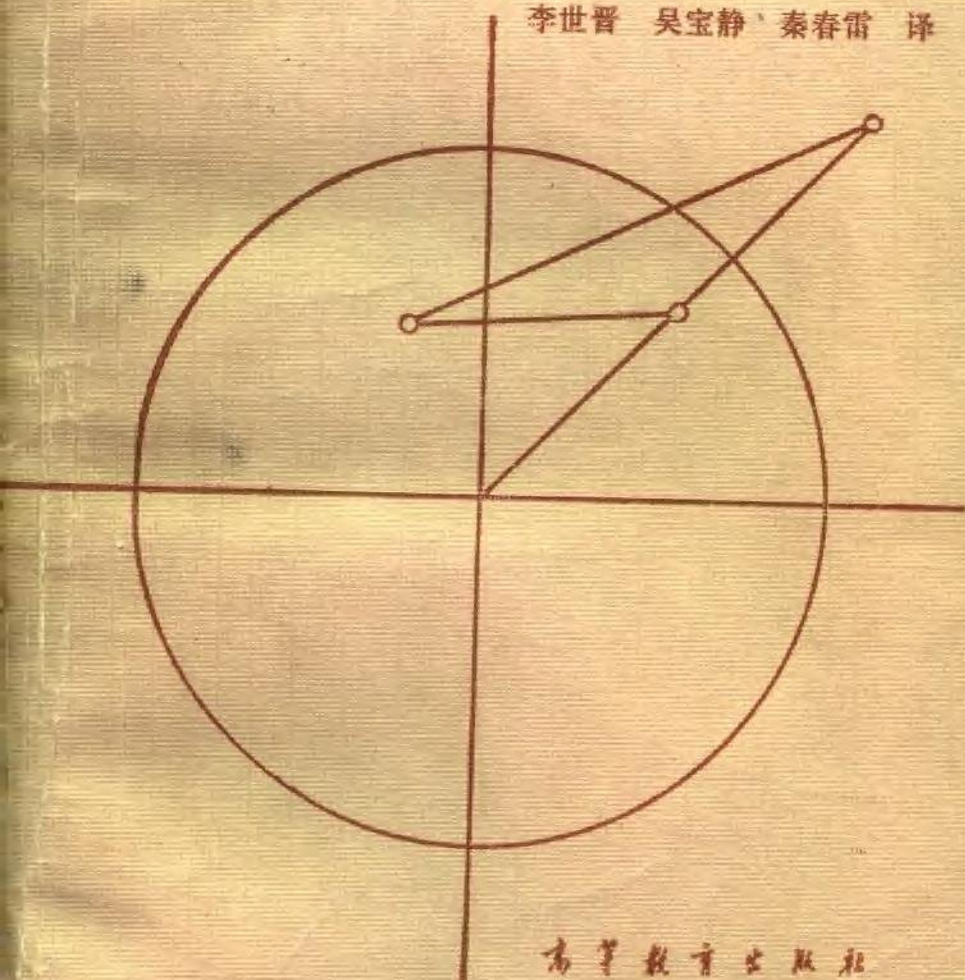
〔美〕 F. B. 希尔德布兰德 著

# 应用数学方法

李世晋 吴宝静、秦春雷 译



高等教育出版社

# 应用数学方法

〔美〕F. B. 希尔德布兰德 著
李世晋 吴宝静 秦春雷 译

高等教育出版社

# 内容简介

本书是根据美国Prentice-Hall公司出版的，由弗朗西斯B.希尔德布兰德(Francis B. Hildebrand)著应用数学方法(Methods of Applied Mathematics)1965年第二版译出。

全书共分三章：(一)矩阵及线性方程，(二)变分法及应用，(三)积分方程。各章之间基本上互不依赖。每章配有大量练习题和附加提示的习题。

读者对象是高等院校的理工科师生及科技工作者。


**应用数学方法**

〔美〕F. B. 希尔德布兰德 著

李世晋 吴宝静 秦春雷 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

顺义小店印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.5 字数 299,000

1986年1月第1版 1986年1月第1次印刷

印数 00,001—12,220

书号 13010·0890 定价 3.15元

# 序　　言

本书的主要目的在于为工程师和物理学家要掌握的灵巧的工作知识奠定基础，它所涉及的是某些数学领域的论据和方法. 这些内容在“高等微积分”类型的课程里常常得不到讲述，而在各种应用领域里却很有用.

在应用领域里，许多学生既没有时间也没有意愿来按照经典观点学习这些题材的每一处细节. 然而，有效的使用这些论据和方法首先得对其原则赖以建立的基础有一个深刻的理解. 基于这一理由，贯穿全书始终都注意于对所阐述的论点要么给出严格证明(当相信它对所期望的结果有所帮助时)，要么把结果尽可能准确地陈述出来,并指出为什么能形式地把它预期到.

在每一章里，讲述的内容除包括示出典型问题会是怎样产生的,以及建立具有实际重要意义的那部分理论外,还包括关于解析的和数值分析的推演方法和解题手段等.

尽管本书是以具备高等微积分水平课程的经历作为假定起点,但是教材的处理却大体上是自成体系的,因此对这一类先修课程可不必过于重视.

为了扩大本书作为一本基础或补充教材，又是作为一本参考书的作用，在组织材料时力求作到各章之间极少牵扯到本质上的互相依赖性，而在各章内部则更多着眼于内容删减上的灵活机动性. 此外，在每一章后面除按照各节顺序配有各种难度的大量练习题外，还有相当数量的补充材料收入附加提示的习题中. 所有习题的答案或结合于习题的叙述之中,或给出于本书之末.

第一章主要讨论线性代数方程，二次型与埃尔米特型以及向

量与矩阵的运算，其中特别着重于特征值概念的运算上. 在函数空间中还对相应的结论给出一些简要的叙述以资比较和参考. 虽然有待讲述的材料是很多的，但在这里特别把注意力放置在证明的安排上以便在取舍内容时能获得最大的机动性.

第二章前一部分介绍变分记号并对变分法中与很大一类问题相关的欧拉方程进行了推导. 与通常教材相比本书更多地着重于自然边界条件的重要性上. 广义坐标，哈密顿原理以及拉格朗日方程都是在这一理论框架内阐发和举例的. 随后，通过对较一般类型的极小原理的表述的讨论以及运用变分法的直接和半直接法求实用问题的精确解和近似解作为本章的结束.

最后一章讨论线性积分方程的表述及其理论，求它们的解的精确方法和近似方法，其中又特别着重在对格林函数所作的几种解释上. 在这一章里有大量补充材料充实于附加提示的习题中.

本书是 1952 年印行的第一版相应各章的修订版本，它包括在写法上的，记号上的以及某些新材料上的和附加习题及练习题等的一些修改. 前版中差分方程和有限差分法两部分内容将另以增订版的形式印行.

在数学严密性与实际意义之间搞一点折中还是有必要的. 尽管如此，本书所希望的是能为工程师和物理学家深入到高等应用数学领域(他们对此的需求是在不断增长着)开辟一条道路，同时既不把现存的某些困难(有时通过“可予证明”这句话来加以暗示)对他们掩饰起来，也不忘告诫他们，超出已经妥善建立起来的有效范围而企图从形式上照搬该方法所必将招致的某些危险.

著者对于各方面同事和同学们在本书选材和订正内容和编写上所给予的盛情帮助，特别对于 A. A. 贝内特教授的许多极有价值的批评和建议，表示感谢.

F. B. 希尔德布兰德

# 目　录

# 第一章　矩阵及线性方程

**1.1. 绪论.** 在许多分析领域里我们发现需要处理一些元素的有序集合，元素可以是数也可以是函数. 特别，我们可能处理如下形式的一般序列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

或由 $m$ 行和 $n$ 列组成的一个按矩形排列的二维阵列

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn}. \end{matrix}$$

当有适当的相等律，加法律，减法律，乘法律和这样矩形列的集合相结合时，就叫这类阵列为矩阵，并用特殊符号表示. 用这样方式来规定这些组合法则无非是要使如上定义的矩阵不论从实际上还是从理论上来考虑都是经常有用的.

因为矩阵和线性代数方程组结合密切，所以希望用初等方法研究这些方程组的解的一般性质，从而为以后一些定义和研究准备了基础.

**1.2. 线性方程. 高斯-约当简化法.** 首先处理求有 $n$ 个未知变量 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 的 $m$ 个线性方程组的解的问题，用直接计算法，其式为

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=c_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=c_m \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

假设(1)确实有解，高斯-约当简化法可按照下面步骤进行：

**第一步．**设 $a_{11}\neq 0$(否则就重编方程或变量的号码使所设成立)，用 $a_{11}$ 除第一个方程的两边，从而所得的等价方程具有这样的形式

$$x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1n}x_n=c'_1. \tag{2}$$

相继用 $a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{m1}$ 乘(2)式的两边，并用所得各方程去减(1)式的第二，第三，…，第 $m$ 个方程，把(1)式化简为下形

$$\left.\begin{aligned} x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1n}x_n&=c'_1\\ a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n&=c'_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ a'_{m2}x_2+\cdots+a'_{mn}x_n&=c'_m \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

**第二步．**设 $a'_{22}\neq 0$(否则就重编方程和变量的号码使所设成立)，用 $a'_{22}$ 除(3)中第二个方程的两边，则方程的形式成为

$$x_2+a''_{23}x_3+\cdots+a''_{2n}x_n=c''_2, \tag{4}$$

和第一步一样，用此方程消去(3)中所有其他方程中 $x_2$ 的系数，则方程组变为

$$\left.\begin{aligned} x_1\quad+a''_{13}x_3+\cdots+a''_{1n}x_n&=c''_1\\ x_2+a''_{23}x_3+\cdots+a''_{2n}x_n&=c''_2\\ a''_{33}x_3+\cdots+a''_{3n}x_n&=c''_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\ a''_{m3}x_3+\cdots+a''_{mn}x_n&=c''_m \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

**剩余步骤．**把上面的过程连续进行 $r$ 次一直到终了，也就是一直进行到 $r=m$ 或一直到第 $r$ 个方程以后的所有方程的所有 $x$ 的系数为零．当 $m>r$ 时，我们把这 $m-r$ 个方程叫做剩余方程．

于是存在两种可供选择的方案．第一，由于 $m>r$，就可能发生剩余方程中的一个或多个方程的右端不等于零，从而具有 $0=c_k^{(r)}$ 的形式（实际上这里的 $c_k^{(r)}\neq 0$）．在这种情况下，如假设(1)的解存在则将导致矛盾，因此解不存在，于是说方程组(1)是不成立的

或不相容的.

相反，如果不存在矛盾，并且 $m$ 个方程组(1)被简化为 $r$ 个方程组，移项后，可写成下面的形式：

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\gamma_1+\alpha_{11}x_{r+1}+\cdots+\alpha_{1,\ n-r}x_n \\ x_2=\gamma_2+\alpha_{21}x_{r+1}+\cdots+\alpha_{2,\ n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=\gamma_r+\alpha_{r1}x_{r+1}+\cdots+\alpha_{r,\ n-r}x_n \end{array}\right\} \tag{6}$$

其中 $\gamma$ 和 $\alpha$ 是和(1)中有关的特殊常量. 因为从方程组(1)简化为方程组(6)的每一步都是可逆的，从而这两个方程组是等价的，它的意思是每一个组蕴涵着另外一个组. 因此，在这种情形下方程组(1)的一般解可把 $r$ 个变量 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r$ 的每一个表示为一个特殊常量与含有其余 $n-r$ 个变量的一个特别线性组合的和，而其中每个变量的值都是可以任意指定的.

若 $r=n$，就得到唯一的解. 否则，就存在一个包含 $(n-r)$ 参数族的解. 数 $n-r=d$ 叫做方程组(1)的亏量. 我们注意到若方程组(1)是相容的且 $r$ 小于 $m$，则其中 $m-r$ 个方程(即和剩余方程相应的那些方程)实际上可以不去考虑，因为它们可以由其余 $r$ 个方程推出.

上述简化法可通过下面的四个联立方程加以说明

$$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2-\ x_3-2x_4=-1 \\ 2x_1+\ x_2+\ x_3-\ x_4=4 \\ x_1-\ x_2+2x_3+\ x_4=5 \\ x_1+3x_2-2x_3-3x_4=-3 \end{array}\right\} \tag{7}$$

容易验证，简化两步后就可得到等价的方程组

$$\left.\begin{array}{r} x_1\qquad+x_3\qquad=3 \\ x_2-x_3-x_4=-2 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array}\right\}$$

因此，方程组有两个亏量．如果我们写 $x_3=c_1$ 和 $x_4=c_2$，则方程组的一般解可表示为

$$x_1=3-c_1,\quad x_2=-2+c_1+c_2,\quad x_3=c_1,\quad x_4=c_2. \tag{8a}$$

其中 $c_1$ 和 $c_2$ 是任意常数．这两个参数族的解也可写成符号形式

$$\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}$$
$$=\{3,\ -2,\ 0,\ 0\}+c_1\{-1,\ 1,\ 1,\ 0\}+c_2\{0,\ 1,\ 0,\ 1\}. \tag{8b}$$

还可得出结论，由前两个方程一定能够推出方程组(7)中第三和第四个方程．实际上，第三个方程是由第二个方程减去第一个方程得到的，而第四个方程则是由第一个方程的三分之五减去第二个方程的三分之一得到的．

高斯-约当简化法在实际求线性方程组①的数值解时是很有用的，在此处介绍它的目的也是为了导引下面要用到的一些定义和术语．

**1.3．矩阵．** 方程组(1)可以设想表示一个线性变换，这个变换把 $n$ 个数 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ 的集合变换为 $m$ 个数 $\{c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m\}$ 的集合．

我们用诸系数 $a_{ij}$ 的矩形阵列来专门表示这个变换，经常用一对方括弧把这个阵列围住并用一个粗体大写字母来作为符号：

---

① 作为从第 $k$ 个方程以外的所有方程中消去 $x_k$ 的代替办法，在第 $k$ 步，可以只消去第 $k$ 个方程以后各方程的 $x_k$．$r$ 步以后，当此过程终了时，第 $r$ 个未知数就由第 $r$ 个方程明显地给出．第 $r-1$ 个未知数通过代入第 $r-1$ 个方程而求出．把这种工作方式返回到第一个方程就完全得到方程组的解．方才概括的方法是和高斯的名字联在一起的．为了使"舍入"误差尽可能的小，经常要求对消元序列进行安排，使用来消去 $x_k$ 的方程里的 $x_k$ 的系数与方程里的其他系数相比在绝对值上应尽可能的大．

这个方法的一个改进是由克罗特(Crout)得到的(见参考文献 3)，它特别适用于台式计算机，在附录中有这些内容的叙述．

$$A \equiv [a_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{9}$$

在对这个阵列加上某些有待规定的组合法则之后，我们就把上式叫做一个 $m\times n$ 矩阵．在一个表示其典型元素的符号 $a_{ij}$ 中，第一个下标(在这里是 $i$)表明元素所在的行而第二个下标(在这里是 $j$)表明元素所在的列．

量 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 和 $c_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 二集合习惯上用单列矩阵来表示．有时矩阵只包含一个列，为了强调这种情况，我们用一个小写粗体字母表示它，并用大括号而不用方括号包围它会更方便一些，因此写为

$$\boldsymbol{x} \equiv \{x_i\} \equiv \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{c} \equiv \{c_i\} \equiv \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{Bmatrix}. \tag{10a, b}$$

为了书写方便，常把单列矩阵的元素平排写成

$$\boldsymbol{x} = \{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\},$$

这时必须用大括号标记上述的转置．

也可使用其他符号，如括弧或双垂线，来包围矩阵的阵列．

如果我们把(1)理解为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是把单列矩阵 $\boldsymbol{x}$ 变成另一单列矩阵 $\mathbf{c}$，那么就可以把这个变换自然地写为下面的形式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{c}, \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{x}=\{x_i\}$，且 $\mathbf{c}=\{c_i\}$．

另外，方程组(1)可写为下面的形式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = c_i, \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m), \tag{12a}$$

这就导出了矩阵方程

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right\} = \{c_i\}. \tag{12b}$$

因此，如果(11)和(12b)等价，我们引出定义

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = [a_{ik}]\{x_k\} \equiv \left\{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right\}. \tag{13}$$

形式上，我们只把第一个因式的一般项中列的下标用一个哑指标 $k$ 代替，而把第二个因式的一般项中行的下标也用相同的哑指标代替，并对这个指标求和①.

此定义显然只当第一个因式中列的数和第二个因式中行(元素)的数相等时才适用. 除非这一条件得到满足，否则乘积就没有定义.

我们注意到 $a_{ij}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行和第 $k$ 列的元素，而 $x_k$ 是单列矩阵 $\boldsymbol{x}$ 的第 $k$ 个元素. 因为在 $a_{ij}$ 中 $i$ 的范围从1到 $m$，定义(13)说明一个 $m\times n$ 矩阵和一个 $n\times 1$ 矩阵的乘积是一个 $m\times 1$ 矩阵(即一列内包含 $m$ 个元素). 乘积中的第 $i$ 个元素是由第一个因式中的第 $i$ 行和第二个因式中的仅有的一列相乘得到的，即把各该第一个元素相乘，第二个元素相乘，等等，再把这些乘积按代数意义加在一起而得到.

例如，由定义引出这样结果

---

① 在文献上，经常用到一种所谓*求和约定*，根据这一约定，一个像

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

这样的和式，其中 $\sum$ 符号可以略去不写，而默认记号 $a_{ik}x_k$ 在这里表示将所给的乘积关于*重复*指标进行*求和*的结果，而这一指标是通过其整个值域的. 同样，根据上述约定，当我们写出 $a_{ik}b_{kl}c_l$ 时，它是关于 $k$ 和 $l$ 同时求和的，这时如果我们想使*元素* $a_{kk}$ 与*和式*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

有所区别，或在其他场合暂时不用求和约定时，这时必须作出一个明确叙述. 本节将不用求和约定.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1\cdot1+0\cdot2 \\ 2\cdot1+1\cdot2 \\ -1\cdot1+2\cdot2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{Bmatrix}.$$

现假设用 $s$ 个新变量 $y_1, y_2, \cdots, y_s$ 的线性组合表示 $n$ 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，也就是，形如

$$x_i=\sum_{k=1}^{s} b_{ik}y_k \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{14}$$

的一组关系成立．如果原变量满足(12a)，则把(14)式引进(12a)可得到新变量所满足的方程．在引进时，除在(14)中用 $k$ 代 $i$ 外，我们还必须用一个新的哑指标 $l$ 代替(14)式中的 $k$，以避免记号的混乱．代换的结果取得下面的形式．

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{s} b_{kl}y_l\right)=c_i \quad (i=1, 2, \cdots, m), \tag{15a}$$

或者，因为构成有限和的顺序是无关紧要的，故

$$\sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)y_l=c_i \quad (i=1, 2, \cdots, m). \tag{15b}$$

采用矩阵的记号，变换(14)遂成为下形

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}, \tag{16}$$

并且，和(15a)对应，把(16)代入(11)就得到

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{c}. \tag{17}$$

但是如果我们写

$$p_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots, m \\ j=1, 2, \cdots, s \end{pmatrix}, \tag{18}$$

方程(15b)就取得下面的形式

$$\sum_{l=1}^{s} p_{il}y_l=c_i \quad (i=1, 2, \cdots, m),$$

因此，根据(12a)和(13)，变换(15b)的矩阵式就得到

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}, \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{P}=[p_{ij}]$．

从而就得到由 $\boldsymbol{B}$ 对 $\boldsymbol{y}$ 和由 $\boldsymbol{A}$ 对($\boldsymbol{By}$)乘积运算的结果(由(17)左边给出)，这和由矩阵 $\boldsymbol{P}$ 直接对 $\boldsymbol{y}$ 运算的结果相同. 我们从而定义此矩阵为乘积 $\boldsymbol{AB}$,

$$\boldsymbol{AB}=[a_{ik}][b_{kj}]\equiv\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]. \tag{20}$$

希望得到的关系式

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{By})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{y}$$

正是此定义的一个推论.

前面曾经提到第一个下标是行的指标而第二个下标是列的指标,我们看到如果(20)式的第一个因式有 $m$ 行和 $n$ 列，而第二个因式有 $n$ 行和 $s$ 列，右边的指标 $i$ 可以从 1 变到 $m$，而另一边的指标 $j$ 可以从 1 变到 $s$. 因此,一个 $m\times n$ 矩阵和一个 $n\times s$ 矩阵的乘积是一个 $m\times s$ 矩阵. 在乘积的第 $i$ 行和第 $j$ 列的元素 $p_{ij}$ 是由第一个因式的第 $i$ 行和第二个因式的第 $j$ 列的对应元素相乘再把各个结果按代数方法相加而得到. 特别，当 $s=1$ 时定义(20)完全简化为(13)式

例如,我们有

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(1\cdot1+0\cdot1+1\cdot2) & (1\cdot2+0\cdot0+1\cdot1) & (1\cdot1+0\cdot1+1\cdot0)\\ (1\cdot1-2\cdot1+1\cdot2) & (1\cdot2-2\cdot0+1\cdot1) & (1\cdot1-2\cdot1+1\cdot0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 3 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}.$$

我们注意到仅当 $\boldsymbol{A}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，$\boldsymbol{AB}$ 才有定义. 在这种情形下,就说这两个矩阵按给出的顺序是可乘的.

如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 按任何顺序都是可乘的，于是乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 $m$ 阶方阵,而乘积 $\boldsymbol{BA}$ 是一

个 $n$ 阶方阵. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 即使是阶数相同的方阵，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 一般也不相等. 例如，在两个二阶方阵的情况下我们有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix},$$

又

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

从而，在用 $\boldsymbol{A}$ 乘 $\boldsymbol{B}$ 时，我们必须小心区分 $\boldsymbol{A}$ 是由左乘 $\boldsymbol{B}$ 得 $(\boldsymbol{AB})$ 还是 $\boldsymbol{A}$ 由右乘 $\boldsymbol{B}$ 得 $(\boldsymbol{BA})$.

在两个 $m\times n$ 矩阵中，当且只当它们的对应元素相等时，才说这两个矩阵相等.

两个 $m\times n$ 矩阵 $[a_{ij}]$ 与 $[b_{ij}]$ 的和定义为矩阵 $[a_{ij}+b_{ij}]$. 而数 $k$ 和矩阵 $[a_{ij}]$ 的乘积定义为矩阵 $[ka_{ij}]$，其中每一个元素为原矩阵的对应元素与 $k$ 的乘积.

由前面的定义，容易看出，若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 每一个都是 $m\times n$ 矩阵，则矩阵的加法满足交换律并且满足结合律：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}. \tag{21}$$

又，如果有关的乘积是有定义的，则矩阵的乘法满足结合律，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}, \tag{22}$$

以及分配律

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},$$
$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}, \tag{23}$$

但一般不满足交换律①.

① 除非另外声明，组成矩阵元素的纯量都假设是实数或复数. 但是，我们将要建立的很多结果对于许多其他允许用的元素集合来说也仍然有效(若给以适当解释).