

高等学校试用教材

# 钢结构稳定性原理

西安冶金建筑学院 永毓栋

西安交通大学 王志骞

西安交通大学出版社

高等学校试用教材

# 钢结构稳定性原理

西安冶金建筑学院 永毓栋

西安交通大学 王志骞

西安交通大学出版社

## 内 容 简 介

本书为高等学校建筑工程专业的教材。书中内容有钢结构构件的各种稳定性及框架稳定性的分析，既按照稳定理论的系统编写，又与《钢结构设计规范(GBJ17-88)》及《钢结构》新教材密切配合，对钢结构中的稳定问题从理论方面进行了系统的介绍。

全书分为七章，前四章分别阐明轴心受压构件、压弯构件的各种稳定问题与近似解法，第五、第六章为梁及板的稳定，第七章为框架的稳定。轴心受压构件及压弯构件中包括弹性分析及弹塑性分析。

本书也可供结构工程类研究生及从事土建工程的技术人员参考。

## 钢结构稳定性原理

永毓栋 王志骞

责任编辑 王新安

\*

西安交通大学出版社出版

(邮政编码：710049)

西安电子科技大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店经售

\*

开本 787×1092 1/32 印张 7.25 字数 152 千字

1991年2月第1版 1991年2月第1次印刷

印数：1—3050

ISBN7-5605-0381-0/TU·8 定价：1.50 元

# 序 言

稳定问题是工程结构理论中的主要问题之一。钢结构理论包括多方面的内容,其中稳定问题占有较大的比重,这是钢结构区别于其它结构的一个特点。因此学习有关的稳定理论,对于掌握钢结构的设计与计算是至为重要的。随着工程技术的进步,钢结构所涉及到的稳定理论在不断扩展与深化。过去主要偏重于钢构件弯曲失稳的分析,且多以一维杆件的稳定分析为主,现在则发展到包括扭转失稳、弯扭失稳在内的全面的稳定分析。且包括二维的板件和框架以及三维的壳体和空间结构在内的稳定分析。近年来关于杆件的初始缺陷以及残余应力影响的研究日渐增多,使几何非线性及物理非线性的问题成为钢结构稳定研究中的重要组成部分。初学者对于钢结构的计算理论往往不易深刻了解,形成“应用公式易,掌握理论难”的脱节现象,其原因主要在于缺乏稳定理论的基础。

本书正是针对钢结构所涉及的稳定问题的需要,并照顾到稳定理论自身的系统性进行编写的。1983年首次在西安冶金建筑学院工民建专业使用,当时所用的教材为钟朋、永毓栋译自美国1974年出版的A·Chajes著“*Principles of Structural Stability Theory*”一书的手稿。以该手译稿为主要参考,结合我国情况,1983年底编成本书。作为教材前后已用过九届。其间,根据钢结构的需要及稳定理论自身的系统,尤其为配合我国钢结构新规范(GBJ17-88)的变化,

# 目 录

## 序言

### 第一章 轴心受压杆件的弯曲失稳

- 1.1 引言..... ( 1 )
- 1.2 中性平衡法..... ( 4 )
- 1.3 理想长柱的弹性失稳..... ( 6 )
- 1.4 稳定问题分析特点..... ( 13 )
- 1.5 理想中短柱的非弹性失稳..... ( 19 )
- 1.6 初偏心和初弯曲对临界荷载的影响..... ( 30 )
- 1.7 残余应力对临界荷载的影响..... ( 38 )

### 第二章 轴心压杆分析的近似法

- 2.1 能量法..... ( 47 )
- 2.2 位移函数的选取..... ( 51 )
- 2.3 李兹法..... ( 53 )
- 2.4 平衡微分方程的普遍形式..... ( 64 )
- 2.5 伽辽金法..... ( 65 )

### 第三章 轴心受压杆件的扭转失稳与弯扭失稳

- 3.1 剪切中心..... ( 69 )
- 3.2 自由扭转与约束扭转..... ( 78 )
- 3.3 轴心压杆的弹性扭转失稳..... ( 90 )
- 3.4 轴心压杆的弹塑性扭转失稳..... ( 98 )
- 3.5 轴心压杆的弹性弯扭失稳..... ( 104 )
- 3.6 轴心压杆的弹塑性弯扭失稳..... ( 108 )

|                     |                              |       |
|---------------------|------------------------------|-------|
| 3.7                 | 任意截面轴心压杆的弯扭失稳·····           | (116) |
| <b>第四章 压弯杆件的失稳</b>  |                              |       |
| 4.1                 | 压弯杆件平面内的弹性失稳·····            | (120) |
| 4.2                 | 压弯杆件平面内的弹塑性失稳·····           | (126) |
| 4.3                 | 压弯杆件平面外的弹性失稳·····            | (138) |
| 4.4                 | 压弯杆件平面外的弹塑性失稳·····           | (147) |
| 4.5                 | 压弯杆件平面内的相关公式·····            | (152) |
| 4.6                 | 压弯杆件平面外的相关公式·····            | (159) |
| <b>第五章 梁的侧向弯扭失稳</b> |                              |       |
| 5.1                 | 纯弯曲矩形截面简支梁的侧扭屈曲·····         | (165) |
| 5.2                 | 纯弯曲工字形截面简支梁的侧扭屈曲·····        | (169) |
| 5.3                 | 纯弯曲工字形截面固端梁的侧扭屈曲·····        | (174) |
| 5.4                 | 有集中荷载的工字形截面简支梁<br>的侧扭屈曲····· | (175) |
| <b>第六章 板的失稳</b>     |                              |       |
| 6.1                 | 单向均匀受压板的屈曲·····              | (180) |
| 6.2                 | 受剪方板的屈曲·····                 | (184) |
| 6.3                 | 钢梁腹板的剪应力系数·····              | (188) |
| <b>第七章 框架的失稳</b>    |                              |       |
| 7.1                 | 用中性平衡法确定框架的临界荷载·····         | (189) |
| 7.2                 | 用转角位移方程计算框架临界荷载·····         | (197) |
| 7.3                 | 主弯曲与材料塑性对框架性能的影响·····        | (206) |
| 7.4                 | 简化框架柱设计的近似方法·····            | (208) |
| <b>习题</b>           |                              |       |
| <b>参考文献</b>         |                              |       |

# 第一章 轴心受压杆件的弯曲失稳

## 1.1 引言

钢结构中有大量的轴心受压构件、压弯构件和受弯构件。这些构件由于强度不足可能失效，由于整体稳定性不保证也可能失效。因此强度需要保证，整体稳定性也需要保证。

钢材是建筑材料中强度最高的材料，用钢材做的构件，其截面都比较小，因而容易失稳，所以在钢结构中保证构件不丧失稳定性是极为重要的问题。

在钢结构中根据给定的公式去验算一个构件的稳定性并不困难。但是若想深入了解稳定验算公式的原理，就不大容易了。所谓稳定验算的公式，来源于构件的稳定分析，而构件的稳定分析是比较困难，也是比较复杂的。

例如图 1.1 所示桁架中的轴心压杆 AB，其轴心压力  $N_{AB} = 438\text{kN}$ ，AB

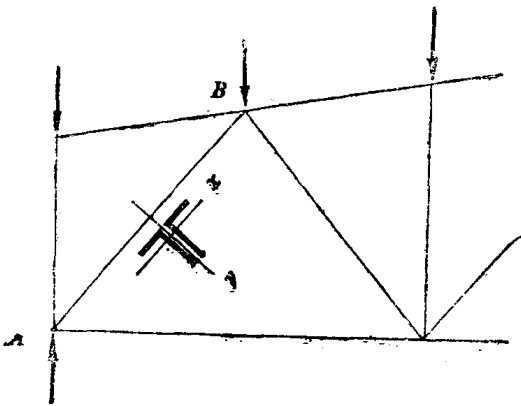


图 1.1 轴心压杆

杆在桁架平面内外的计算长度  $l_{ox} = l_{oy} = 253.5 \text{ cm}$ ，杆  $AB$  用两长肢相并的不等肢角钢即  $2\angle 140 \times 90 \times 8$  做成，节点板厚  $1 \text{ cm}$ ，材料为 3 号钢，设计强度  $f = 215 \text{ N/mm}^2$ ，要求验算杆件的稳定性。

查得截面积及回转半径为  $A = 36 \text{ cm}^2$ ， $i_x = 4.5 \text{ cm}$ ，

$i_y = 3.7 \text{ cm}$ ，由此可得最大长细比  $\lambda_y = \frac{l_{oy}}{i_y} = \frac{253.5}{3.7} = 68.5$ ，

由钢结构规范按  $b$  类查得  $\varphi = 0.76$ ，验算

$$\frac{N}{\varphi A} = \frac{438 \times 10^3}{0.76 \times 36 \times 10^2} = 160.1 \text{ N/mm}^2 < f = 215 \text{ N/mm}^2$$

稳定性可以保证。

由上述计算过程看到，有了稳定系数  $\varphi$  值之后，验算很简便，但详细了解  $\varphi$  值则是比较复杂的。这种验算，所保证的是构件的整体稳定性。此外，钢结构的构件本身都是由板件组成的。譬如角钢的两个肢就是板件，有时也可能直接用钢板焊成一个工字型截面来作钢结构中的构件，因此钢构件几乎都是由板件组成的。在构件的整体稳定性还未丧失时，截面较薄的板件在压应力作用下，也可能形成局部的凸凹变形，这种情况称作局部失稳。局部稳定性也是应该保证的。因此总的来说，钢结构的稳定性问题包括构件整体的稳定性，也包括局部板件等的稳定性。本书主要介绍构件的整体稳定性，同时也兼顾到板件的局部稳定性问题。

在上面的例题中  $\varphi = \sigma_{cr} / \sigma_s$ ，其中  $\sigma_{cr}$  是实际构件（不是理想构件）的临界应力， $\sigma_s$  是材料的屈服点。由此可见，构件的稳定分析主要是寻求实际构件的临界应力。前面所说，要详细了解  $\varphi$  是比较复杂的，实质上是要了解临界应力或者

临界力是比较复杂的，这是由于以下各种原因所致：

### **(1) 理想条件下的柱与实际柱有差别**

其主要差别在于有无“缺陷”(imperfection)。实际柱都是有缺陷的柱(imperfect column)，而理想条件下的柱其实是不存在的。压杆的缺陷主要是指，杆轴的初始弯曲、荷载作用的初始偏心及加荷前存在的残余应力。理想条件就是设想没有这些缺陷的情况，也就是说，杆轴笔直，荷载作用在轴线上及加荷前并无残余应力。

有无缺陷对压杆稳定的分析影响很大。理想条件柱的稳定分析比较简单明确，有缺陷柱的稳定分析则较复杂。

理想条件柱虽然实际上并不存在，但它的稳定分析却是有缺陷柱稳定分析的基础。因此研究问题的时候，总是先研究理想条件下压杆的稳定性，然后再逐项研究缺陷对稳定性的影响。

### **(2) 弹性分析与弹塑性分析有差别**

弹性分析是弹塑性分析的基础，所以弹性的稳定分析与弹塑性的稳定分析都会遇到的。稳定分析的目标是求临界荷载，对于一个具体的构件来说，其临界荷载是用弹性分析来获得还是用弹塑性分析来获得，这取决于构件的具体条件。如细长压杆，当假定它处于理想条件时，其临界荷载在材料的弹性阶段即可获得，因此这是稳定性的弹性分析。而中短压杆，当假设它处于理想条件时，其临界荷载则是在弹塑性阶段才可获得的，因此是稳定性的弹塑性分析。

上面举出两种使稳定分析复杂化的原因。此外还有些其他原因，将在以后逐步介绍。

根据由简到繁的原则，本书首先从细长压杆开始，来确

定这种杆件的临界状态(中性平衡状态)，从而确定其临界荷载。

### 1.2 中性平衡法

中性平衡(neutral equilibrium)也称随遇平衡或临界平衡。杆件的平衡，其平衡形式由稳定到不稳定之间的过渡点是中性平衡。

先用刚球作比拟说明，然后说明结构杆件。在图 1.2 所示曲面的  $AB$  之间，刚球的平衡形式是稳定的；在  $BC$  之间，刚球的平衡形式是不稳定的；在  $B$  点，刚球的平衡形式是中性的。

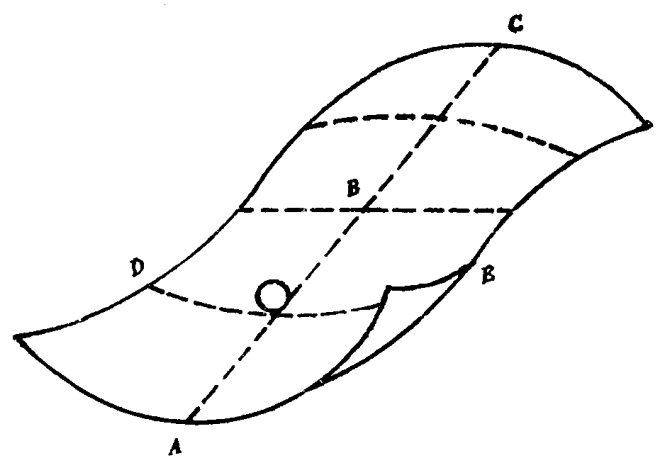


图 1.2 中性平衡模拟

在  $AB$  之间刚球的平衡形式是稳定的，是指对刚球施加微小干扰力使之沿  $DE$  曲线产生微小位移，而去掉干扰力时

刚球能恢复到原来最低点的位置。在  $BC$  之间的刚球，一旦产生位移后，即使去掉干扰力刚球也不再恢复到原来的位置，而是继续下移，所以原来在最高点时刚球的平衡形式是不稳定的。在  $B$  点，刚球就移到干扰力使它移到的位置，去掉干扰时刚球既不远离也不恢复原位，所以刚球在  $B$  点的平衡形式既不是稳定的也不是不稳定的，而是中性的。

$B$  点是稳定平衡的终止点，是不稳定平衡的开始点，因此是临界状态。中性平衡法是判定稳定问题的临界状态从而确定临界荷载的普遍方法。

现在说明结构杆件的中性平衡状态。图 1.3 所示为两端铰接的轴心受压钢杆件；它在中性平衡状态时的荷载就是压杆的临界荷载。

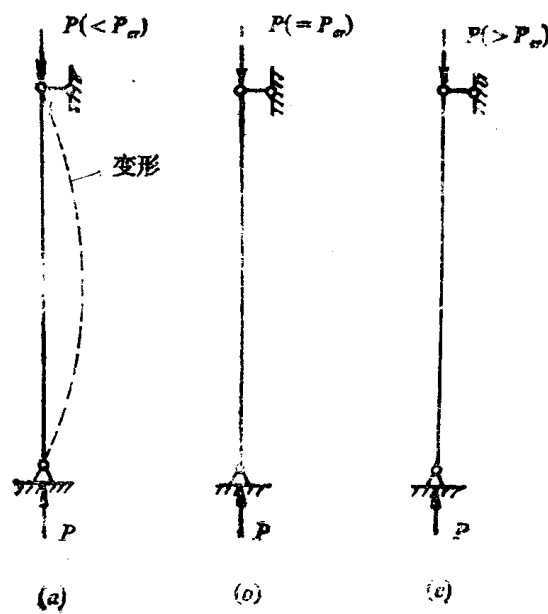


图 1.3 轴心压杆的中性平衡

当  $P$  小于某个数值  $P_{cr}$  时,杆件直线形式的平衡[图1.3(a)]是稳定的,因为在微小横向干扰力作用下杆件产生微小变形如图 1.3(a) 所示的虚线,去掉干扰则变形恢复。当  $P$  大于  $P_{cr}$  时[图 1.3(c)],杆件的直线形式的平衡是不稳定的,因为在微小干扰力作用下杆件将产生很大的变形(甚至变形一直发展到破坏),并且即使去掉干扰杆件的变形也不恢复。而当  $P$  等于  $P_{cr}$  时,杆件的平衡是中性的,因为在没有干扰力作用时,杆件保持直线形式的平衡,有干扰力作用但去掉干扰力后,杆件就停留在干扰所致的(与直线无限接近的)微弯变形的位 置上,变形不发展也不恢复,杆件则保持微弯形式的平衡,此时的外荷载  $P_{cr}$  就是杆件的临界荷载。

顺便指出,轴心压杆在临界荷载的作用下可以同时保持直线和微弯的平衡形式,表现出平衡形式产生了分支,因此这种临界荷载也称作分支荷载。分支荷载的稳定问题称为第一类稳定问题。

以后可以知道,由于杆件受截面形式的影响,轴心受压杆件的失稳变形有三种形式,即弯曲失稳、扭转失稳及弯扭失稳。弯曲失稳时杆件轴线成为微弯的平面曲线。扭转失稳时只有扭转变形,杆的轴线仍为直线。弯扭失稳时,杆件轴线成为空间曲线。其中弯曲失稳比较重要,也比较常见,因此先讲述弯曲失稳。

### 1.3 理想长柱的弹性失稳

压杆的长细比  $\lambda = l/i$ ,也叫压杆的柔度。由理想压杆的欧拉临界应力公式可以得出应力等于材料比例极限  $\sigma_p$  时的

$\lambda_p$ ，并用来作为分界，压杆的长细比大于  $\lambda_p$  的为大柔度柱或长柱，小于  $\lambda_p$  的叫中小柔度柱或中短柱。理想条件是指，原始杆件笔直、荷载与杆件的轴线重合、没有残余应力以及材质均匀。对于理想轴心压杆来说，大柔度或长柱是在弹性范围内工作的，所以也叫弹性分析，其屈曲叫弹性屈曲，中小柔度柱是在比例极限至屈服极限范围内工作的，所以叫非弹性分析，其屈曲叫非弹性屈曲。由于材料的比例极限与弹性极限相差极小，这里作为一点看待。

长柱的弹性分析与中短柱的非弹性分析，同样解决临界荷载问题，但分析问题的概念与方法不同。

### (1) 一端固定一端铰接柱

在一端固定的情况下，柱微弯时固定端出现反力弯矩

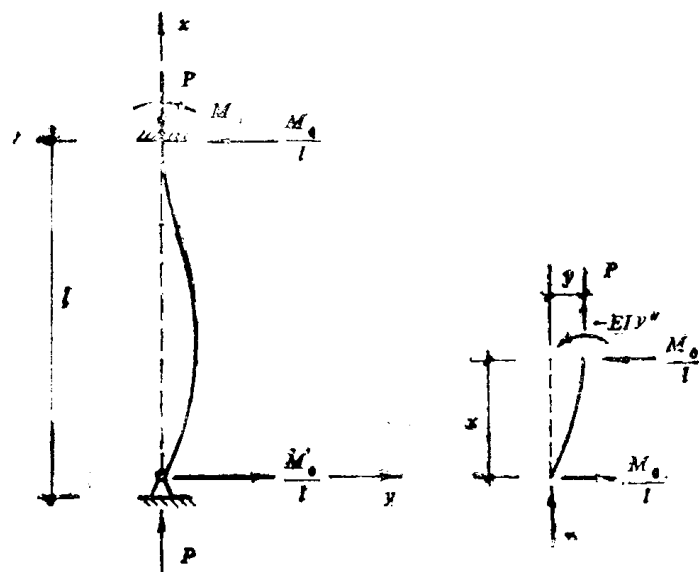


图 1.4 一端固定一端铰接柱

$M_0$ 。若用截面法在  $x$  处切开,则由距原点为  $x$  处的内力与外力的平衡(图 1.4)得中性平衡的微分方程

$$EI y'' + P y = \frac{M_0 x}{l}$$

令  $k^2 = P/EI$ , 则成为

$$y'' + k^2 y = \frac{M_0 x}{EI l} \quad (1.1)$$

由式可见,除两端铰支柱外,微分方程都是非齐次的。此时的一个特解为

$$y = \frac{M_0 x}{EI l k^2} = \frac{M_0 x}{P l} \quad (1.2)$$

齐次方程的解与两端铰支时相同,故微分方程的全解为

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M_0 x}{P l} \quad (1.3)$$

依次代入边界条件:  $x=0$  时,  $y=0$ ;  $x=l$  时,  $y=y'=0$ 。得到以任意常数  $A$ 、 $B$  及  $M_0$  为未知数的线性齐次方程组

$$\left. \begin{aligned} B &= 0 \\ A \sin kl + B \cos kl + \frac{M_0}{P} &= 0 \\ Ak \cos kl - Bk \sin kl + \frac{M_0}{Pl} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

由方程组系数行列式等于零得到

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & \frac{1}{P} \\ k \cos kl & -k \sin kl & \frac{1}{Pl} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.5)$$

整理后得到稳定方程为

$$kl = \operatorname{tg} kl \quad (1.6)$$

用曲线交点法得近似值

$$kl = 4.49$$

$$P_{cr} = \frac{4.49^2 EI}{l^2} = \frac{20.2 EI}{l^2} \quad (1.7)$$

另外，由系数方程组得到

$$A = -\frac{M_0}{P} \times \frac{1}{\sin kl} = 1.02 \frac{M_0}{P}$$

$$B = 0$$

代入式(1.3)得位移函数

$$y = \frac{M_0}{P} \left[ \frac{x}{l} + 1.02 \sin \left( 4.49 \frac{x}{l} \right) \right]$$

至于以两端铰接柱为标准的计算长度，可以直接由临界力公式写出，如

$$c_r = \frac{4.49^2 EI}{l^2} \times \frac{\pi^2 / 4.49^2}{\pi^2 / 4.49^2} = \frac{\pi^2 EI}{0.699^2 l^2}$$

$$\approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

因为反弯点处弯矩为零，也可以由位移函数二阶导数为零的条件计算得出。

## (2) 有弹性约束端的柱

柱端总是与其他构件譬如梁等相联结的，柱屈曲变形时其端部的转动迫使梁等联结构件发生变形。由于反作用关系，柱端的转动将受到约束。从受力简图来看，这时的柱端即非固定的也非铰接的，而是弹性约束的，对柱端约束的大小取决于梁等联结构件的线刚度。

现在分析图 1.5 所示柱的临界荷载。与前各柱唯一不同点在于柱上端的边界条件为  $y=0$  及  $\theta_z = \theta_l$ ，其中  $\theta$  的脚标  $z$  代表柱， $l$  代表梁。

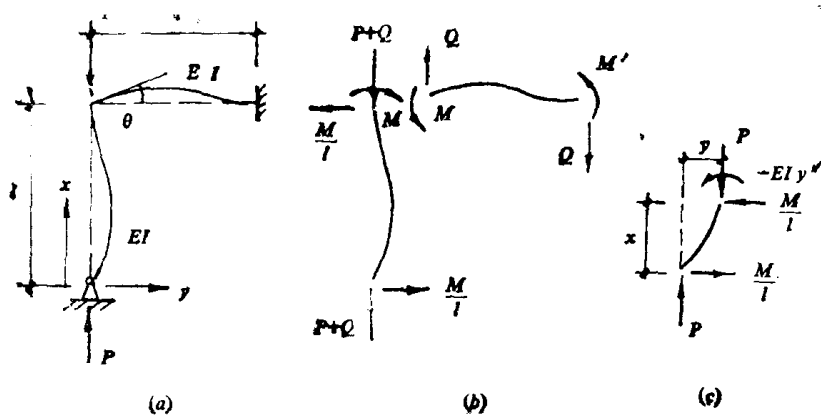


图1.5 有弹性约束端的柱

为简便起见，取柱和梁有相同的刚度和长度。轴心受压柱仍在  $P$  作用下屈曲，因为相对来说  $Q$  比较小，故可略去。

平衡微分方程为

$$EI y'' + P y = \frac{Mx}{l}$$

即 
$$y'' + k^2 y = \frac{Mx}{EI l}$$

方程的全解为

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{Mx}{Pl}$$

现在研究边界条件，柱端转角  $\theta_z$  为  $y'_{x=l}$ ，由全解得

$$\theta_z = y'_{x=l} = Ak \cos kl - Bk \sin kl + \frac{M}{Pl}$$

梁的右端设为固定端，则梁左端转角取绝对值时为

$$\theta_l = \frac{Ml}{4EI}$$

$y'_{x=l}$  在图示坐标系中为负值。为了取绝对值，应在  $y'_{x=l}$  前加一负号，由  $x=l$  时  $\theta_z = \theta_1$ ，得

$$\frac{Ml}{4EI} = -\left(Ak \cos kl - Bk \sin kl + \frac{M}{Pl}\right)$$

其中  $M$  为屈曲变形时的反力，同  $A$  和  $B$  一样是未知数，故上式为

$$Ak \cos kl - Bk \sin kl + M\left(\frac{l}{4EI} + \frac{1}{Pl}\right) = 0$$

此齐次式即为  $x=l$  时  $\theta_z = \theta_1$  的边界条件。

现将边界条件  $x=0$  时  $y=0$ ， $x=l$  时  $y=0$ ， $\theta_z = \theta_1$  代入，得线性齐次方程组

$$B = 0$$

$$A \sin kl + B \cos kl + \frac{M}{P} = 0$$

$$Ak \cos kl - Bk \sin kl + M\left(\frac{l}{4EI} + \frac{1}{Pl}\right) = 0$$

为简化起见先将  $B$  代入，于是得到

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin kl & 1/P \\ k \cos kl & (l/4EI + 1/Pl) \end{vmatrix} = 0$$

整理后，稳定方程为

$$\operatorname{tg} kl = \frac{4kl}{4 + (kl)^2}$$

用近似计算解这一超越方程得最小根为

$$kl = 3.83$$

由此得临界荷载

$$P_{cr} = \frac{3.83^2 EI}{l^2} = \frac{14.7 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.82l)^2}$$

如果上端为铰接，则  $P_{cr} = \pi^2 EI/l^2$ ；如果上端为固定端，