

HUXUEJIANSHI

数学简史

潘德松 沈金钊 译

知识出版社

Б. В. БОЛГАРСКИЙ ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Издание Второе, Исправленное И Дополненное

минск «Вышэйшая Школа» 1979

数 学 简 史

〔苏〕Б. В. 鲍尔加爾斯基 著

潘德松 金 钊译

知 识 出 版 社 出 版

(上海古北路650号)

新华书店上海发行所发行 上海海峰印刷厂印刷

开本 850 × 1156 毫米 1/32 印张 9.25 插页 2 字数 224,000

1984年1月第1版 1984年1月第1次印刷

书号: 13214·1012 定价: 1.15 元

内 容 提 要

这是一本通俗的数学发展简史。阿基米德、牛顿、莱布尼兹等数学大师的生平和工作得到了恰如其分的介绍。本书对史前期数学发展的叙述是颇有启发意义的。东方各国对数学发展所作的贡献也得到了较为充分的反映。本书可供中学数学教师教学参考，以及对数学有兴趣的广大读者丰富数学知识和提高数学修养之用。

作者的话

《数学简史》第二版的主要目的与第一版(1974年)一样,就是帮助苏联普通中学和师范学院的教师,在数学教学中收集必需的重要历史资料。现经修订出版的这本书,对第一版中的缺点已作了修改,补充了一些新的章节,同时也添入了一系列扩大视野的补充材料。特别增加了新的两节:“中国古代数学”和“略论现代数学”。增加了空间概念发展的补充资料。对阿基米德一段作了补充。较大幅度地扩充了论述印度数学的章节。在中亚和近东民族数学发展的一节中,列入了关于阿尔-比鲁尼,阿尔-法拉比著作的简述,并扩充了关于阿尔-卡西著作的资料。在“建立变量数学的时期”一章中,补充了关于费尔马的资料;列入了关于 G. 罗伯瓦, C. 惠更斯著作的简述;增加了数学家与迷信宗教的人进行哲学斗争的资料,特别是与 J. 贝克莱的斗争;提供了 L. 卡诺著作的概况和马克思列宁主义经典著作关于微分概念原理的知识,还提供了 K. 维尔斯特拉斯著作的概况。在“十八世纪和十九世纪初西欧几何学发展概况”中,增加了关于 W. 鲍耶和 J. 鲍耶,以及 F. 黎曼著作的资料,引用了苏联现代数学的补充资料。

在 1974 年《数学简史》初版问世以前,喀山列宁大学物理数学博士 B. Л. 拉普捷夫教授仔细地审阅了原稿,并提出了一系列宝贵意见,在定稿时我都采纳了。拉普捷夫教授所作的巨大工作,对我的写作有很大帮助,在此向他深表谢意。

本书初版问世后收到很多评语,其中三点在这里提一下。1976 年第 3 期《数学教学》杂志上刊登了 B. A. 罗森费尔德教授的一篇评论,它对我的著作作出了详细的评述,提出了出版第二版的

愿望,并对再版书提出许多建议。Б. А. 罗森费尔德对第二版的原稿也作出详细的评述,其中有许多有益的指点和建议。我很高兴本书受到如此多的数学史科学代表的细心审核,就我自己来说,我应当尽可能地改正 Б. А. 罗森费尔德教授已经指出的缺点,并向他表示深切的感谢。

梯比里斯师范学院副教授 П. К. 塔瓦特基拉得给本书的评论(《教师报》1975年3月16日第33号),约什卡-奥列斯基师范学院副教授 В. К. 斯麦什略也夫发表在《苏维埃鞑靼》报上的评论(1975年5月14日第111号),显然都促进了本书再版的实现,我对他们也表示深切的感谢。

作者

前 言

本书阐述从古至今数学发展的主要阶段。

本书以广大读者为对象，主要是中学的数学教师和高年级学生，以及师范学院的数学教师和学生。

《数学简史》第一版是在已故的 B. П. 奇斯佳科夫校勘之下出版的。凡是奇斯佳科夫所作的注释，都注有“B. П. 奇斯佳科夫注”字样。

苏联科学院院士 A. H. 柯尔莫戈洛夫把数学发展的历史划分为四个主要时期：1) 数学的产生；2) 初等数学；3) 变量数学的建立；4) 现代数学。

鉴于本书的基本宗旨，我们在书中主要只列入前三个时期中的问题。

我们指定这些时期时，绝对不想在数学史中引进严格区分一个时期与另一个时期的某种界限。但是，受人类经济和社会发展制约的文化的普遍发展，总是把这种文化所固有的任何一个独立部门的特点载入每一个历史阶段。

第一个时期——数学产生时期。我们认为，可以把这个时期分为两个阶段：1) 数学的史前史；2) 最初的数学知识积累阶段。

数学史前史。这是人类建立最初数学基本概念的时期。可是，这个时期并没有留下任何物质的痕迹：无论是文字记载，或是建筑的和雕塑的遗迹以及其他等等。这一时期在数学史上的主要贡献，是人类逐渐地产生了自然数的概念，计算的方法，并认识了最简单的几何形式。

最初的数学知识积累时期：我们认为，这个时期人类已经形成

某种社会集团并可看作古代国家。在这个时期已经出现数的写法，数的算术运算，形成了某些几何的实际知识，解答最简单的代数性质的题目。然而没有概括出精确的写法，也没有严格的理论根据。

数学发展的下一个历史阶段是初等数学时期（从公元前六世纪到公元十七世纪），也可以称为常量理论的发展时期。它的特征是，人类从数学领域里获得了有理论根据的实际知识。在这个时期，逐渐形成了初等数学的主要分支：算术，几何，代数，三角。

最后，建立变量数学的时期。这是本书中讨论的最末的一个时期。在这个时期（十七~十九世纪），以无穷小量理论为基础的变量进入了数学。

无穷小量的产生和数学新分支解析几何、微积分和概率论的建立，就是这个时期的主要论题。这些论题将在介绍这个时期的数学发展时加以阐明。

关于现代数学的发展问题，我们在指出某些发展的特点之后，在本书的结束语中述及这个问题。

目 录

前 言	(I)
第一章 数学的史前史	(1)
整数、记数法和空间形式概念的起源与发展	(1)
第二章 最初的数学知识积累时期	(12)
古代东方国家数学的发展	(12)
第三章 常量理论的发展时期	(31)
古希腊数学的产生和发展	(31)
古罗马的数学和欧洲数学知识的衰落时期	(75)
中世纪印度数学的发展	(81)
七世纪到十五世纪中亚和近东民族数学的发展	(92)
西欧数学家在数学领域内独立发现的最初时期	(106)
科学和艺术复兴时期	(111)
对数的发展	(128)
第四章 建立变量数学的时期	(137)
十七世纪数学的发展过程	(137)
十八世纪西欧数学分析发展概况	(182)
十八世纪和十九世纪初西欧几何学发展概况	(195)
十九世纪西欧数学发展概况	(204)
第五章 俄罗斯数学的发展	(213)
古俄罗斯的数学	(213)
十八世纪俄罗斯数学的发展	(223)
十九世纪俄罗斯数学的发展	(234)
结束语 略论现代数学	(273)
人名译名对照表	(276)

第一章 数学的史前史

整数、记数法和空间形式 概念的起源与发展

数学正如许多其他科学一样，是从离我们极其遥远的人类生存时期开始的，那个时期未曾留下任何书面的文献，因为最基本的数学概念在人类发明记录自己思想的符号之前很早就产生了。然而研究文化落后民族的日常生活、他们的语言和传说，以及研究具有高度文化水平的民族的语言发展和故事，这些研究成果使我们能够断定，由于生产力和生产关系的发展，人们的心理活动也随之发展。同时越来越明显的是，人类以辛勤的劳动，在数千年间形成了数学的基本概念。在我们面前展现出人类逐渐产生的最初、最简单的数学概念，特别是数的概念。

数是我们生活中表示一切数量关系的尺度。因为数量变化在大多数的数学关系中具有重要的意义，我们应该把数量变化这个概念的发展问题，放到研究整个数学概念发展的首位。

然而，人类在何时和怎样才产生出数的概念的问题，依靠间接研究的方法是得不出精确结论的，因为具有高度文明的民族对落后民族的生活进行研究，只是在当落后民族中最落后的已经处于中等野蛮程度时（根据 F. 恩格斯的术语），也就是在他们已经晓得取火和用火，制造初期打猎用的石头武器，发明了弓箭，制作木头餐具和其他器具，以及用简陋小船作为交通工具的时候才开始的。不论研究家们深入到哪里，也不论他们与怎样的部落相遇，他们从每个部落那儿都已经找得出一些数学概念。现代研究家们从事研



B. B. 巴 贝 宁

究某些文化落后民族的生活状况和日常生活，从他们那儿还能发现一些数学发展的标志，据此我们足以清楚地想象出，人类是怎样逐渐地，一步步地获得了数量关系方面的最初知识的。

个别研究家和旅行者有机会作出的系统观察结果，经过了严格的科学整理。在这方面俄国数学家 B. B. 巴贝宁 (1849~1919)、M. E.

瓦申卡-扎哈尔琴科 (1825~1912)、H. M. 布勃诺夫等的著作起了相当巨大的作用。我们运用这些著作和某些外国著作的结论，就能较可靠地把人类获得的最初的数量规律性方面的知识，即数学知识复原出来。

人类从“多”这个概念中，分出“一”的概念，这被认为是人类经过最困难的阶段才作出的数的概念。分出“一”的概念，想必发生在人类处于低级发展阶段。B. B. 巴贝宁把这种分出解释为，人通常总用一只手拿一件物品，根据他的见解，这便把“一”从“多”中分了出来。因此，巴贝宁认为计数的开端就建立了由“一”和不确定的“多”这两个概念构成的计数法。

例如，曾经生活在巴西的保托库德部落就只用“一”和“多”两个词来表达数（在巴西被占领期间，由于欧洲人对他们的残酷迫害和杀戮，这个部落现在几乎濒于灭绝）。对于数“二”的出现，巴贝宁也解释为可能是由于用双手各拿一件物品。在计算的初级阶段，人们把这个概念与双手中各有一件物品联系起来了。表示“三”的概念时则遇到了难题：人没有第三只手。当人们领悟到可以把第

三件物品放在自己的脚边时,这道难题也就解决了。这样,“三”的特征就是举起双手和指定一只脚。由此比较容易地将“四”的概念区分出来,因为一方面两只手与两只脚形成对照,另一方面能够在每只脚边各放一件物品。在发展计数的初级阶段,人们还绝对不会使用数的名称,在表达数时或者用实际拿在手上或放在脚边的被数物品,或者就靠相应的身体动作和手势。

计数的继续发展,大概与那个时候人类熟悉狩猎和捕鱼等生产方式有关。为了从事这些生产,人们不得不造出简单的工具。此外,人们进入寒冷地带,这就迫使他们制作衣服和创造加工皮毛的工具。

原始公社社会随着对食物、衣服和武器作适当的分配也逐渐缓慢地形成了。所有这些状况迫使人们以某种方式对公共财富进行计算。为占领新领土,他们不得不对与之战斗的敌人的力量和其他等等作出统计。计算的过程已经不能停留在“四”上,应当不断地发展。

在这个发展阶段中,人们已经抛弃了必须将被数的物品拿在手中或置于脚边的做法。数学中发生了第一次抽象,这就是把一些被数物品用另外某些彼此同类的物品或标记来代替:如用小石块、绳结、树枝、刻痕。根据彼此一一对应的原则进行这种计算,也就是给每个被数物品选择一个相应的东西作为计算工具(即一块小石子,细绳上的一个结子等等)。这种计算方法的痕迹至今在许多民族中还保留着。有时候为了不致丢失这些简陋的计算工具(小石块、贝壳、核),而把它们串在细绳或小棒上。到后来就导致创造出至今还有用的更完善的计算工具:俄国算盘和中国人发明的中国算盘。

当人们领悟到离自己最近的和天生的计算器——自己的手指时,计算的发展才大幅度地加快了。可能,第一次用手指计算的行为是用食指去指物品,当时手指起了一定的作用。手指参加计算,

帮助人们越过了数“四”，因为当开始用一只手的所有手指计算相同的个体时，就能够一下子把数数到五。

计算的继续发展要求计算工具更加复杂，人们在开始使用第二只手的手指时，找到了这方面的出路。尔后又扩展到使用自己的脚趾，因为对不穿鞋子的部落来说，利用脚趾是很自然的事。在此情况下，把这种刻板的计算加以扩充，显而易见，在一一对应时，就产生了同时使用手指和脚趾的可能性，在某些民族中表现出这种情况。

例如，南美洲的印第安人，为了表示数“二十”，就把手指和脚趾合在一起。

在我们所描述的那个时代里，人们经济上的计算，只限于把与敌人交战中缴获的食物和衣服进行分配，之后就没有必要再记住计算时出现的数，所以计算时也就不需要数的名称，而主要是借助于相应的手势进行计算。

比如，分布在印度洋畔孟加拉湾的安达曼群岛上的当地居民（这些居民全被殖民主义者消灭了），没有表示数的词，当要计算时就用这样或那样的手势来作说明。由此可见，用打手势计算就象遗迹一样，长期地保存在许多没有产生口头读数的民族里。

农业成为生产的主要方式时，口头计算才刚刚开始发展。在这个时期逐渐产生了以田地、菜园、畜群为对象的私有财产。土地、家畜的拥有者将牢固地与他的财产联系在一起，于是不仅被迫计算属于他们的财产，而且要记住它们的数目，这种情况推动着人们走上创造数的名称的道路。起初，记忆是用极拙劣的方法：借助被记物品的外表特征恢复记忆。例如，犍牛的拥有者要记住他的一群牲口的数目，是根据一只犍牛是灰色的，另一只是黑色的等特征来记忆的。无疑，当要记住数目较大的物品时，这样的记忆方法就不能适用。

应当承认，要表述几个个体的总和，是数的名称发展的下一个

阶段。例如，表示两个物品的数的名称时，就用“就象我有几只手这样多”这句话来替代，表示数的名称“四”的句子，说成“就象牲口有几只脚那么多”。总之，主要是用人和动物的身体部份作为对一些物品的口头表达。

后来在许多民族中，这些叙述的语句被相应单词的名称所代替。这样一来，这些名称便作为数字巩固下来。例如，数“二”用词“耳朵”、“手”、“翅膀”表示；“四”表示为“驼鸟的脚趾”（四趾的），等等。

手指计算逐渐引起了计算的调整，人们自觉地想法使数的口头表达简单化。例如，应该与表示数“十一”相符的“两只手上的十个手指和一只脚上的一个脚趾”，被简化为“脚的一趾”；为了表示数“二十三”，把“两只手上的十个手指、两只脚上的十个脚趾和别人的三个手指”，简单地说成：“别人的三个手指”。

当时类似的简称导致了划分出更高一级的单位。事实上，诸如此类的名称，如表示五的“手”，表示十的“双手”，表示十五的“一只脚”，表示二十的“人”等等，都是为表示比手指更高一级的单位所用的，而手指起的是低级单位的作用。在这种意义上，表示六的说法“另一只手的一个手指”，可以看作“第二个五个手指中的一个”，或者看成“五与一”，这里一是低级单位，而“五”，即“手”，是高级单位。正是这样，表示十二的名称“一只脚上的两个脚趾”表明，从第二个十个中取出两个一；假如换成这样的句子：“双手与两指”也行，这里“双手”在与手指的关系中起到了高级单位的作用。这样一来，独特的记数法也就已经形成了。

二进位制被认为是最古老的记数法。它出现在人们还没有用手指进行计算的时候，也就是在一只手是低级单位，一双手和一双脚是高级单位之前的时候。我们甚至到今天还可以在高度发展的民族中找到二进位制记数法的痕迹；譬如说，人们有时希望用一双、一对来数数。在古俄罗斯的货币体制中，我们碰到以二和四来

作为货币单位($\frac{1}{2}$ 戈比, $\frac{1}{4}$ 戈比),这也是二进位制的遗迹。澳大利亚和玻里尼西亚群岛的某些民族,至今还保留着二进位制记数法。

例如,在托列斯峡^① 群岛上的某些部落里,只有一——“乌拉勃”和二——“阿柯扎”。就靠这两个数进行计算。在他们的语言中,“三”用“阿柯扎、乌拉勃”表示,“四”是“阿柯扎、阿柯扎”,“五”是“阿柯扎、阿柯扎、乌拉勃”,“六”是“阿柯扎、阿柯扎、阿柯扎”等等。

人们采用手指计算,这就使各种记数法创造出来了。

五进位制被认为是手指记数法中最古老的。这个记数法,据推测起源于美国,并得到充分推广。它在人们运用一只手的手指进行计算的时期就建立起来了。显然,使用这种记数方法,每当一只手的手指全部数完,某一外部的记号也就形成了。时至今日,在一些部落中还完全地保持着五进位制(例如在玻里尼西亚群岛和美拉尼西亚群岛的居民中)。

记数法沿着两条道路继续发展。没有停留在只用一只手的手指计算的部落,转向利用第二只手的手指,并继而用脚趾来计算。此时一部分部落仍停留在只用双手计算,这就奠定了十进位制记数法的基础。而另一部分部落,想必是大部分部落,推广了用脚趾计算,从而成为建立以二十为基数的记数制的前提。这种记数制主要在北美相当大部分的印第安人部落,中美和南美的土著居民,以及西伯利亚北部和在非洲得到推广。

目前,十进位制记数法在欧洲民族中占优势。然而这并不意味着,这种记数法在欧洲始终是唯一的:某些民族很晚才改用十进位制记数法,而先前用的则是其他的记数法。

在产生二十进位制时,具有20个指趾的“人”就成了天然的高一级单位。在这种进位制中,40表示为“两个人”,60表示为“三个

^① 托列斯峡是介于澳大利亚北部的约克角半岛与伊利安间的海峡。连接印度洋和太平洋诸海,宽170公尺,属浅水峡,有许多岛屿、岩石、珊瑚礁。——译者注

人”等等。二十进位制有个较大的缺陷：为了用语言表达，对 20 个基数必须有不同的名称。因此，当十进位制在一些部落中发展后，许多运用二十进位制的部落就逐步地采用十进位制，而抛弃了二十进位制。据推测，人们开始穿鞋以后，脚趾被遮起来，不能再用两个十只直接计算，这也促进了由二十进位制向十进位制过渡。在现代，二十进位制在所有民族中都已完全消失了。这种进位制通常归并成十进位制或者五进位制。然而这种进位制的痕迹，甚至在一些文化达到高度发展的民族中，仍然保留在数的名称中。

例如，法国人表示数 80 用单词 quatre-vingts（四倍的二十），而 90 则用单词 quatre-vingt-dix（四倍的二十与十）。格鲁吉亚人把数 40、60 和 80 称为厄尔姆沃则、萨姆沃则和阿特赫姆沃则，即 2×20 、 3×20 和 4×20 （这里的“沃则”就是 20，“厄尔”就是 2，“萨姆”就是 3，而“阿特赫”就是 4）。数字 30、50、70 和 90 称为沃则达基、厄尔姆沃则达基、萨姆沃则达基和阿特赫姆沃则达基，也就是 $20 + 10$ 、 $2 \times 20 + 10$ 、 $3 \times 20 + 10$ 和 $4 \times 20 + 10$ 。

某些部落用来作为计算工具的不是手指本身，而是它们的关节。在这种情况下，这样的计算有时也会有效地发展，并且形成严整的系统。这种计算过程是这样进行的：一只手上的大拇指是这只手上其余手指关节的计数器；因为在这只手上其余四个手指中每一个手指上各有三个关节，所以在最后的关节数 12 的后面是高一级单位，这就形成了十二进位制记数法。有时候这个过程不是停留在十二进位制上，而是继续下去，并且另外一只手上的每个手指也作为高一级的单位，即 12，于是数完第二只手上所有的手指以后，建立起新的高一级单位 12×5 ，也就是 60。可能是这种类型的计算促进了建立六十进位制记数法，这种记数法在古代巴比伦广为流行，并在稍晚的时候流传到别的民族。不过，关于六十进位制记数法的起源，存在着另一种可能是有足够根据的意见。在下一章里，我们将会接触到这个问题。

十二进位制和六十进位制记数法的痕迹直到现在仍然有所保留。只要想一想一昼夜钟点的计算,用度、分、秒测量角度,在革命前的俄国实行过的打和罗^①的计算就明白了。

这样逐渐地在经济性质要求的影响下,人类慢慢地创造出计算的方法,最后达到了严整的程度。后来,这个方法在尚未成为现代数学所使用的方法的时候,得到不断的完善和简化。

人们的积极劳动,生产力和生产资料的发展,迫使人们将初等计算与自己增长着的需求和智力的发展相适应。在这种初等计算的基础上,生活现象数量方面的表达者和发展人类文化技术忠实的同路人——现代宏伟的数学大厦落成了。

* * *

如果说,劳动过程的发展和财产的出现,迫使人们发明数和数的名称,那么人们经济需求的增长,更引导人们对数的概念日益扩大和加深。当具有或多或少要求统计财富和建立税收制度的复杂国家机器的国家出现时,以及当商品交换转入用货币进行贸易的发展阶段时,就这个意义上来说,数的概念出现了特别大的发展。一方面引起了书面数字的产生,另一方面计算业务开始发展,也就是出现了数的运算。

上面我们已经讲过,早在远古时代就已产生了数的某种记录:所有这些结子、刻痕、串在细绳上的贝壳,不外乎是记录数的萌芽。但是,当贸易规模扩大时,开始出现了巨大的数,就不可能用这种以物计数的方法表达巨数。同时贸易业务要求计算更加复杂:出现需要几个数的和,进行减法、乘法和除法运算;用以前的原始方法进行这类计算已经感到不方便。这时候人类就逐步地过渡到书写数。

此外应当指出,在人们的生活需求普遍增长的同时,人类社会中紧密依赖于生活的要求也普遍增长,除数和计算以外,还逐渐发

^① 罗——商业用语,一罗即十二打。汉字译自英语 gross。——译者注

展着思维和实践活动的另一个分支，这个分支成为进一步发展数学知识的基础，这就是人们发明了各种度量和测量方法。如果数的概念促进了数学的一个主要分支——分析的发展，那么人们对周围的物体及其形状的观察和各种测量方法的发展，都促进了数学的另一个分支——几何学的产生。

我们已经简要地探讨了作为分析基础的数的概念的产生，至于说到产生几何性质的概念，那么首先应该指出，人们对周围物体各种各样的形状的认识，具有头等重要的意义。几何概念起源的历史，就它的性质而言，俨如产生数和计算的历史。产生最初的空间形式是在史前时期。每个人从自己一诞生起就处在极其丰富的大自然环境之中；在与大自然的直接接触中，他不由自主地开始感到每个物体的个别特性。人们从这种环境中采用了最初的几何形式和最初的几何图形。他们不得不在数百万次来往中力求发现最短的道路，就这样人们渐渐地产生了直线的概念。当人们不得不制造最简单的打猎武器——绷紧绳子的弓时，直线的概念就更为明确了。每当人们不得不经常在开阔的牧场上和草原上时，在他们的视野中展现出天空与大地的分界线，这就在无意之中形成了圆周和以它为界的圆的概念；他们还在其他情况下遇到过这样的轮廓：如势必看到天上太阳和月亮的圆盘，而后来正是他们制成了圆形的车轮和器皿。因此，人们在制造日常生活中必不可少的物品时，逐渐地熟悉了他们努力模仿的各种形状。确实，这些形状，在大自然中是见不到的，然而它们作为完美正确的几何图形，被铭记在人们的意识里，类似的概念帮助人们记住它们，在制作日常用品时，帮助人们顺利地把它生产出来。从周围世界中抽象出来的这类概念是最初的几何概念，并且人们为这些概念所起的名称使用了很长时间，有些至今还在应用。如采用于周围大自然的标准器^①，人们在建筑住宅，在用粘土制作必备的器皿，为制造狩猎和

① 即用于计算度量单位的器具。——译者注