〔苏〕多洛费也夫等·上海教育出版社

初等数学问题选析

CHUDENG SHUXUE WENTI XUANXI

初等数学问题选析

上 册

G. 多洛费也夫
〔苏〕M. 波 塔 坡 夫 著
N. 罗 佐 夫

李鸿祥 俞兰芳 译

上 海 教 育 出 版 社

ELEMENTARY MATHEMATICS

SELECTED TOPICS AND PROBLEM SOLVING

G. Dorofeev M. Potapov N. Rozov

MIR PUBLISHERS, MOSCOW, 1980

初等数学问题选析

上 册

G. 多洛费也夫
〔苏〕 M. 波塔坡夫 著
N. 罗 佐 夫

李鸿祥 俞兰芳 译

上海教育出版社出版
(上海永福路123号)
新华书店上海发行所发行 上海市印十二厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 10 字数 219,000
1983年2月第1版 1983年2月第1次印刷
印数 1—45,500 本

统一书号：7150·2771 定价：0.81元

内容提要

本书原是苏联的数学高考复习参考书，内容包括了初等数学中所有的主要部分．与通常的复习参考书不同，这本书的每一节只有简短的内容提要，而主要是通过问题选析的形式，指出了应掌握的定义、定理或法则，讲述了解题方法的规律，介绍了许多特殊的技巧，特别注意逻辑上的严密性．这本书还有一个重要特点，就是分析了一般学生在考试中易犯的典型错误．在每节后还附有适量的练习题．书末附有习题答案或解法提示．本书可供我国中学师生及知识青年参考，师范院校数学系的学生也可阅读．

本书上册是算术与代数部分，下册包括三角、几何与其他内容．

序 言

数学成为物理和技术科学的基本工具已经有很长时间了. 近年来,数学的研究方法逐渐深入到化学、生物学、经济学、地质学、语言学、医学、教育学、心理学、考古学、法律和军事等领域中.

中学初等数学课程是整个数学知识的基础, 不牢固地掌握这个基础课程,就谈不上掌握数学的更高分支,也谈不上在自己的科学实践活动和技术工作中应用数学.

不言而喻,数学知识并不仅仅是记住大量的公式;求解问题在数学中占有核心地位, 但是解题并不只意味着要完成一定数量的演算,最重要的是答案要完整,逻辑上没有破绽. 而这正是学生面临的主要困难, 因为记住一定数量的公式或者按照特殊的步骤做练习, 比之理解问题的实质要容易得多.

本书的目的是帮助中学生弄清解题的逻辑过程, 教会学生反问自己为什么现在要这么做, 并且能回答这一点. 尤其重要的是使学生在解答过程的每一步中都能了解自己已经做了些什么,下面还要做什么. 简而言之,我们试图教给学生怎样合理地解一个题目.

这个方法的特点已贯串在正文中. 与有经验的数学家通常所做的不同, 我们并不总是给出问题的最优或最简捷的解法. 我们力求用没有经验的学生眼光来观察手头的问题, 而这样的学生并没有什么聪明的技巧、手段或特殊解法. 我们用的是对一般水平的学生来说似乎是最自然的解法, 主要的

是这种解法始终非常注重逻辑性，并且做得尽可能地严格。

读者可能发现某些简单的例子被分析得太详细了，但是请不要急于批评这个做法，因为某些问题显得简单也许就是由于没有被深入地研究过。另外，也不是所有的解答都写得很详细。我们希望读者不只是读读本书，而是要用手中的笔和纸来研究它。有大量内容留下来让学生自己去弄清楚，这主要是指一些理论部分和问题解答的某些步骤。

要强调的是，本书不是一本普通的教科书，而是一本这样的书，它将通过一些精心挑选的理论课题和相当丰富的问题解答，使学生扩大和加深他们的初等数学知识，并使他们在高等学校中能更顺利地开始学习高等数学。这里所选的并作详细讨论的是那些通常产生麻烦的课题，或者是因各种原因而没有受到应有重视的课题。初等数学中最复杂和最重要的部分，我们已用详细的题解和随后的讨论作了分析和解释，并特别注意到了分析学生的典型错误。

值得强调的另外一点是，我们仅考虑初等数学中较为传统的课题。我们没有使用解析几何或微积分方法。在几何部分，既未详细叙述公理系统，也不多用集合论术语。

本书以习题形式对每一部分补充了大量的问题。答案在书末给出。

本书对广大范围的读者都是有帮助的。这些读者包括中等学校的学生和师范学院或师范大学的大学生，以及中等或高等师范院校的数学教师。它也可以作为正规教科书的一种补充而用于自学。

G. 多洛费也夫
M. 波塔坡夫
N. 罗佐夫

目　　录

（上　册）

第一章 算术和代数

§1.1 关于算术和代数的一般说明

数学论述中所使用的一切概念必须是被严格地定义了的，这对于学生来说特别重要。当然，仅有的例外是诸如自然数、方程、点、线、平面等这些初始术语。必要的定义在任何一本教科书中当然是都已给出了，但学生习惯于急着用这些概念解题，以致于他们越来越倾向于（常常没有认识到这一点）把初始概念看作是直观上显然的事，而不需要再作什么定义。

在学习数学时，学生时时都应该对所有的数学基本概念有一个清楚透彻的理解（在 §2.1 和 §3.1 中，我们还要讲到这个问题）。

除了定义之外，还有一些关于一个对象或几个对象之间关系的表述（往往用特定的符号表示），关于这些表述的数学约定也是重要的。这些约定本质上是作为一个符号的定义，必须记住。例如，加号“+”用来表示两数之和；符号 a^2 代表数 a 的平方，亦即乘积 $a\cdot a$；a 小于 b，亦即数 $a-b$ 是负的这一事实，习惯上借助于符号“<”，写作 $a<b$。

再回忆一下弱不等号“$\leqslant$”（小于或等于）和“$\geqslant$”（大于或等于）。当在形式变换中应用这些符号时，学生通常并不感到困难；但考试结果表明，很多学生没有充分理解它们的含义。

举例来说，对于“不等式 $2\leqslant 3$ 正确吗？”这个问题，常见的回答是：“不对，因为 2 小于 3”。如果问：“不等式 $3\leqslant 3$ 对吗？”回答常常是：“不对，因为 3 等于 3”。虽然这样回答问题的一些学生常常把某一问题的结果写为 $x\leqslant 3$。然而他们对具体数字之间的符号 $\leqslant$ 的理解却表明，没有一个特定的数能代入不等式 $x\leqslant 3$ 中的 x。这就是说，他们认为符号“$\leqslant$”不能用来联接任何数。

实际上，情况应是这样：由符号 $\leqslant$ 的定义，不等式 $a\leqslant b$ 当 $a<b$ 时被认为是正确的，当 $a=b$ 时也正确。因此，不等式 $2\leqslant 3$ 是正确的，因为 2 小于 3。而不等式 $3\leqslant 3$ 也成立，因为 3 等于 3。

从符号 $\leqslant$ 的这个定义推出，不等式 $a\leqslant b$ 只有当 $a>b$ 时才不成立。因此，符号 $\leqslant$ 不但可以读作“小于或等于”，而且也可以念成“不大于”。于是不等式 $2\leqslant 3$ 和 $3\leqslant 3$ 可以分别读作“2 不大于 3”和“3 不大于 3”。

将同样的讨论用于符号“$\geqslant$”，则它既能读作“大于或等于”，也可念成“不小于”。由符号 $\geqslant$ 的定义，不等式 $a\geqslant b$ 当 $a>b$ 或 $a=b$ 时都成立；仅当 $a<b$ 时，它才不成立。

几乎每个学生都知道，函数 $y=2^x$ 对于一切实数 x 都有定义，他们并能容易地画出这个函数的图象。然而，$2^{\sqrt{8}}$ 常使学生感到莫明其妙。他通常能做的至多是指出如何给出这个数的一个近似计算值。但是理由在哪里？你怎么可以不知道一个数的定义就指望给得出它的近似计算值呢？

为了能说明数 $2^{\sqrt{8}}$ 表示什么，我们要回忆一下一个数的无理数指数幂的专门定义，当然也要回忆其他具有普通指数（零，有理数或负数）幂的定义。注意，具有自然数指数 n 的幂的一般定义不能用于 $n=1$ 时，因为只含一个因子的积是没有

意义的。所以，等式 $a^1=a$ 是数 a 的一次幂的定义。完全相同，零次幂($a^0=1$)也是作为定义引入的。

现在我们来弄清楚为什么等式

$$(\sqrt[3]{a})^3=a \tag{1}$$

是成立的。学生经常通过计算左端来证明。这当然是允许的，但这也恰恰表明，在学生头脑中，处理根号的一些规则已取代了根式的定义。一个数的立方根是如何定义的呢？按照约定，数 a 的立方根就是其立方等于 a 的那个数，习惯上用符号 $\sqrt[3]{a}$ 来表示。因此，在符号 $\sqrt[3]{}$ 的上述约定下，等式(1)只不过是立方根定义的公式表述形式而已。

代数课程中有许多命题(论断)。有一种看法十分普遍：在几何中必须严格论证，有些定理还要利用定义仔细地证明才行；但在代数中，定理只有一个，即韦达定理①，其余的只是些叙述和公式。实际上绝不是这样。甚至和的平方公式也是一个定理，对数函数的一些性质构成了好几个定理。象在几何中一样，代数的每一个定理都必须加以证明，所有初始概念都必须给以定义。

经验表明，一个代数论述越平常、在解题中用得越多，学生也就越是容易忘记：他不但应该能严格地叙述它、应用它，而且还要能证明它。任何时候都要特别注重培养学生证明论断的能力，尤其是证明那些看上去是“自明的”结论的能力。

所有学生都熟悉一元二次方程的求根公式，但是知道怎样导出这一公式的人就不太多了。当涉及有关二次不等式的解的定理时，也会遇到同样的情况。例如，甚至当学生能正确地得出了这种不等式的解时，他还常常不能解释，为什么一个

① 韦达定理就是：一个首项系数为 1 的一元二次方程的两根之和等于未知数一次项系数的相反数，而两根之积等于常数项。

首项系数为正的二次三项式，当两根[1]为实数时，则它在两根构成的区间之外是正的；当两根是虚数时，则对任何实数 x 它都是正的。

其实，关于二次三项式符号的定理的严格证明是非常简单的。

如果二次三项式 ax^2+bx+c $(a\neq0)$ 有实根 x_1 和 x_2（这表明它的判别式是正的），则它可以分解为

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)。\tag{2}$$

因此，对于大于较大根的任意 x，圆括号中的两个因子即 $(x-x_1)$ 和 $(x-x_2)$ 显然都是正的；而对于小于较小根的任何 x，它们都是负的。这就表明，在两种情况下，它们的积 $(x-x_1)(x-x_2)$ 都是正的。因此（2）式右端的符号与数 a 相同。但是，如果 x 位于两根 x_1 和 x_2 构成的区间内，则(2)中一个括号内是正的，而另一个是负的，于是(2)式右端乘积的符号与 a 相反。

这样，我们就证明了下述**定理**：具有正判别式 $(b^2-4ac>0)$ 的二次三项式的值，对于该二次式两根构成的区间以外任一 x，其符号与系数 a 一致；而对两根构成的区间内部的任何 x，其符号与系数 a 相反。

关于二次三项式 ax^2+bx+c $(a\neq0)$ 有等根（即它的判别式为零）时的定理，留给学生自己去叙述和证明。

还有另一**定理**也成立：二次三项式 ax^2+bx+c $(a\neq0)$ 的值，当判别式为负 $(b^2-4ac<0)$ 时，对于任何实数 x 其符号与系数 a 相同。

为证明这个定理，我们配完全平方如下：

---

[1] 这里是指这个二次三项式等于零时所构成的方程的根．如果定义了多项式的零点，就不需要作此补充说明了——译者。

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]. \qquad (3)$$

由于 $b^2-4ac<0$ (此时二次式只有虚根)，方括号中的式子对于任何实数 x 显然都是正的，所以(3)式右端对于任何实数 x 都有与数 a 相同的符号。

当研究**双二次方程**时，学生常常会对碰到困难感到惊奇。看起来似乎不该有什么困难，因为任何一个双二次方程

$$ax^4+bx^2+c=0$$

都能用标准变换 $y=x^2$ 化成一个二次方程。但如果假设所得出的二次方程有虚根 y_1 和 y_2，那么求 x 时就需要求一个复数的平方根. 其实结果倒并不那么复杂，并且适当的公式已在标准教科书中给出。但是，如果不作上述标准变换，而是利用一个特殊的变换将左端因式分解，那么这一切就都可以避免。

这个变换就是在三项式 ax^4+bx^2+c 中配出一个完全平方，并且这种变换仅当二次方程

$$ay^2+by+c=0$$

有虚根时才会给出一个正确结果。

然而在这种情况下，配平方的方式与通常有点不同，这就是：把最高次项和常数项括出，然后再配平方。

假设有一个形如

$$x^4+bx^2+c=0$$

的方程(为简单起见，设 $a=1$，这总是可以办到的)，且方程

$$y^2+by+c=0$$

有虚根。这个条件表明判别式小于零：

$$\Delta=b^2-4c<0 \quad 即 \quad b^2<4c.$$

由此，显然有 $c>0$，且 $|b|<2\sqrt{c}$，即 $b<2\sqrt{c}$。因此我们

能作下述运算：

$$
\begin{aligned}
x^4+bx^2+c&=(x^4+c)+bx^2\\
&=(x^4+2\sqrt{c}\,x^2+c)-(2\sqrt{c}-b)x^2\\
&=(x^2+\sqrt{c})^2-(2\sqrt{c}-b)x^2\\
&=(x^2+\sqrt{2\sqrt{c}-b}\,x+\sqrt{c})\\
&\quad\times(x^2-\sqrt{2\sqrt{c}-b}\,x+\sqrt{c})。
\end{aligned}
$$

已给双二次方程的解现在就化为两个具有实系数的二次方程的解了。

这些相当复杂的公式当然不需要死记；一个好得多的做法是，在每一给定的实例中都作一次配方运算。举例来说，假如要解方程

$$2x^4+2x^2+3=0。$$

首先将它化为

$$x^4+x^2+\frac{3}{2}=0。$$

它的判别式为

$$\Delta=1^2-4\cdot\frac{3}{2}=-5<0。$$

因此，应用前述方法，我们得到

$$
\begin{aligned}
x^4+x^2+\frac{3}{2}&=\left(x^4+2\sqrt{\frac{3}{2}}x^2+\frac{3}{2}\right)-\left(2\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)x^2\\
&=\left(x^2+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-(\sqrt{6}-1)x^2\\
&=\left(x^2+\sqrt{\sqrt{6}-1}\,x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\\
&\quad\times\left(x^2-\sqrt{\sqrt{6}-1}\,x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

现在我们就不必害怕复杂的根式，而只要解两个一元二次方

程就行了。第一个方程

$$x^2+\sqrt{\sqrt{6}-1}x+\sqrt{\frac{3}{2}}=0$$

有负的判别式:

$$\Delta=(\sqrt{\sqrt{6}-1})^2-4\sqrt{\frac{3}{2}}=-1-\sqrt{6},$$

因此它的根为

$$x_{1,2}=-\frac{\sqrt{\sqrt{6}-1}}{2}\pm\frac{\sqrt{\sqrt{6}+1}}{2}i.$$

类似地，可求得第二个方程

$$x^2-\sqrt{\sqrt{6}-1}x+\sqrt{\frac{3}{2}}=0$$

的根，它们是

$$x_{3,4}=\frac{\sqrt{\sqrt{6}-1}}{2}\pm\frac{\sqrt{\sqrt{6}+1}}{2}i.$$

二项六次方程 $x^6+a^6=0$ 同样可归结为这种双二次方程来解(将左端作为立方和展开，并应用前述技巧)。

关于一些定义和定理的叙述有必要再讲几句。教科书常常用语言来叙述定义和定理，而不大用习惯的字母来记。偶尔一次这是可以的，但常常使用时，这就变成很难摘引的表述了。例如，我们可以不必写“任两数的和的平方等于这两数的平方和加上它们的积的二倍”，而简单地写成“对于任何数 a 和 b，有 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$”。对数可方便地定义为:“如果 $a^x=N$ $(a>0,\ a\neq1)$，那么称数 x 是数N的以 a 为底的对数”。

重要的是，要培养把语言叙述和公式表示互相转换的习惯，因为这恰恰是通常证明定理时所需要的。例如，为了要证明“大于1的数对于大于1的底的对数是正的”，我们首先必

须引入一些记号：设底为$a(>1)$，已给数为$x(>1)$，且设$y=\log_a x$；然后再证$y>0$。象这样重新叙述一下也包含了应用定义的必要性。因此，在证明"对于$a>1$，$y=\log_a x$是增函数"之前，必须先回忆一下什么是增函数，然后证明是这样开始的："设$a>1$，且设x_1和x_2是正数，$x_1<x_2$；我们来证明$\log_a x_1<\log_a x_2$。"

公式型的论述总是要用到某些概念的记号表示，这一点并不总是被人恰当地理解了。

正是这个道理说明了，为什么人们不容易一下子认识到，公式(1)就是写成符号$\sqrt[3]{\ }$的立方根的定义。而且也正因为上述道理，等式$a^{\log_a N}=N$ ($N>0$, $a>0$, $a\neq 1$)正是"习惯"上对数语言定义的符号记录。这种记录形式用到了这样一个约定：以$\log_a N$形式表示数N以a为底的对数。

习　　题

1. (a) 什么是循环十进小数？

   (b) $a^{\frac{2}{3}}$是什么？

   (c) 什么是二次方程？

   (d) $\sqrt{11}$是什么？

   (e) 什么是复数的模(绝对值)？

   (f) $a>b$表示什么？

   (g) 什么是无穷递缩等比数列？

2. 说出下列各条是定义、公理、还是定理？

   (a) 如果等式两端乘以同一个数，则它不变；

   (b) 任何数的模都是非负的；

   (c) $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$；

   (d) 函数$y=-3x$的图象通过坐标原点。

3. 等式$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$始终成立吗?

4. 如果一个一元二次方程的判别式是正的，则该方程有两个相异实根。试述逆定理、否定理及逆否定理,这些定理中哪一个是成立的?

5. 试证:如果二次方程的根是虚的,则其判别式小于零。

6. 试用公式描述"数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少有一个等于 α" 这个条件。

7. 试用一个等式表示 a, b, c 这三个数中至少有两个等于零。

8. 如果$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,则关于数 a 和 b 能说些什么? 从函数 $y=\frac{1}{x}$ 的什么性质可以得到关于这个问题的答案?

9. 试用数学关系式陈述下面论断:函数 $y=3x-x^2$ 当自变量在从 -1 到 $+1$ 的区间内变化时是递增的。

10. 试问:"一个数的诸位数字之和能被 3 整除"是该数能被 12 整除的必要条件、充分条件、还是充要条件?

§1.2 整数、有理数、无理数

算术中许多部分的问题经常给学生带来困难，这往往由于下述原因所致:算术是在低年级中学习的,很多结果在那里不加证明就给出了，并且这些材料此后再也没有被论及。但是,这并不降低诸如自然数的可除性、分数性质、比例理论等内容的重要性。

高年级的学生必须知道这些结果的陈述，并且也应该能证明它们(譬如说,推导出某一条可除性准则)。

举个例子,假如我们要证明关于能被 9 整除的准则:已知一个自然数 $N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$ (注意,右端并不是 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ 各数的乘积，它表示十进制下的一个 $n+1$ 位整数)，其中 $1\leqslant a_n\leqslant 9$, $0\leqslant a_{n-1}\leqslant 9$, $\cdots$, $0\leqslant a_1\leqslant 9$, $0\leqslant a_0\leqslant 9$。我们必须证明两个论断:

(a) 如果数N的各位数字之和

$$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$$

能被 9 整除，则N本身能被 9 整除。

(b) 如果数N能被 9 整除，则它的各位数字之和能被 9 整除。

根据十进制的位置原则，我们有

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\cdots$$
$$+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0.$$

由于对任何自然数 k 有 $10^k=\overbrace{99\cdots9}^{k\text{个}}+1$，因此得

$$N=[a_n\cdot\overbrace{99\cdots9}^{n\text{个}}+a_{n-1}\cdot\overbrace{99\cdots9}^{n-1\text{个}}+\cdots+a_2\cdot99+a_1\cdot9]$$
$$+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0). \qquad (1)$$

显然，方括号里的数能被 9 整除，因为它的每一项均可被 9 整除。如果 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0$ 能被 9 整除，则由(1)式知，数N显然也能被 9 整除。这就证明了论断(a)。论断(b)同样可从考察(1)式得出：如果左端(数N)能被 9 整除，由于右端的第一个被加项(方括号中的数)能被 9 整除，因此推出右端第二项(N 的各位数字之和)必能被 9 整除。

在一些问题的解法中，很多算术结果常常是有用的。现在我们使用字母符号来复习它们之中的一些性质。

1° 如果有两个整数① a 和 b，$b>0$，则有唯一的整数 q 和唯一的整数 r，$0\leqslant r<b$，使得

$$a=bq+r. \qquad (2)$$

等式(2)就是数 a 被 b 除时的带余除法。特别地，由于(2)，显然有：任何偶数都具有 $2k$ 的形式，这里 k 是一个整数

① 数 1, 2, 3, … 称为自然数(正整数)，数 …, −2, −1, 0, 1, 2, 3, … 是整数。将整数集写为 0, ±1, ±2, … 是方便的。