

图论及其应用

[美] J.A. 邦迪 著
U.S.R. 默蒂

科学出版社

图论及其应用

〔美〕J. A. 邦迪 U. S. R. 默蒂 著

吴望名 吴念祖 吴兰芳 谢伟如 梁文沛 译

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书是一本水平较高的图论入门书。它论述了图论的基本理论及重要应用,深入浅出,清晰易懂。每章除了给出一般练习外,还有一些较深的习题。书末列出了五十个尚未解决的问题。

本书可供有关专业的科技工作者和大专院校师生参考。

J. A. Bondy and U. S. R. Murty

GRAPH THEORY WITH APPLICATIONS

THE MACMILLAN PRESS LTD, 1976

图 论 及 其 应 用

〔美〕J. A. 邦迪 U. S. R. 默蒂 著

吴望名 李念祖 吴兰芳 谢伟如 梁文沛 译

责任编辑 杨贤英

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984 年 4 月 第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1984 年 4 月 第一次印刷 印张: 9 1/8

印数: 0001—9,750 字数: 239,000

统一书号: 13031·2545

本社书号: 3495·13-1

定 价: 1.70 元

序 言

本书打算作为图论的一本入门书，目的在于介绍我们所认为的图论基本题材以及它在其他数学分支和实际问题中的多种多样的应用。本书包含了 Brooks, Chvátal, Tutte 和 Vizing 等定理的简单新证明。应用题材经过精心挑选，并在一定深度上予以论述。凡仅仅采用图的语言而没有理论的所谓“应用”均予略去。每章末尾出现的应用题材实际上要用到该章前面阐述的理论。我们也强调解决问题的有效方法的重要性。本书包含了若干好算法，并且分析了它们的有效性。至于这些算法在计算机上如何实现，则不作讨论。

每节末尾的习题难度各有不同。一些较难的习题标有星号(*),并在附录 I 中给出了提示。在某些习题中引入了新的定义，建议读者熟悉这些定义。用粗体号码标出的习题在以后的章节中要引用；这类习题读者应当尽力去做。

附录 II 包含一张表。表中列出了四个图的基本性质。读者会发现，在引进新定义时参照此表，将有助于检查他的理解程度。附录 III 选列了一些具有特殊性质的有趣的图。这些图对于检验新的猜想也许是有益的。附录 IV 中搜集了若干尚未解决的问题，其中有一些公认是十分困难的，另一些则更有希望获得解决。附录 V 中提出了建议进一步阅读的文献。

很多人都直接或间接地对本书作出了贡献。我们特别要感谢 C. Berge 和 D. J. A. Welsh，他们引导我们去研究图论；感谢 G. A. Dirac, J. Edmonds, L. Lovász 和 W. T. Tutte，我们对题材的处理方式受到他们著作的影响；感谢 V. Chungphaisan 和 C. St. J. A. Nash-Williams，他们仔细地阅读了手稿并提出了有价值的建议；还要感谢各方面老前辈对我们的关心和经常的鼓励。

我们也要感谢 S. B. Maurer, P. J. O'Halloran, C. Thomassen, B. Toft 和 Waterloo 大学的同事们,他们提出了许多有益的意见,还要感谢加拿大国家研究理事会在财政上的支持. 最后,对于 Joan Selwood 出色的打字和 Diana Rajnovich 漂亮的插图,我们也表示感谢.

J. A. 邦迪

U. S. R. 默蒂

目 录

第一章 图和子图	1
1.1 图和简单图	1
1.2 图的同构	4
1.3 关联矩阵和邻接矩阵	7
1.4 子图	8
1.5 顶点的度	11
1.6 路和连通	12
1.7 圈	15
应用	17
1.8 最短路问题	17
1.9 Sperner 引理	23
第二章 树	27
2.1 树	27
2.2 割边和键	29
2.3 割点	33
2.4 Cayley 公式	34
应用	38
2.5 连线问题	38
第三章 连通度	45
3.1 连通度	45
3.2 块	47
应用	51
3.3 可靠通讯网络的构造	51
第四章 Euler 环游和 Hamilton 圈	55
4.1 Euler 环游	55
4.2 Hamilton 圈	57
应用	66

4.3	中国邮递员问题	66
4.4	旅行售货员问题	69
第五章	对集	74
5.1	对集	74
5.2	偶图的对集和覆盖	76
5.3	完美对集	80
	应用	85
5.4	人员分派问题	85
5.5	最优分派问题	91
第六章	边着色	97
6.1	边色数	97
6.2	Vizing 定理	100
	应用	103
6.3	排课表问题	103
第七章	独立集和团	108
7.1	独立集	108
7.2	Ramsey 定理	110
7.3	Turan 定理	117
	应用	120
7.4	Schur 定理	120
7.5	一个几何问题	121
第八章	顶点着色	126
8.1	色数	126
8.2	Brooks 定理	131
8.3	Hajós 猜想	132
8.4	色多项式	134
8.5	围长和色数	139
	应用	141
8.6	贮藏问题	141
第九章	平面图	145
9.1	平面图和平面图	145
9.2	对偶图	149

9.3 Euler 公式	153
9.4 桥	156
9.5 Kuratowski 定理	161
9.6 五色定理和四色猜想	166
9.7 非 Hamilton 平面图.....	171
应用	173
9.8 平面性算法	173
第十章 有向图.....	181
10.1 有向图	181
10.2 有向路	184
10.3 有向圈	187
应用	191
10.4 工件排序问题	191
10.5 高效率计算机鼓轮的设计	192
10.6 单行道路系统的构造	195
10.7 竞赛参加者名次的排列	197
第十一章 网络.....	203
11.1 流	203
11.2 割	206
11.3 最大流最小割定理	209
应用	216
11.4 Menger 定理.....	216
11.5 可行流	219
第十二章 圈空间和键空间.....	226
12.1 环流和势差	226
12.2 生成树的数目	232
应用	234
12.3 完美正方形	234
附录 I 带星号习题的提示.....	241
附录 II 四个图及其特性表.....	248
附录 III 一些有趣的图	250

附录 IV 尚未解决的问题	262
附录 V 进一步阅读的建议	271
符号汇编	274
译名对照表	276

第一章 图 和 子 图

1.1 图和简单图

现实世界的许多事例用图形来描写可能是方便的, 这种图形是由一个点集以及这个点集中的某些点对的连线构成的. 例如, 点可以表示人, 连线表示一对朋友; 或者, 用点表示通讯站, 而连线表示通讯线路. 注意: 在这类图形中, 人们主要感兴趣的是给定两点是否有一根线连接, 而连接的方式则无关紧要. 这类事例的数学抽象就产生了图的概念.

一个图 G 是指一个有序三元组 $(V(G), E(G), \phi_G)$, 其中 $V(G)$ 是非空的顶点集, $E(G)$ 是不与 $V(G)$ 相交的边集, 而 ϕ_G 是关联函数, 它使 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对 (不必相异). 若 e 是一条边, 而 u 和 v 是使得 $\phi_G(e) = uv$ 的顶点, 则称 e 连接 u 和 v ; 顶点 u 和 v 称为 e 的端点.

下面两个例子有助于阐明图的定义.

例 1

$$G = (V(G), E(G), \phi_G)$$

这里,

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

而 ϕ_G 定义为

$$\phi_G(e_1) = v_1v_2, \quad \phi_G(e_2) = v_2v_3$$

$$\phi_G(e_3) = v_3v_3, \quad \phi_G(e_4) = v_3v_4$$

$$\phi_G(e_5) = v_2v_4, \quad \phi_G(e_6) = v_4v_5$$

$$\phi_G(e_7) = v_2v_5, \quad \phi_G(e_8) = v_2v_5$$

例 2

$$H = (V(H), E(H), \phi_H)$$

这里,

$$V(H) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$E(H) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

而 ϕ_H 定义为

$$\phi_H(a) = uv, \quad \phi_H(b) = uu$$

$$\phi_H(c) = vw, \quad \phi_H(d) = wx$$

$$\phi_H(e) = vx, \quad \phi_H(f) = wx$$

$$\phi_H(g) = ux, \quad \phi_H(h) = xy$$

采用图这一名称,是因为它们可以用图形来表示,而这种图形表示有助于我们理解图的许多性质. 每个顶点用点来表示, 每条边用线来表示,此线连接着代表该边端点的点¹⁾. 图 1.1 是图 G 和 H 的图形. (为清晰起见,这里顶点画成小圆圈.)

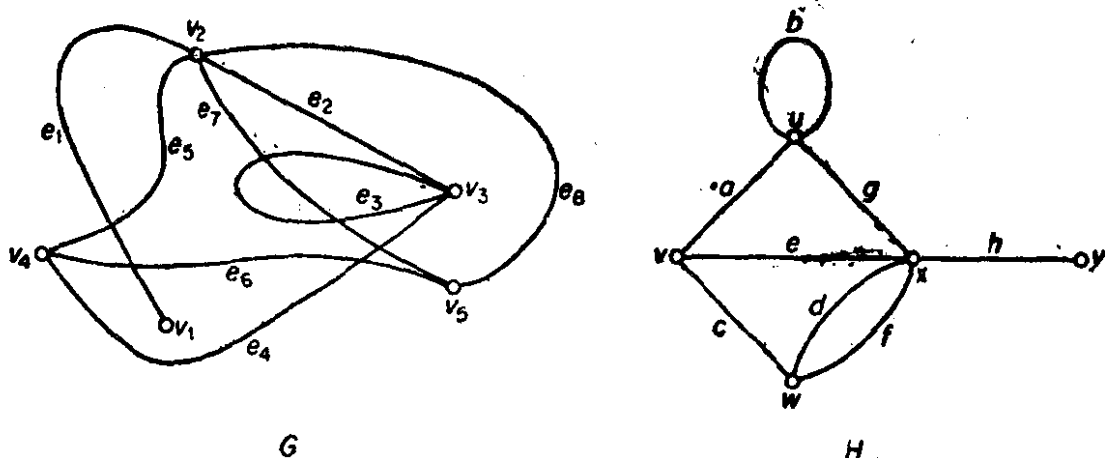


图 1.1 图 G 和 H 的图形

一个图的画法并不是唯一的;表示顶点的点和表示边的线的相对位置是无关紧要的. 例如,图 1.2 给出了 G 的另一个图形. 一个图的图形仅描绘出它的顶点和边之间所具有的关联关系. 然而,我们将常常画出一个图的图形,把它看作是这个图本身;并且它的点称为“顶点”,它的线称为“边”.

注意,在图的一个图形中,两条边可能相交于不是顶点的点上(例如图 1.1 中图 G 的 e_1 和 e_6). 若一个图具有这样的图形,

1) 画线时要求每一根线不自身相交,也不通过这样的点,它所代表的顶点不是相应边的端点——显然,这总是可以做到的.

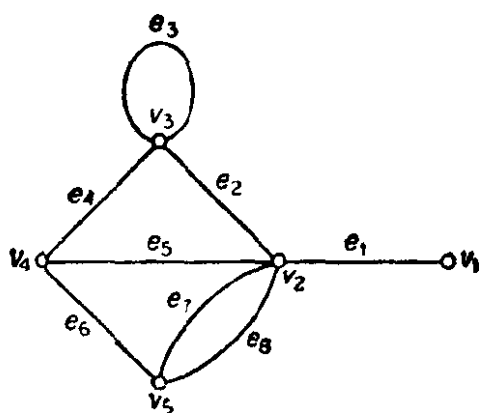


图 1.2 G 的另一个图形

它的边仅在端点处相交,则该图称为平面图,因为这种图可以在平面上用简单的方式表示出来. 图 1.3(a) 的图是一个平面图,虽然由所给出的这个特殊表示形式来看,这并不是一目了然的(参看习题 1.1.2). 另一方面,图 1.3(b) 的图是一个非平面图.(这将在第九章中证明.)

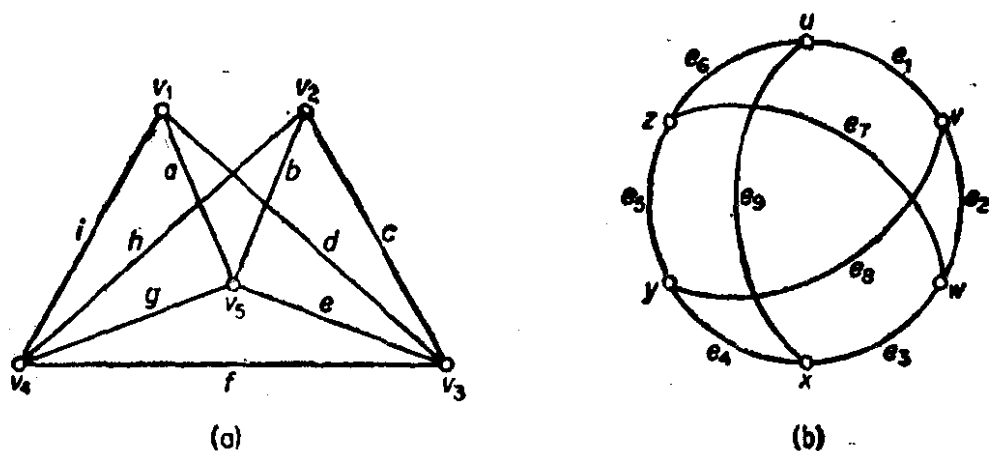


图 1.3 平面图和非平面图

图论中的大多数定义和概念是根据图形表示提出来的. 一条边的端点称为与这条边关联, 反之亦然. 与同一条边关联的两个顶点称为相邻的, 与同一个顶点关联的两条边也称为相邻的. 端点重合为一点的边称为环, 端点不相同的边称为连杆. 例如, G 的边 e_3 (图 1.2) 是一个环, G 的其余边都是连杆.

一个图称为有限图, 如果它的顶点集和边集都有限. 本书只研究有限图, 故术语“图”一词总是指“有限图”. 只有一个顶点的图称为平凡图, 其他所有的图都称为非平凡图.

一个图称为简单图, 如果它既没有环也没有两条连杆连接同一对顶点. 图 1.1 的图不是简单图, 而图 1.3 的图却是简单图. 图论中大多数内容涉及简单图的研究.

图 G 的顶点数和边数分别用符号 $\nu(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 表示. 本书用字母 G 代表图, 并且当讨论的图只有一个时, 总是用 G 来表示这个图. 从而在图论符号中我们常略去字母 G , 例如, 分别用 V, E, ν 和 ε 代替 $V(G), E(G), \nu(G)$ 和 $\varepsilon(G)$.

习 题

1.1.1 从日常生活中举出能自然地引出图的五个事例.

1.1.2 画出图 1.3(a) 的图的另一个图形, 以说明它确实是平面图.

1.1.3 证明: 若 G 是简单图, 则 $\varepsilon \leq \binom{\nu}{2}$.

1.2 图的同构

两个图 G 和 H 是恒等的(记为 $G = H$), 如果 $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ 和 $\phi_G = \phi_H$. 显然两个恒等的图可用同一个图形来表示. 但不恒等的图也可能具有实质上相同的图形. 例如图 1.2 的 G 和图 1.1 的 H , 图形看起来完全一样, 差别在于它们的顶点和边有不同的标号. 图 G 和 H 不恒等但同构. 一般说来, 两个图 G 和 H 称为同构的(记为 $G \cong H$), 如果存在两个一一映射 $\theta: V(G) \rightarrow V(H)$ 和 $\phi: E(G) \rightarrow E(H)$, 使得 $\phi_G(e) = uv$ 当且仅当 $\phi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$; 这样一个映射对 (θ, ϕ) 称为 G 和 H 之间的一个同构.

要证明两个图是同构的, 就必须指出它们之间的一个同构. 下面给出的映射对 (θ, ϕ) :

$$\theta(v_1) = y, \theta(v_2) = x, \theta(v_3) = u, \theta(v_4) = v, \theta(v_5) = w$$

和

$$\phi(e_1) = h, \phi(e_2) = g, \phi(e_3) = b, \phi(e_4) = a$$

$$\phi(e_5) = e, \phi(e_6) = c, \phi(e_7) = d, \phi(e_8) = f$$

是例 1 和例 2 的图 G 和 H 之间的一个同构; 显然 G 和 H 有相同的

结构，差异只是顶点和边的名称不同。由于我们主要感兴趣的是图的结构性质，所以在画图时常常略去标号；一个无标号的图可以认为是同构图的等价类的代表。我们给一个图的顶点和边赋以标号的目的，主要是为了便于称呼它们。例如，讨论简单图时，把端点是 u 和 v 的边称为“边 uv ”是方便的。（这个约定不会导致误解，因为在简单图中连接任意一对顶点的边最多只有一条。）

在结束本节时，我们介绍一些特殊类型的图。每一对不同的顶点都有一条边相连的简单图称为完全图。在同构意义下， n 个顶点的完全图只有一个，记为 K_n 。图1.4(a)是 K_5 的图形。另一方面，空图是指没有任何边的图。所谓偶图（或二部图）是指一个图，它的顶点集可以分解为两个（非空）子集 X 和 Y ，使得每条边都有一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中；这样一种分类 (X, Y) 称为图的一个二分类。完全偶图是具有二分类 (X, Y) 的简单偶图，其中 X 的每个顶点都与 Y 的每个顶点相连；若 $|X| = m$ 而 $|Y| = n$ ，则这样的图记为 $K_{m,n}$ 。由立方体的顶点和边所确定的图（图1.4(b)）是偶图；图1.4(c)中的图是完全偶图 $K_{3,3}$ 。

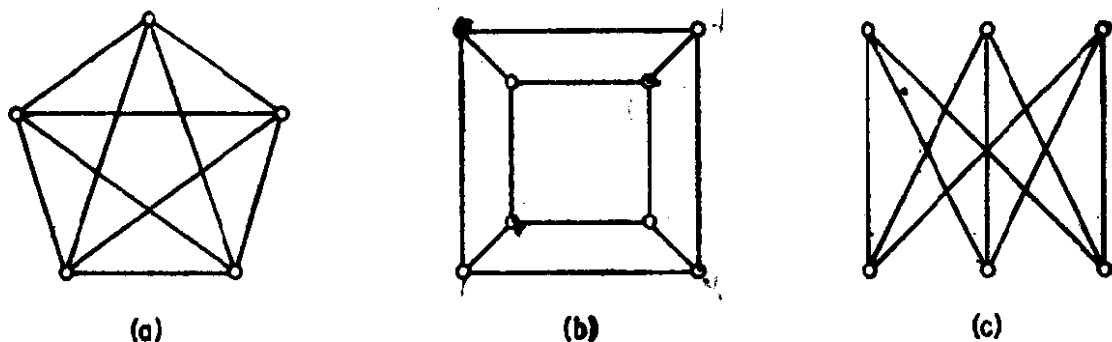


图1.4 (a) K_5 ; (b) 立方体; (c) $K_{3,3}$

还有许多结构极为有趣的图。附录 III 中选录了一些这样的图。

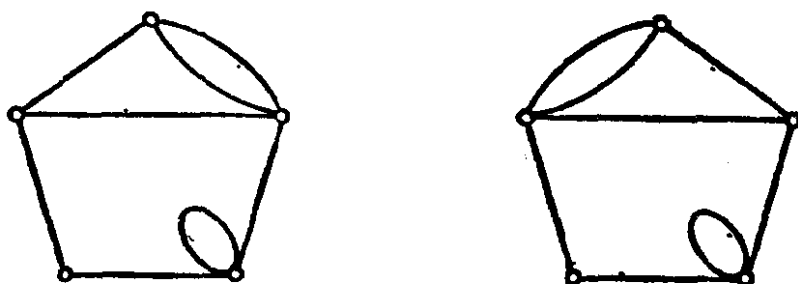
习 题

1.2.1 找出例1和例2的图 G 和 H 之间的另一个同构，使它不同于课文中已经给出的那个同构。

1.2.2 (a)证明：若 $G \cong H$ ，则 $\nu(G) = \nu(H)$ 和 $\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$ 。

(b) 举例说明其逆命题不成立.

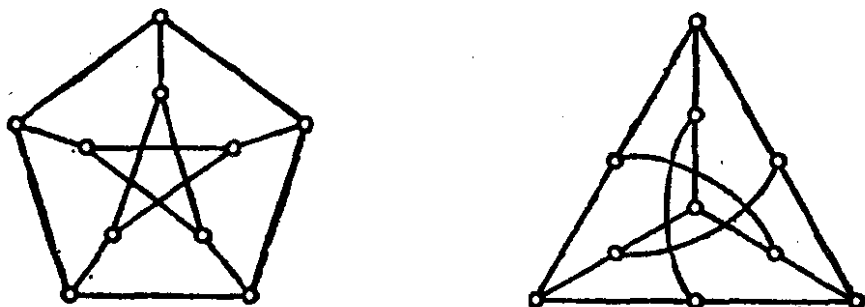
1.2.3 证明: 下面两个图不同构.



1.2.4 证明: 四个顶点的非同构简单图有 11 个.

1.2.5 证明: 两个简单图 G 和 H 同构当且仅当存在一个一一映射 $\theta: V(G) \rightarrow V(H)$, 使得 $uv \in E(G)$ 当且仅当 $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

1.2.6 证明: 下面两个图是同构的.



1.2.7 设 G 是简单图. 证明: $\varepsilon = \binom{v}{2}$ 当且仅当 G 是完全图.

1.2.8 证明:

(a) $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$;

(b) 若 G 是简单偶图, 则 $\varepsilon \leq v^2/4$.

1.2.9 所谓 k 部图是指这样的图, 它的顶点集可分解为 k 个(非空)子集, 使任何一边的两个端点均不同在任一个子集中; 完全 k 部图是指一个简单图, 它的每个顶点与不在同一子集中的所有顶点均相连接. 具有 n 个顶点的完全 m 部图, 若它的每个部分或是有 $[n/m]$ 个顶点, 或是有 $\{n/m\}$ 个顶点, 则记为 $T_{m,n}$. 证明:

(a) $\varepsilon(T_{m,n}) = \binom{n-k}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2}$, 这里 $k = [n/m]$;

(b)* 若 G 是具有 n 个顶点的完全 m 部图, 则 $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(T_{m,n})$, 并且仅当 $G \cong T_{m,n}$ 时等式成立.

1.2.10 所谓 k 方体是指这样的图, 它的顶点是 0 和 1 组成的有序 k 元组,

两个顶点相连当且仅当它们恰有一个坐标不同。(图 1.4(b) 中所示的图恰好就是 3 方体.) 证明 k 方体是有 2^k 个顶点, $k \cdot 2^{k-1}$ 条边的偶图.

- 1.2.11 (a) 简单图 G 的补图 G^c 是指和 G 有相同顶点集 V 的一个简单图, 在 G^c 中两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中不相邻. 画出图 K_n^c 和 $K_{m,n}^c$.
- (b) 简单图 G 称为自补的, 如果 $G \cong G^c$. 证明: 若 G 是自补的, 则 $v \equiv 0, 1 \pmod{4}$.

1.2.12 图的自同构是指这个图到它自身上的一个同构.

(a) 利用习题 1.2.5 证明: 简单图 G 的一个自同构可以认为是在 V 上保持相邻性的一个置换. 这种置换的集在通常的合成运算下构成一个群 $\Gamma(G)$ (称为 G 的自同构群).

(b) 求 $\Gamma(K_n)$ 和 $\Gamma(K_{m,n})$.

(c) 找出一个非平凡简单图, 使得它的自同构群只含恒等元.

(d) 证明: 对任何简单图 G , 有 $\Gamma(G) = \Gamma(G^c)$.

(e) 研究具有元素 $(1)(2)(3)$, $(1, 2, 3)$ 和 $(1, 3, 2)$ 的置换群

A_3 . 证明: 不存在具有顶点集 $\{1, 2, 3\}$ 且适合 $\Gamma(G) = A_3$ 的简单图.

(f) 找出一个简单图 G , 使得 $\Gamma(G) \cong A_3$. (Frucht 在 1939 年已证明: 每个抽象群同构于某个图的自同构群.)

1.2.13 简单图 G 称为顶点可迁的, 如果对任意两个顶点 u 和 v , 存在 $\Gamma(G)$ 中的一个元素 g , 使得 $g(u) = v$; G 称为边可迁的, 如果对任意两条边 u_1v_1 和 u_2v_2 , 存在 $\Gamma(G)$ 中的一个元素 h , 使得 $h(\{u_1, v_1\}) = \{u_2, v_2\}$. 求: $\Gamma(K_n)$

(a) 一个图, 它是顶点可迁的, 但不是边可迁的;

(b) 一个图, 它是边可迁的, 但不是顶点可迁的.

1.3 关联矩阵和邻接矩阵

对于任意图 G , 对应着一个 $v \times e$ 矩阵, 称为 G 的关联矩阵. 设 $v_1, v_2, \dots, v_v$ 和 $e_1, e_2, \dots, e_e$ 分别表示 G 的顶点和边, 则 G 的关联矩阵是指矩阵 $M(G) = [m_{ij}]$, 其中 m_{ij} 是 v_i 和 e_j 关联的次数 (0, 1 或 2). 图的关联矩阵正是描述该图的另一种方式.

伴随于 G 的另一个矩阵是邻接矩阵; 这是一个 $v \times v$ 矩阵 $A(G) = [a_{ij}]$, 其中 a_{ij} 是连接 v_i 和 v_j 的边的数目. 图 1.5 给出

了一个图和它的关联矩阵和邻接矩阵.

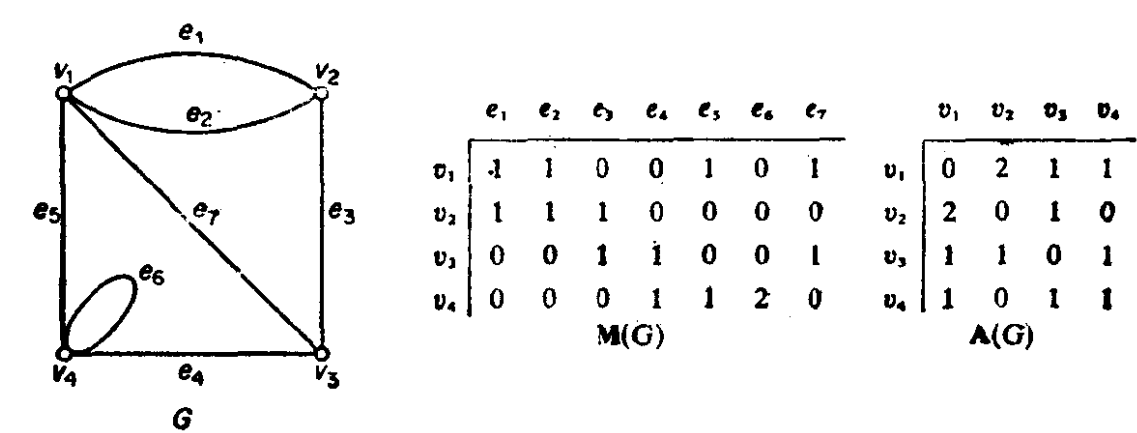


图 1.5

一般说来,图的邻接矩阵比它的关联矩阵小得多,通常,图就以其邻接矩阵的形式存贮于计算机中.

习 题

1.3.1 设 M 是图 G 的关联矩阵, A 是它的邻接矩阵.

- (a) 证明: M 的每一列之和均为 2.
- (b) A 的各列之和是多少? $\mathcal{N}_G(v_i)$

1.3.2 设 G 是偶图. 证明: 把 G 的顶点适当排列后, 可使 G 的邻接矩阵有如下形式:

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & A_{12} \\ \hline A_{21} & 0 \end{array} \right]$$

其中 A_{21} 是 A_{12} 的转置.

1.3.3* 证明: 若 G 是简单图且 A 的特征值各不相同, 则 G 的自同构群是交换群.

1.4 子图

称图 H 是 G 的子图 (记为 $H \subseteq G$), 如果 $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, 并且 ψ_H 是 ψ_G 在 $E(H)$ 上的限制. 当 $H \subseteq G$, 但 $H \neq G$ 时, 则记为 $H \subset G$, 并且 H 称为 G 的真子图. 若 H 是 G 的子图, 则 G 称为 H 的母图. G 的生成子图 (或生成母图) 是指满足 $V(H) = V(G)$ 的子图 (或母图) H .