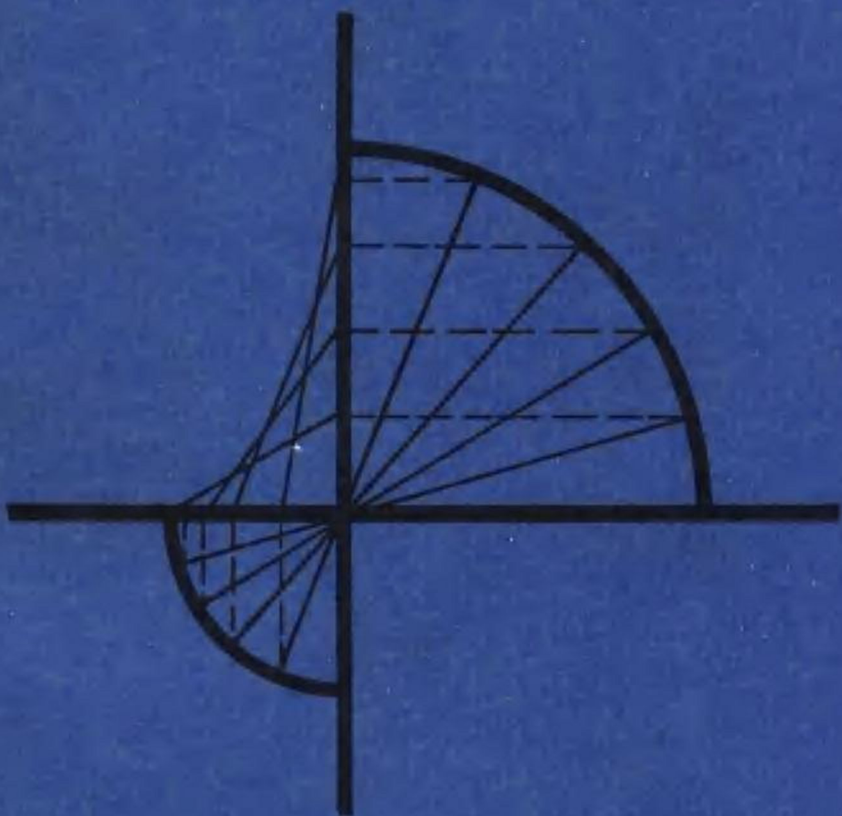
测量平差基础习题集

高士纯　于正林　主编



测绘出版社

测量平差基础习题集

高士纯　于正林　主编

测绘出版社

本习题集是配合测绘出版社1983年出版的《测量平差基础》(增订本)编写的。选题比较丰富，书末有全部习题答案，供自学检查用。本书还附有武汉测绘学院历届研究生入学考试的测量平差试题及其解答。可供测量专业师生和有关测量技术人员学习参考。

测量平差基础习题集

高士纯　于正林主编

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16・印张 22・字数 508 千字

1983年8月第一版・1983年8月第一次印刷

印数 1—15,500册・定价 2.25 元

统一书号：15039・新295

前　言

测量平差基础是一门理论性较强，理论与实践并重的学科，选编好习题是搞好本课程教学的一个重要环节。本习题集是武汉测绘学院测量平差教研组教师积二十余年来教学之经验、配合新改编的教材《测量平差基础》（增订本）（测绘出版社，1983年）编写而成。

本习题集的选题比较丰富多样，既有经典最小二乘法方面的内容，又有近代最小二乘法方面的内容，包括协方差传播律、相关平差、最小二乘滤波、推估和配置以及相对误差椭圆等。

本习题集的内容按《测量平差基础》（增订本)顺序编排，章名与该课本完全一致。习题题号前冠有相应的章节号以便查阅。为方便读者做题时参考，各章首先给出有关公式，然后列举了适量典型示例，最后为习题部分。书末给出了全部习题的答案，供读者自检。此外，为满足读者要求，本习题集还附有武汉测绘学院历届研究生入学考试测量平差试题及其解答。

为书写简便起见，书中凡出现“课本”二字均系指上述《测量平差基础》（增订本)一书。

参加本习题集编写工作的有本教研组全体教师，其中担负较多工作的有尹任祥同志。赵新维、曹新华和张万鹏等同志担任复核工作。全部插图由冯秦珍同志描绘。

由于我们水平有限，编写本习题集的时间较紧，不当之处请读者批评指正。

编者　1982年7月

目　　录

第一章　概率的基本知识

基本公式

1.　概率的定义公式

对同一试验重复地进行 n 次，若事件 A 出现了 m 次，当实验次数 n 逐渐增大时，m/n 稳定于某一常数，定义

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

为事件 A 的概率。

2.　概率加法定理

若事件 A 为两两互斥的事件 A_1，A_2，……，A_n 之和，则

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

3.　概率乘法定理

设事件 A 已经出现的条件下，B 事件出现的概率为 $P(B|A)$，则 A、B 两事件同时出现的概率 $P(AB)$ 为

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

同样有

$$P(BA)=P(B)P(A|B)$$

或写成

$$P(A|B)=P(AB)/P(B)$$
$$P(B|A)=P(AB)/P(A)$$

设有 n 个事件互相独立，则其事件积的概率为

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_{n-1})P(A_n)$$

4.　全概率公式

设 A_1，A_2，…，A_n 是互斥事件，且事件 B 能而且只能与这些事件 $A_i(i=1,\ \cdots n)$ 中的一个事件同时发生，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

5.　贝叶斯公式

事件与4款中相同，设 B 事件已经发生的条件下，A_i 事件发生的概率记为 $P(A_i|B)$ 则有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

6. 离散型随机变量之分布列

设有离散型随机变量，它所有可能取的值为 x_1，$\cdots x_n$，且相应的概率为 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，则分布律

$$P(X=x_i)=p_i$$

可用表格形式表示出来(称分布列)：

X	x_1	$x_2\cdots\cdots\cdots x_n$
p_i	p_1	$p_2\cdots\cdots\cdots p_n$

且
$$\sum_{i=1}^{n} p_i=1$$

7. 随机变量的分布函数定义公式

随机变量分布函数的定义为

$$F(x)=P(X\leqslant x)$$

对离散型随机变量，分布函数为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x_i\leqslant x} P(X=x_i)$$

对连续型随机变量，分布函数为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

8. 几个重要的分布

(1) 均匀分布

概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \ (a,\ b\text{为常数})\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b\\ 1, & x\geqslant b\end{cases}$$

(2) 正态分布

概率密度：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty \quad (\mu,\ \sigma\text{为参数})$$

分布函数：

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

(3) 二项分布

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

其中 $0<p<1$，$p+q=1$。

9. 随机向量的分布函数的定义公式

$$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)$$

对于 n 维随机向量 $X(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots\cdots,X_n\leqslant x_n)$$

对于 n 维连续型随机向量有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(x_1,\cdots,\ x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

10. 随机向量的边缘分布、条件分布的定义公式：

$$F_1(x)=F(x,+\infty)$$

$$F_2(y)=F(+\infty,y)$$

对于连续型随机向量$(X,\ Y)$，边缘分布为

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\,dy$$

$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$$

边缘分布密度：

$$f_1(x)=F_1'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$f_2(y)=F_2'(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

条件分布密度：

$$f(y|x)=f(x,y)/f_1(x)$$

$$f(x|y)=f(x,y)/f_2(y)$$

以上关于边缘分布、条件分布公式可以推广到 x，y 本身又是包含 若干个随机变量的随机向量的情形。

11. 随机变量的数学期望定义公式

离散型：

$$E(X)=\sum_1^n x_i\cdot p_i$$

连续型：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

12. 随机变量方差之定义公式

$$D(X)=E((X-E(X))^2)$$

离散型：

$$D(X)=\sum_1^n(x_i-E(X))^2p_i$$

连续型：

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx$$

13. 协方差的定义公式

$$D_{xy}=\sigma_{xy}=E\{(x-E(X))(Y-E(Y))\}$$

离散型：

$$D_{xy}=\sum_i\sum_j(x_i-E(X))(y_j-E(Y))p_{ij}$$

连续型：

$$D_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))(y-E(Y))f(x,y)dxdy$$

14. 相关系数定义公式

$$\rho_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=E\left\{\frac{(X-E(X))(Y-E(Y))}{\sigma_x\sigma_y}\right\},\qquad -1\leqslant\rho\leqslant1$$

15. 矩的定义公式

设 X，Y 是随机变量。则它们的 k 阶原点矩为

$$E(X^k)$$
$$E(Y^k)$$

k 阶中心矩为

$$E[(X-E(X))^k]$$
$$E[(Y-E(Y))^k]$$

$k+l$ 阶混合原点矩为

$$E(X^kY^l),\qquad (k,l=1,2,\cdots\cdots)$$

$k+l$ 阶混合中心矩为

$$E\{(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l\},\qquad (k,l=1,2,\cdots\cdots)$$

16. 随机向量的方差-协方差阵定义公式

设 X、Y 分别为 n、t 维随机向量，则

$$\underset{n\times n}{D_{XX}}=\begin{pmatrix}\sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \cdots\cdots & \sigma_{x_1x_n}\\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \cdots\cdots & \sigma_{x_2x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{x_nx_1} & \sigma_{x_nx_2} & \cdots\cdots & \sigma_{x_n}^2\end{pmatrix}$$

$$\underset{t\times t}{D_{YY}}=\begin{pmatrix}\sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1y_2} & \cdots\cdots & \sigma_{y_1y_t}\\ \sigma_{y_2y_1} & \sigma_{y_2}^2 & \cdots\cdots & \sigma_{y_2y_t}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{y_ty_1} & \sigma_{y_ty_2} & \cdots\cdots & \sigma_{y_t}^2\end{pmatrix}$$

$$\underset{n\times t}{D_{XY}}=\begin{pmatrix}\sigma_{x_1y_1} & \sigma_{x_1y_2} & \cdots\cdots & \sigma_{x_1y_t}\\ \sigma_{x_2y_1} & \sigma_{x_2y_2} & \cdots\cdots & \sigma_{x_2y_t}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{x_ny_1} & \sigma_{x_ny_2} & \cdots\cdots & \sigma_{x_ny_t}\end{pmatrix}$$

$$\underset{t\times n}{D_{YX}}=\begin{pmatrix}\sigma_{y_1x_1} & \sigma_{y_1x_2} & \cdots\cdots & \sigma_{y_1x_n}\\ \sigma_{y_2x_1} & \sigma_{y_2x_2} & \cdots\cdots & \sigma_{y_2x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{y_tx_1} & \sigma_{y_tx_2} & \cdots\cdots & \sigma_{y_tx_n}\end{pmatrix}$$

17. n 维正态随机向量的联合概率密度

$$f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|D_{XX}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu_X)^T\cdot D_{XX}^{-1}(X-\mu_X)\right\}$$

18. 正态随机向量的条件概率密度

设 X_1、X_2 分别为 n 维和 t 维的随机向量。则

$$f_1(x_1)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|D_{11}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X_1-\mu_1)^TD_{11}^{-1}(X_1-\mu_1)\right\}$$

$$f_2(x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{t}{2}}|D_{22}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X_2-\mu_2)^TD_{22}^{-1}(X_2-\mu_2)\right\}$$

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|D_{11}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X_1-\mu_1)^TD_{11}^{-1}(X_1-\mu_1)\right\}$$
$$\cdot\frac{1}{(2\pi)^{\frac{t}{2}}|\widetilde{D}_{22}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X_2-\mu_2-D_{21}D_{11}^{-1}(X_1-\mu_1))^T\right.$$
$$\left.\cdot\widetilde{D}_{22}^{-1}(X_2-\mu_2-D_{21}D_{11}^{-1}(X_1-\mu_1))\right\}$$

$$f(x_2|x_1)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{t}{2}}|\widetilde{D}_{22}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X_2-\mu_2-D_{21}D_{11}^{-1}(X_1-\mu_1))^T\right.$$
$$\left.\cdot\widetilde{D}_{22}^{-1}(X_2-\mu_2-D_{21}D_{11}^{-1}(X_1-\mu_1))\right\}$$

或
$$f(x_2|x_1)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{t}{2}}|D(X_2|x_1)|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X_2-E(X_2|x_1))^T\right.$$
$$\left.\cdot D^{-1}(X_2|x_1)(X_2-E(X_2|x_1))\right\}$$

例　　题

例【1-01】 设在相同情况下，对某三角形进行了三次 角 度观测，所得闭合差为 w_1、w_2、w_3，试求它们取同号的概率。（排除 $w=0$ 之情况）

［解］：解法一：

把对该三角形作三次角度观测看作一次随机试验，在这次随机试验中 w_1、w_2、w_3 可能出现的符号共有下面八种：－－－，＋＋＋，＋－－，－＋－，－－＋，－＋＋，＋－

+，++－，而闭合差取同号这一随机事件，包含了两种可能，即"－－－"和"+++"所以它的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

解法二：

这种解法是把对三角形作一次角度观测看作一次随机试验，在这次随机试验中三角形闭合差的符号非正即负，且取正、取负的概率均为1/2，所以这是属于二项分布，n次试验中事件A发生k次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

针对我们的情况$n=3$，所要求的概率为

$$P(A)=P_3(3)+P_3(0)=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0+C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

例[1-02] 设在某地区的航测外业刺点中，存在一个粗差，已知用某种粗差检验法，查出粗差的概率为0.6 现要求有99%的把握查出此粗差来，问需检验几次？

[解]：设检验一次后查出粗差的事件为A，则

$$P(A)=0.6$$

查不出的概率

$$P(\overline{A})=1-0.6=0.4$$

进行了n次检验仍未查出此粗差的概率为$(0.4)^n$，要求99%的把握查出此粗差，等价于要求$(0.4)^n\leqslant 1-99\%=0.01$；解不等式

$$(0.4)^n\leqslant 0.01$$

得

$$n\geqslant\frac{\lg 0.01}{\lg 0.4}\approx 5$$

需进行五次检验，才有99%的把握查出此粗差来。

例[1-03] 设在某三角测量中，引起三角形闭合差超限的原因有二个：(1)仪器对中，(2)观测误差。假定仪器对中时出现大误差的概率为0.3，观测时出现大误差的概率为0.2，而当仪器对中出现大误差时，引起三角形闭合差超限的概率为0.4；而当观测中出现大误差时，引起三角形闭合差超限的概率为0.6，试求三角形闭合差超限的概率。

[解]：因为闭合差超限这一事件能且只能与仪器对中出现大误差、观测时出现大误差两事件之一出现，所以应用全概率公式计算。由题

$$P(A_1)=0.3,\qquad P(B|A_1)=0.4,$$

$$P(A_2)=0.2,\qquad P(B|A_2)=0.6,$$

故

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)$$

$$=0.3\times0.4+0.2\times0.6=0.24$$

例[1-04] 同例[1-03]题，设已知三角形闭合差超限，试求在闭合差已超限的条件

下，仪器对中出现大误差的概率。

〔解〕：用贝叶斯公式。由上题$P(B)=0.24$，$P(A_1)=0.3$，$P(B|A_1)=0.4$，则

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.3\times 0.4}{0.24}=0.5$$

例【1-05】 每次测得正误差的概率为0.5，现共测3次。设以X表示测得正误差的个数。试求(1)X的分布列；(2)X的分布函数并绘出其图形。

〔解〕：X可能的取值为0、1、2、3，设A为测得正误差的事件，依题意：$P(A)=0.5$，$P(\overline{A})=0.5$，所以

$$P(X=0)=P(\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A})=0.5^3=0.125$$

$$P(X=1)=C_3^1P(A\overline{A}\,\overline{A})=3\times 0.125=0.375$$

$$P(X=2)=C_3^2P(AA\overline{A})=3\times 0.125=0.375$$

$$P(X=3)=P(AAA)=0.5^3=0.125$$

则X的分布列为

X	0	1	2	3
p_i	0.125	0.375	0.375	0.125

X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.125, & 0\leqslant x<1\\ 0.5, & 1\leqslant x<2\\ 0.875, & 2\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

它的图形是

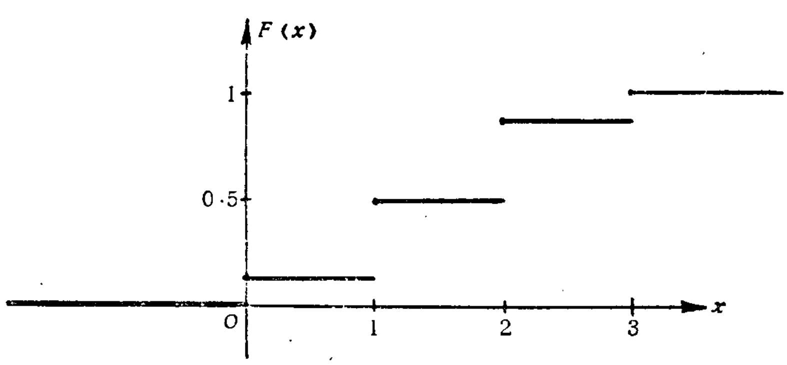


图 1-1

例【1-06】 设有任意分布的随机变量ξ，其分布函数为$F(x)$，今把$F(\xi)$看作新的随机变量η，即$\eta=F(\xi)$，试证明η为（0，1）区间的均匀分布。

〔证明〕 设有（0，1）区间的均匀分布随机变量η，其分布函数以$G(y)$表示：

$$G(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ y, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

设有函数 $F(x)$，作一新的随机变量 ξ：

$$\xi=F^{-1}(\eta)$$

按分布函数的定义，ξ 的分布函数为

$$\begin{aligned}P(\xi\leqslant x)&=P(F^{-1}(\eta)\leqslant x)\\&=P(\eta\leqslant F(x))\\&=G(F(x))=F(x)\end{aligned}$$

这就是说随机变量 $\xi=F^{-1}(\eta)$的分布函数为$F(x)$，这就反过来证明了随机变量 $\eta=F(\xi)$ 的分布函数为 $G(y)$，即服从均匀分布。

例【1-07】 计算机自动取整时，略去小数点后之数字，若精确到0.1，试求两个正实数取整误差的联合分布列。

〔解〕：这是二维离散型随机变量，设以X、Y表示它们的分量，则它们所有可能的取值为 0.0、0.1、0.2、0.3，……、0.9，所以可作出如表一之分布列。

表一

X \ p_{ij} \ Y	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.1	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.2	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.3	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.4	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.5	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.6	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.7	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.8	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.9	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01

说明：因为随机变量X、Y服从均匀分布，且取值精确到 0.1，所以它们分别取值 i，j 的概率为 $p_{ij}=P((i-0.05)<X<(i+0.05),(j-0.05)<Y<(j+0.05))=0.01$。

例【1-08】 同例〔1-07〕，试求随机向量的两个边缘分布以及条件分布 $P(Y=j|X=i)$。

〔解〕：根据离散型随机向量边缘分布之定义，关于Y的边缘分布由按行求和而得：

$$p_{\cdot j}=P(Y=j)=\sum_i p_{ij}$$

于是有表二、表三之分布列。

表二

Y	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$p_{\cdot j}$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

关于X之边缘分布为按列求和，即

$$p_{i\cdot}=P(X=i)=\sum_j p_{ij}$$

于是可得表三。

表三

X	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$p_{i\cdot}$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

条件概率：

$$P(Y=j|X=i)=\frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}}$$

所有条件概率求出后，亦可列出表四。

表四

j \ p \ i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.4	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.6	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.8	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.9	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

例【1-09】 给定随机向量（X、Y）的联合分布密度：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{4}x-y\right), & 当0<x<2,\ x-y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求(1) (X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y)$；(2) 边缘分布密度 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$；(3) 条件分布密度 $f(y|x)$。

[解]：(1)

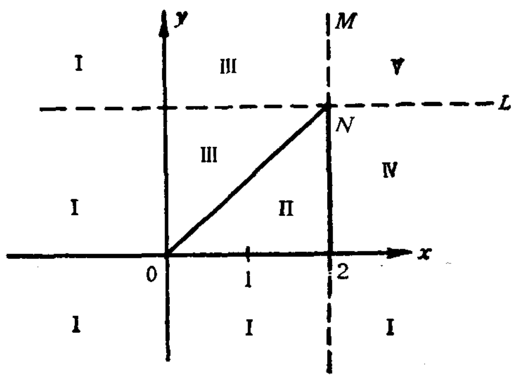


图 1-2

联合分布密度，除在△02N中定义为$\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{4}x-y\right)$外，其它部分均为 0 。根据连续型随机向量分布函数的定义，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\,dxdy$$

考虑 $f(x,y)$定义域。上述积分有四个对应不同区域的表达式(见图1-2)：

$F(x,y)=$

$$=\begin{cases}0, & x\leqslant 0, y\leqslant 0 \text{ 或 } x\leqslant 0, -\infty<y<\infty \quad \text{或 } y\leqslant 0,\ -\infty<x<\infty\\ \frac{3}{8}y^2-\frac{1}{16}y^3+\left(\frac{3}{4}y-\frac{1}{8}y^2\right)(x-y)-\frac{y}{32}(x^2-y^2), & 0<x\leqslant 2, x-y\geqslant 0\\ \frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3, & 0<x\leqslant 2,\ x-y\leqslant 0\\ \frac{3}{8}y^2-\frac{1}{16}y^3+\left(\frac{3}{4}y-\frac{1}{8}y^2\right)(2-y)-\frac{y}{32}(2^2-y^2), & 0<y<2,\ x>2\\ 1, & x\geqslant 2,\ y\geqslant 2\end{cases}$$

(2) 边缘分布密度 $f_1(x)$，依公式有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

考虑到 $f(x,y)$ 之定义域，上述积分有对应于不同区域的两个结果：

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\ x>2\\ \frac{3}{4}x-\frac{3}{16}x^2, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

同样可得

$$f_2(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\ y>2\\ \frac{11}{8}-\frac{5}{4}y+\frac{9}{32}y^2, & 0<y\leqslant 2\end{cases}$$

(3) 条件分布密度 $f(y|x)$，由公式

$$f(y|x)=f(x,y)/f_1(x)$$

考虑到 $f(x,y)$ 之定义域，以及定义条件概率密度时要求 $f_1(x)>0$，则

$$f(y|x)=$$

$$=\begin{cases}\left\{\frac{3}{8}y^2-\frac{1}{16}y^3+\left(\frac{3}{4}y-\frac{1}{8}y^2\right)(x-y)-\frac{y}{32}(x^2-y^2)\right\}\Big/\frac{3}{4}x-\frac{3}{16}x^2, & 0<x\leqslant 2,\ x-y\geqslant 0\\ \left(\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3\right)\Big/\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{16}x^2\right), & y<2,\quad x-y\leqslant 0\end{cases}$$

例 1-10] 同例[1-09]，求 $P(X+Y<2)$ 和 $P(X+Y>2)$：

[解]：

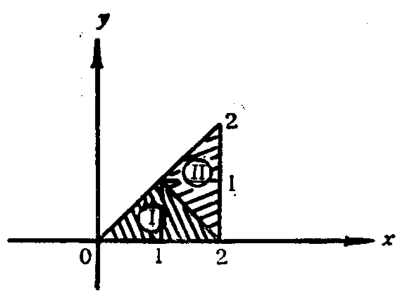


图 1-3

$$P(X+Y<2)=\iint\limits_{x+y<2}f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{x+y<2}\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{4}x-y\right)dxdy$$

$$=\frac{5}{16}+\frac{28}{96}=\frac{58}{96}\text{，（积分区域为图 1-3 中 Ⅰ）}$$

$$P(X+Y>2)=\iint\limits_{x+y>2}f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{x+y>2}\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{4}x-y\right)dxdy$$

$$=\frac{5}{32}+\frac{23}{96}=\frac{38}{96}\text{，（积分区域为图 1-3 中 Ⅱ）}$$

例[1-11] 设有离散型随机变量 X，概率密度为 $f(x)=C_m^x\cdot C_n^{k-x}/C_{m+n}^k(x=0,1,2\cdots\cdots,k)$。试求 $M(X^2)$ 和 $D(X)$。

[解]：因为 $f(x)$ 是概率密度，所以必有

$$\sum_{x=0}^{k}f(x)=1$$

即

$$\frac{\sum\limits_{x=0}^{k}C_m^x\cdot C_n^{k-x}}{C_{m+n}^k}=1$$

$$\sum_{x=0}^{k}C_m^xC_n^{k-x}=C_{m+n}^k \qquad (1)$$

但是

$$x\cdot C_m^x=\frac{x\cdot m!}{x!(m-x)!}=\frac{m\cdot(m-1)!}{(x-1)!(m-x)!}=mC_{m-1}^{x-1}$$

∴

$$M(X)=\sum_{x=0}^{k}x\cdot C_m^x\cdot C_n^{k-x}/C_{m+n}^k$$

$$= \frac{1}{C_{m+n}^{k}} \sum_{x=0}^{k} m \cdot C_{m-1}^{x-1} C_{n}^{k-x}$$

取$C_n^{-1}=0$，且令$y=x-1$。顾及（1）式，则得

$$M(X)=\frac{m}{C_{m+n}^{k}}\sum_{y=0}^{k-1}C_{m-1}^{y}C_{n}^{k-1-y}=\frac{m}{C_{m+n}^{k}}\cdot C_{n+m-1}^{k-1}=\frac{m\cdot k}{m+n}$$

$$M(X^2)=\sum_{x=0}^{k}x^2\cdot f(x)=\sum_{x=0}^{k}(x^2+x-x)f(x)$$

$$=\sum_{x=0}^{k}x(x-1)f(x)+\sum_{x=0}^{k}xf(x)$$

$$=\sum_{x=0}^{k}x(x-1)f(x)+M(X)$$

$$\sum_{x=0}^{k}x(x-1)f(x)=\sum_{x=0}^{k}x(x-1)\cdot C_m^x\cdot C_n^{k-x}/C_{m+n}^{k}$$

$$=\frac{1}{C_{m+n}^{k}}\sum_{x=2}^{k}\frac{m\cdot(m-1)(m-2)!}{(x-2)!(m-2-(x-2))!}C_n^{k-x}$$

$$=\frac{1}{C_{m+n}^{k}}\sum_{x=2}^{k}m(m-1)C_{m-2}^{x-2}C_n^{k-x}$$

令$y=x-2$，并利用（1）式：

$$\sum_{x=0}^{k}x(x-1)f(x)=\frac{m(m-1)}{C_{m+n}^{k}}\sum_{y=0}^{k-2}C_{m-2}^{y}C_n^{k-2-y}$$

$$=\frac{m(m-1)}{C_{m+n}^{k}}\cdot C_{m+n-2}^{k-2}=\frac{m(m-1)}{(m+n)}\cdot\frac{k(k-1)}{(m+n-1)}$$

于是

$$M(X^2)=\frac{m(m-1)\cdot k\cdot(k-1)}{(m+n)(m+n-1)}+\frac{mk}{m+n}$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$$

$$=\frac{m(m-1)\cdot k\cdot(k-1)}{(m+n)(m+n-1)}+\frac{m\cdot k}{m+n}-\left(\frac{m\cdot k}{m+n}\right)^2$$

$$=\frac{m\cdot n\cdot k(m+n-k)}{(m+n)^2(m+n-1)}$$

例【1-12】 设随机变量X_1，X_2，……，$X_{m+n}(n>m)$相互独立，同分布且方差为σ^2，若令

$$Y_1=X_1+X_2+\cdots+X_n$$
$$Y_2=X_{m+1}+X_{m+2}+\cdots+X_{m+n}$$

求证：

$$\rho_{Y_1Y_2}=1-\frac{m}{n}$$

［证明］：$\because Y_1=X_1+X_2+\cdots X_m+X_{m+1}+\cdots+X_n$

$$Y_2=\qquad\qquad X_{m+1}+\cdots+X_n+X_{n+1}+\cdots+X_{n+m}$$

由X_1，X_2，…，X_{n+m}互相独立、同分布且方差为σ^2，得

$\sigma_{Y_1}^2=n\cdot\sigma^2$，