是 $n \times n$ 矩阵，此时方程式(i) 的解可以写成

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}u(s)ds \tag{ii}$$

其中 $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n A^n / n!$. 解的这种形式在理论上或应用上都带来了极大的方便. 如果考虑线性抛物型偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\dfrac{\partial y(t,x)}{\partial x}\right] + u(t,x) & 0 < x < 1, t > 0 \\ y(t,0) = y(t,1) = 0 & t \geqslant 0 \\ y(0,x) = y_0(x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{iii}$$

那么在一般情况下，方程(iii) 的显式解是写不出来的. 如果引进函数空间 $X = L^2(0,1)$，那么，二元函数 $y(t,x)$、$u(t,x)$ 就可以写成空间 X 上的关于变量 t 的一元抽象函数：$y(t)(\cdot) = y(t,\cdot)$，$u(t)(\cdot) = u(t,\cdot)$. 此时，在空间 X 上定义关于变量 x 的偏微分算子 A：

$$D(A) = \{y(x): y, (ay')' \in X, y(0) = y(1) = 0\} \tag{iv}$$

$$(Ay)(x) = [a(x)y'(x)]'$$

那么偏微分方程(iii) 右端的第一项就是 $Ay(t)$，这样，偏微分方程式(iii) 就与常微分方程式有相同的形式(i). 于是，自然会提出这样的问题：写成形式(i)的偏微分方程式(iii)是否也有形如式(ii)的解？显然，如果偏微分方程(iii) 的解可以写成形式(ii)，那么，这种表达方式一定会给偏微分方程的研究带来深刻的影响.

由于式(iv) 定义的算子 A 是无界算子(求导算子)，此时已不可能按照前面所述矩阵收敛级数形式来定义算子 e^{tA}(如果 A 是有界线性算子，则仍可以按照算子收敛级数的形式 $\sum t^n A^n/n!$ 来定义算子 e^{tA})，但是可以定义一个以 t 为参数的有界线性算子族 $T(t)$，$t \geqslant 0$，它在许多地方与 e^{tA} 相像，因此，只要不发生误解，有时也将该单参数算子族写成 $T(t) = e^{tA}$. 这样的单参数算子族 $T(t)$，$t \geqslant 0$，就称为有界线性算子半群. 利用算子半群，偏微分方程式(iii) 的解就可以写成形式(ii)，不过其中的 e^{tA} 用 $T(t)$ 代替罢了. 线性偏微分方程的这种处理最早是由 E. Hille 及 K. Yosida 提出来的，他们两人各自独立地得到了在一般情况下线性算子(特别是无界算子)A 生成算子半群 $T(t)$ 的充分必要条件，即后人所说的 Hille—Yosida 定理，并且以此为标记，形成了系统的有界线性算子半群理论，并且在深度上及广度上不断得到发展. 根据这一理论提供的方法，不仅可以处理形如式(iii) 的一维热传导方程，而且可以用来研究相当广泛的一类发展方程.

有界线性算子半群理论在分布参数控制系统中的应用是从 60 年代中期开始的. 由于当时由式(i) 描述的有限维空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的线性控制系统理论已趋成熟，因此人们很自然地考虑抽象空间(例如 $L^2(0,1)$) 中由形如式(i) 描述的分布参数控制系统的性质. 由于无限维抽象空间与 $\boldsymbol{R}^n$ 有着本质的差异，因此尽管无限维控制系统与有限维控制系统在描述形式上有相似之处，无

限维线性控制系统理论并不是有限维系统的简单平移，而是一种有着本质差别的推广. 这种推广工作在 70 年代中期获得了全面的成功，此时已建立了由(i)描述的无限维线性控制理论，如能控性能观性、能稳定化性、最优调节器理论、最优滤波器等. 随后，人们又开始研究带非线性扰动的抽象控制系统的各种性质. 本书作者在 1980 年起对半线性分布参数控制系统的能控性以及最优控制等问题进行了系统的研究，所得结果陆续在 SIAM J. Control & Optimization 等杂志上发表，本书则是对作者在这方面工作进行了适当的总结.

全书共分六章. 第一章为预备知识，主要介绍了大学一般泛函分析教程中没有讲述的无界算子及抽象积分概念. 第二章为算子半群的基础知识，Hille—Yosida 定理是这一章的核心. 第三章对应用中常见的解析半群等作了介绍. 第四章是与算子半群的应用有密切联系的内容：Sobolev 空间与椭圆算子概述. 第五章对由式(i)描述的反映偏微分方程的抽象 Cauchy 问题进行了讨论，并推广到其他方程的应用. 最后一章为算子半群理论在分布参数控制系统中的一些应用.

作者借此机会向中国科学院院士、山东大学校长潘承洞教授表示衷心的感谢. 10 年前他建议作者编写一本这方面的研究生教材. 后来，这本油印教材在山东大学数学系讲授多次，在此基础上逐渐形成了本书. 由于作者学识有限，书中难免有不妥之处，恳请同行读者指正.

著　者

1994 年 2 月

目　录

第一章

算子半群预备知识

为了讨论线性算子半群理论及其在微分方程和分布参数控制系统中的应用，需要泛函分析的一些有关知识，例如闭线性算子，预解式与谱，抽象函数的 Bochner 积分等等. 初等泛函分析教程不一定完整地介绍这些内容，例如在算子半群理论中经常利用的微分算子，它是一个无界线性算子，对这类算子的性质很多初等泛函分析教程并不详细讨论. 鉴于以上原因，本章将尽量完整地介绍与算子半群理论及其应用有关的泛函分析内容，对所给出的结论尽量给出证明. 本章 §1.1 详细介绍闭算子与可闭算子，共扼算子与伴随算子的各种性质；§1.2 介绍抽象函数的连续性与解析性；在 §1.3 中将介绍线性算子的预解式与谱的有关内容；§1.4 着重介绍紧算子与自伴算子的谱分解；§1.5 介绍抽象函数的 Bochner 积分.

§1.1 闭算子与可闭算子

在本节中，将介绍闭线性算子与可闭线性算子的各种性质，线性稠定算子的共扼算子与伴随算子的定义及性质. 对各种算子都举例说明.

定义 1.1.1 设 X 与 Y 都是 Banach 空间，A 是定义在 X 的

线性子空间 $D(A)$ 上并取值于 Y 中的线性算子，我们把乘积空间 $X\times Y$ 中的集合 $G_A=\{(x,y)\in X\times Y: x\in D(A), y=Ax\}$ 称为算子 A 的图像. 如果 G_A 是乘积空间 $X\times Y$ 中的闭集合，则称 A 是闭线性算子或闭算子.

由定义 1.1.1 易知，线性算子 A 是闭算子的充要条件为：若 $x_n\in D(A), x_n\to x$ 且 $Ax_n\to y(n\to\infty)$，则 $x\in D(A)$ 且 $y=Ax$. 以后验证一个线性算子 A 是否为闭算子时，经常利用这个充要条件.

今后，除非特别说明，大写的字母 X,Y 等都是指一般的 Banach 空间.

特别要说明的是，当叙述一个算子 A 的时候，其定义域 $D(A)$ 不一定是全空间，即使有界线性算子也是如此.

显然，定义在全空间上的有界线性算子必为闭线性算子，但是，定义域不是全空间的有界线性算子不一定是闭算子，但当有界线性算子 A 的定义域 $D(A)$ 是 X 中的闭集合时，容易看出它也是闭算子. 一般说来，闭线性算子不是有界线性算子. 例如，考虑空间 $X=Y=C[a,b]$，$-\infty<a<b<+\infty$，范数取为上确界范数. 在 X 上定义算子 A 为：$D(A)=\{x: x,x'\in X\}$，$(Ax)(t)=x'(t)$，显然，A 是由 $D(A)$ 到 Y 的无界线性算子，但是由连续函数序列的一致收敛性可知，它是闭线性算子. 尽管一般的闭线性算子不是有界的，但对一些特殊的闭算子，它可以是有界的，这就是下面重要的闭图像定理.

定理 1.1.2 （闭图像定理）若线性算子 A 的定义域 $D(A)$ 是 X 中的闭子空间，则当 $A: D(A)\to Y$ 是闭算子时，它也是有界线性算子.

该定理的证明可在普通泛函分析教程中查阅.

在很多情况下，常常碰到这样的线性算子 A，它本身并不是闭线性算子，但是，存在一个闭线性算子 $\overline{A}$，当 $x \in D(A)$ 时 $Ax = \overline{A}x$，由于这类算子的重要性，给出下面定义.

定义 1.1.3　设 A 是由 $D(A) \subset X$ 到 Y 的线性算子，如果存在闭线性算子 $\hat{A}$，使得 $D(A) \subset D(\hat{A})$，$\hat{A}x = Ax$，$x \in D(A)$，即 $A \subset \hat{A}$，则称 A 是可闭线性算子，$\hat{A}$ 称为 A 的一个闭延展. 当 $\overline{A}$ 是 A 的一个闭延展，并且 $\overline{G}_A = G_{\overline{A}}$ 时，称 $\overline{A}$ 为 A 的最小闭延展或闭包.

定理 1.1.4　设 A 是由 $D(A) \subset X$ 到 Y 的线性算子，则 A 是可闭线性算子的充要条件为，对于任给的序列 $x_n \in D(A)$，只要 $x_n \to 0$，$Ax_n \to y(n \to \infty)$，则必有 $y = 0$.

证明　必要性. 设线性算子 A 存在闭延展 $\hat{A}$，则对任给的序列 $x_n \in D(A)$，当 $x_n \to 0$，$Ax_n \to y$ 时，也有 $\hat{A}x_n = Ax_n \to y$，由算子 $\hat{A}$ 的闭性可知 $y = 0$.

充分性. 设 $\{x, y\} \in \overline{G}_A$，则在空间 $X \times Y$ 中存在序列 $\{x_n, y_n\} \in G_A$ 使得

$$\{x_n, y_n\} = \{x_n, Ax_n\} \to \{x, y\}$$

现按上述关系定义算子 $\overline{A}$：

$D(\overline{A}) = \{x \in X$：存在 $x_n \in D(A)$，使得 $x_n \to x$，Ax_n 在 Y 中收敛$\}$

$$\overline{A}x = \lim_{n \to \infty} Ax_n$$

于是，当 $\{x, y\} \in \overline{G}_A$ 时，$\overline{A}x = y$. 不难证明算子 $\overline{A}$ 定义的合理性. 事实上，若另有序列 $x_n' \in D(A)$ 使得 $x_n' \to x$，$Ax_n' \to y' \in Y$，则 $x_n' - x_n \in D(A)$，该序列具有性质

$$x_n' - x_n \to 0, A(x_n' - x_n) = Ax_n' - Ax_n \to y' - y \in Y$$

于是，由定理假设可知 $y'-y=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}Ax_n'=\lim\limits_{n\to\infty}Ax_n=y$，因而由上述方法定义的算子 $\overline{A}$ 合理. 下面证明算子 $\overline{A}$ 就是 A 的最小闭延展，即 $\overline{G}_A=G_{\overline{A}}$. 显然，由算子 $\overline{A}$ 的定义可知，$\overline{G}_A\subset G_{\overline{A}}$. 反之，若 $\{x,y\}\in G_{\overline{A}}$，则 $y=\overline{A}x=\lim\limits_{n\to\infty}Ax_n$，其中序列 x_n 满足 $x_n\in D(A)$，$x_n\to x(n\to\infty)$，因而 $\{x_n,Ax_n\}\in G_A$ 及 $\{x_n,Ax_n\}\to\{x,y\}$，即 $\{x,y\}\in\overline{G}_A$，由此可知 $G_{\overline{A}}\subset\overline{G}_A$，于是，有 $G_{\overline{A}}=\overline{G}_A$. 由于算子 $\overline{A}$ 的定义已表明 $\overline{A}$ 是 A 的一个延展，即 $A\subset\overline{A}$，从而 A 是可闭算子且 $\overline{A}$ 是 A 的闭包. ■

下面考虑两个闭算子的具体例子，这些例子在后面讨论线性算子半群理论时将会遇到.

例 1.1.5　设 $X=L^2(0,\infty)$，在空间 X 上定义算子 A 为:

$$D(A)=\{x\in X:x'\in X,x(0)=0\}$$

$$(Ax)(s)=-x'(s),x\in D(A)$$

则 A 是 X 上的稠定闭算子.

事实上，在初等泛函分析教程中有下面结论：集合 $C_0^\infty[0,\infty]$，即 $[0,\infty]$ 上无穷次连续可微且在 $[0,\infty]$ 上有紧支集的函数全体组成的集合，在 $L^2[0,\infty]$ 中稠密，因此，对任给 $\varepsilon>0$ 及 $x\in X$，存在 $f\in C_0^\infty[0,\infty]$ 使得 $\|x-f\|_{L^2(0,\infty)}<\frac{\varepsilon}{2}$. 不妨设 f 的支集为 $[0,b]$，构造下面函数序列

$$x_n(s)=\begin{cases}\text{光滑连接 } 0 \text{ 和 } f(\frac{1}{n})\text{，且使} \\ |x_n(\mathrm{s})|\leqslant\max\limits_{0\leqslant s\leqslant b}|f(s)|, & 0\leqslant s<\frac{1}{n} \\ f(s), & \frac{1}{n}\leqslant s<b \\ 0, & b\leqslant s<\infty\end{cases}$$

显然，$x_n \in D(A)$，$n = 1.2,\cdots$，由上式可知

$$\| x_n - f \|_{L^2(0,\infty)} = \int_0^{\frac{1}{n}} |x_n(s) - f(s)|^2 ds$$

$$\leqslant 4 \max_{0 \leqslant s \leqslant b} |f(s)|^2 \cdot \frac{1}{n}$$

存在充分大的正整数 N，当 $n > N$ 时

$$\| x_n - f \|_{L^2(0,\infty)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

结合上面所得式子可知 $\| x_n - x \| < \varepsilon$，即$\overline{D(A)} = X$.

下面证明 A 是闭线性算子. 为此，先证明存在某个复数 λ_0，使得 $\lambda_0 I - A$ 是由 $D(A)$ 到 X 的一一对应，并且$(\lambda_0 I - A)^{-1}$ 是 X 到 $D(A)$ 的有界线性算子. 对任给 $x \in X$，考虑方程$(\lambda I - A)y = x$，它等价于方程

$$\begin{cases} \lambda y(s) + y'(s) = x(s) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

显然，该方程在 $\lambda > 0$ 时存在唯一解

$$y(s) = \int_0^s e^{-\lambda(s-\xi)} x(\xi) d\xi, s > 0 \tag{1.1.1}$$

当 $s < 0$ 时令 $x(s) = 0$，$y(s) = 0$，则 $x(s)$ 与 $y(s)$ 可以进行 Fourier 变换，记 $X(w) = \mathscr{F}[x(s)]$，$Y(w) = \mathscr{F}[y(s)]$ 分别为 $x(s)$ 与 $y(s)$ 的 Fourier 变换，由式(1.1.1)可得

$$\begin{aligned} Y(w) &= \int_0^\infty e^{-iws} \int_0^s e^{-\lambda(s-\xi)} x(\xi) d\xi ds \\ &= \int_0^\infty e^{\lambda\xi} x(\xi) \int_\xi^\infty e^{(-\lambda+iw)} s ds d\xi \\ &= \frac{1}{\lambda + iw} \int_0^\infty e^{-iws} x(s) ds \\ &= \frac{1}{\lambda + iw} X(w) \end{aligned}$$

利用熟知的 Parseval 恒等式可知

$$\| y \|^2 = \int_0^\infty |y(s)|^2 ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |Y(w)|^2 dw$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{|X(w)|^2}{\lambda^2} dw = \frac{1}{\lambda^2}\| x \|^2$$

因而,对任何正实数 λ_0,$\lambda_0 I - A$ 是 $D(A)$ 到 X 的一一对应并且 $\| (\lambda_0 I - A)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{\lambda_0}$. 设 $x_n \in D(A)$,$x_n \to x$,$Ax_n \to y(n \to \infty)$,则有$(\lambda_0 I - A)x_n \to \lambda_0 x - y$,即 $x_n \to (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x - y)$,再注意到 $x_n \to x$ 可得 $x = (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x - y) \in D(A)$,并且 $Ax = y$,由此可知,A 是闭线性算子.

例 1.1.6　设 $X = L^2(0.1)$,在 X 上定义算子为:

$$D(A) = \{x \in X : x' \in X\}$$
$$(Ax)(s) = x'(s)$$

则 A 是 X 上的稠定闭线性算子.

事实上,由于多项式类在 $L^2(0.1)$ 中稠密,而多项式类包含在 $D(A)$ 中,因而$\overline{D(A)} = X$.

下面证明 A 是闭线性算子. 为此,设 $x_n \in D(A)$,$x_n \to x$,$Ax_n \to y(n \to \infty)$. 由于

$$|x_n(0) - x_m(0)|^2 = \int_0^1 |x_n(0) - x_m(0)|^2 ds$$
$$= \int_0^1 |[x_n(s) - x_m(s)] - \int_0^s [x_n{}'(\xi) - x_m{}'(\xi)] d\xi|^2 ds$$
$$\leqslant \int_0^1 |x_n(s) - x_m(s)|^2 ds + \int_0^1 |x_n{}'(\xi) - x_n{}'(\xi)|^2 d\xi$$
$$\to 0(n, m \to \infty)$$

因而 $x_n(0)$ 是 Cauchy 数列,于是,存在实数 α,使得 $x_n(0) \to \alpha(n \to \infty)$. 注意到

$$\int_0^1 |x_n(s) - \alpha - \int_0^s y(\xi) d\xi|^2 ds$$