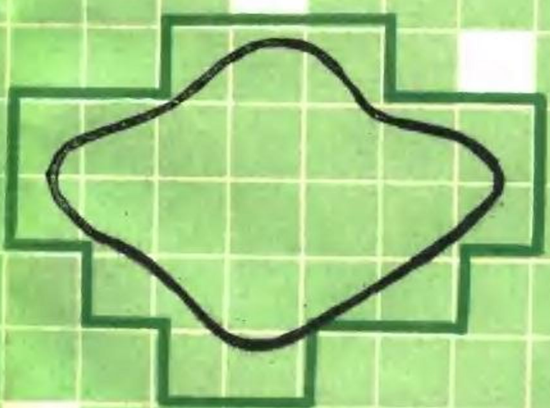
气体动力学计算方法

李文绚 金保侠 编著



机械工业出版社

气体动力学计算方法

李文绚　金保侠　编著

机　械　工　业　出　版　社

本书以读者容易理解的方式，介绍了近年发展起来的一维不定常气体力学方程组的完全守恒型差分格式，分析了差分格式的稳定性及数值边界条件的处理，并对程序的设计和调试提出了一些实际的建议。另外，还介绍了求解隐式差分方程组的牛顿迭代法及追赶法，并对有关的气体力学知识做了必要的叙述。

本书适合从事力学工作的工程技术人员及物理、气象、宇航和流体机械方面的科研人员阅读，也可作为高等学校计算数学专业的教学参考书。

气体动力学计算方法

李文绚　金保侠　编著

●

责任编辑：范兴国　责任校对：韩　晶

封面设计：田淑文　版式设计：胡金瑛

责任印制：张俊民

●

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

●

开本 850×1168 1/32·印张 9 1/4·字数237千字

1990年7月北京第一版·1990年7月北京第一次印刷

印数 0,001—1,500·定价：10.00元

●

ISBN 7-111-01603-3/TK·66

前　言

随着电子计算机的发展，其应用范围越来越广。许多工程上的实际问题，从理论上无法推导出解析解，而借助电子计算机和适当的数值方法则可以得到满足工程需要的数值解。

本书以一维不定常气体动力学方程组为例，系统地阐述了气体力学问题的数值求解方法，着重介绍了建立完全守恒型差分格式的技巧。另外，一般性地介绍了分析差分格式稳定性的几种方法，介绍了具体求解隐式差分方程组的牛顿迭代法及追赶法，叙述了几种不等步长网格的数值计算方案，并以鲁萨诺夫(Русанов)格式为例提出了一种改进人工粘性的思想。

本书所需的基础知识是线性代数，常微分方程，偏微分方程及泛函分析的基本概念，此外读者应具有一定的流体力学知识。本书的特点是比较系统地介绍了所用到的流体力学方程、公式及有关的性质。希望对学过这些课程的读者进一步掌握计算方法的知识，解决实际问题能有一些帮助。

本书的主要内容来自苏联著名数学物理学家А.А.萨马尔斯基及Ю.П.波波夫所著的《气体动力学差分格式》[1]一书，结合作者20多年从事气体力学数值方法方面的科研工作的经验编写而成。在成书的过程中，曾作为北京大学为科学院力学研究所和原航天工业部代培博士研究生的教材。

由于作者学识浅薄，本书错误在所难免，选材方面也会有不当之处，恳请读者批评指正。

引 言

现代科学中的很多问题与气体力学有密切的关系。气体力学的某些领域近年得到了很快的发展，出现了许多有价值的结果，但是到目前为止，处理气体力学问题尤其是非线性问题的一般性方法还没有找到，在很多情况下，甚至还得不到解的存在性与唯一性的证明，这也说明了气体力学问题的复杂性。这类非线性问题的研究在理论上和应用上都有很重要的意义。

在气体力学问题中，自模拟解得到了广泛的应用，但是自模拟解只在简化的模型问题中才是存在的。在一般情况下，最有效的方法是数值方法，通过有限差分方法将连续介质问题转变成离散问题，用差分方程代替微分方程，即建立有限差分格式。当然，对这种差分逼近，希望有较高的精度，能够比较精确地反映连续介质的性质，同时又要使计算量不要太大，因此研究差分方法时，一个重要的内容就是如何建立差分格式，使之能够在较小计算量下得到满足要求的数值解。

气体力学方程是一组描述基本守恒关系的恒等式，在建立差分格式时也要求在某种意义下能够满足这些守恒关系，按这个原则建立的差分格式称为守恒型格式。在线性问题中可以证明格式的守恒性是保证格式收敛的一个必要条件。守恒型格式的进一步发展是完全守恒型格式，这种格式不仅能满足基本的守恒关系，而且能够在差分意义下同时满足内能与压力作功之间的数量关系，也就是说差分格式能以同样的精度同时逼近满足质量、动量、能量守恒的任何形式的气体力学方程组。数值结果表明，完全守恒型差分格式可以使内能计算得比较准确，而且允许取较大的网格步长。

在研究差分格式的过程中，由于原始的微分方程往往找不到解析解，为了检查差分格式的质量优劣及收敛性质，常常把问题

化简。例如可将边界条件和初始条件加以限制使解具有自模拟性，然后将差分格式的解同自模拟解相比较从而得到关于格式的精度及收敛性方面的结论。在实际问题中，一般根据所研究问题的特点来选择不同的差分格式。

本书中主要介绍一维拉格朗日质量坐标下不定常问题的差分格式，但其中建立格式的基本思想对其它气体力学问题也是适用的。

目　　录

前言

引言

第一章　气体动力学基础 ………………………………… 1

一、气体动力学问题的数学模型 ………………………… 1

1.1　连续介质的定义 ………………………………… 1

1.2　连续介质的特点 ………………………………… 2

1.3　描写连续介质运动的拉格朗日坐标与欧拉坐标 ………… 4

1.4　拉格朗日坐标与欧拉坐标之间的关系 ……………… 5

二、积分形式的气体动力学方程 ………………………… 7

2.1　欧拉变量的气体动力学方程 ……………………… 7

2.2　拉格朗日变量的气体动力学方程 ………………… 11

2.3　一维气体流动的积分方程 ………………………… 12

三、微分形式的气体动力学方程 ………………………… 14

3.1　欧拉变量的微分方程 ……………………………… 14

3.2　拉格朗日变量的微分方程 ………………………… 16

3.3　一维不定常气体运动的微分方程 ………………… 18

3.4　拉格朗日质量坐标下的气体动力学方程 …………… 19

3.5　拉格朗日质量坐标下气体动力学问题的特点 ………… 21

3.6　柱对称和球对称流动的拉格朗日坐标 ……………… 23

3.7　体积改变法则 …………………………………… 27

3.8　能量方程的不同形式 ……………………………… 28

3.9　拉格朗日坐标下的积分方程 ……………………… 32

四、一维不定常双曲型气体动力学方程组 ………………… 32

4.1　气体动力学问题的声学近似 ……………………… 32

4.2　声速 ……………………………………………… 35

4.3　拟线性双曲型方程组 ……………………………… 37

4.4　气体力学方程组的特征形式 ……………………… 38

4.5 黎曼（Riemann）不变量……40
五、间断解……43
5.1 间断关系式……43
5.2 接触间断……45
5.3 激波——雨果尼奥（Hugoniot）绝热曲线……45
5.4 理想气体中的激波……46
5.5 切姆普林（Цимплен）理论……48
5.6 强激波的极限解……49
六、激波波阵的结构……51
6.1 问题的提法……51
6.2 粘性介质激波波阵的结构……53
6.3 有热传导的激波波阵结构……56
6.4 等温跳跃……58
七、活塞问题……59
7.1 问题的提法……59
7.2 自模拟解……60
7.3 活塞向气体作加速运动的问题……63
7.4 活塞背向气体运动的问题……65
八、黎曼问题……69
8.1 问题的提法……69
8.2 问题的解析解……70
九、变截面管道流动的气体动力学方程组……72
9.1 欧拉坐标下的基本方程组……72
9.2 拉格朗日坐标下的基本方程组……75
第二章 气体动力学方程组的完全守恒型差分格式……77
一、差分格式的基本概念……77
1.1 概述……77
1.2 网格……77
1.3 网格函数和网格函数的范数……79
1.4 微分算子的差分逼近……79
1.5 逼近误差……80
1.6 用差分方程逼近微分方程……81
1.7 常用符号和公式……85

二、数值计算中的非等步长问题……86
2.1 概述……86
2.2 格距逐渐变化的非均匀网格……89
2.3 被广泛采用的一种格距逐渐变化的非均匀网格差分格式……90
2.4 坐标变换法……92
2.5 结束语……93
三、守恒型差分格式与非守恒型差分格式……94
3.1 差分问题的提法……94
3.2 建立气体力学差分格式的例子……95
3.3 差分格式的分析……98
3.4 守恒型差分格式和非守恒现象的例子……101
3.5 积分插值法……106
3.6 气体力学方程组守恒型格式的分析……108
四、完全守恒型差分格式……109
4.1 问题的提法……109
4.2 格式的完全守恒条件……112
4.3 守恒型差分格式族的分析……115
4.4 柱对称和球对称气体力学方程的完全守恒型差分格式族……117
4.5 一维变截面管道内流动的完全守恒型差分格式族……119
五、齐次差分格式和人工粘性……123
5.1 概述……123
5.2 间断解的计算……123
5.3 人工粘性……125
5.4 边界结点上的差分格式……128
5.5 大面积计算时计算范围的确定法……130
5.6 网格上的积分关系……130
5.7 两种气体的分界面……132
六、数值计算结果……134
6.1 实验课题的选择……134
6.2 按非守恒型差分格式的计算结果……135
6.3 隐式非守恒余项的估计……135
6.4 守恒型差分格式积分形式余项的估计……137
6.5 守恒型格式与完全守恒型格式的差别……138

七、热传导方程的差分格式……………………………………………………141
7.1 热传导方程的守恒型差分格式……………………………………………141
7.2 热导率的逼近…………………………………………………………………143
7.3 边界条件的提法………………………………………………………………145
7.4 某些解析解……………………………………………………………………147
第三章 气体力学差分格式的稳定性……………………………………………151
一、差分格式稳定性的理解…………………………………………………………151
1.1 格式的收敛性…………………………………………………………………151
1.2 差分格式的适定性与稳定性…………………………………………………152
1.3 声学方程——气体力学方程的线性模型……………………………………154
1.4 线性传输方程…………………………………………………………………155
二、传输方程差分格式的稳定性、谱方法和极值原理……………………………156
2.1 传输方程的差分格式…………………………………………………………156
2.2 调和法…………………………………………………………………………157
2.3 差分格式$y_t+ay_x=0$的稳定性分析……………………………………158
2.4 谱方法…………………………………………………………………………158
2.5 差分格式$y_t+ay_{\bar{x}}=0$的稳定性分析……………………………159
2.6 极大值原理……………………………………………………………………160
2.7 几何解释………………………………………………………………………161
2.8 中心差分格式…………………………………………………………………164
2.9 隐式差分格式…………………………………………………………………164
三、差分格式稳定性分析的能量方法………………………………………………169
3.1 一些定义………………………………………………………………………169
3.2 共轭算子………………………………………………………………………170
3.3 用能量法分析差分格式的稳定性……………………………………………171
四、包含两个方程的方程组差分格式的稳定性……………………………………174
4.1 用调和法分析“十字”差分格式的稳定性……………………………………174
4.2 微分问题的能量关系式………………………………………………………176
4.3 差分格式的能量关系式………………………………………………………177
4.4 完全守恒型差分格式的稳定性………………………………………………178
4.5 显式完全守恒型格式的改进及稳定性分析…………………………………182
4.6 变截面管道流动完全守恒型差分格式的稳定性……………………………183
4.7 “十字”格式稳定的充分条件…………………………………………………184

五、粘性对差分格式稳定性的影响……………………………………186
5.1　带粘性的传输方程……………………………………………………186
5.2　格式$y_t+ay_{\bar{x}}=\nu y_{x\bar{x}}$的稳定性　……………………………………187
5.3　带粘性的"十字"格式的稳定性……………………………………188
5.4　带粘性的传输方程的中心差分格式………………………………189
六、热传导方程差分格式的稳定性……………………………………190
6.1　稳定性的必要条件……………………………………………………190
6.2　稳定性的充分条件……………………………………………………192
6.3　渐近稳定性……………………………………………………………194
七、用能量法分析热传导方程混合问题的平均稳定性………………196
7.1　热传导方程混合问题及四点隐式格式……………………………196
7.2　平均稳定性定义………………………………………………………197
7.3　差分计算中的符号和恒等式…………………………………………198
7.4　四点隐式格式的平均稳定性…………………………………………199
7.5　热传导方程混合问题六点隐式格式的平均稳定性………………201
八、其它几种分析稳定性的方法…………………………………………203
8.1　赫特（Hirt）启发式分析法…………………………………………203
8.2　离散点扰动的稳定性分析……………………………………………207
8.3　冯·诺依曼（Von Neumann）稳定性分析…………………………211
8.4　冯·诺依曼方法在多维问题上的应用………………………………214
九、稳定性理论的实际应用………………………………………………216
9.1　用赫特启发式分析法对一维气体动力学方程的
鲁萨诺夫（Русанов）格式进行改进……………………………216
9.2　冯·诺依曼方法对变截面管道流动问题差分格
式的稳定性分析……………………………………………………219
9.3　数值计算中某些摆动现象的分析……………………………………223
9.4　冯·诺依曼方法对变截面管道流动问题的完全
守恒型差分格式的稳定性分析……………………………………225
第四章　气体动力学方程组差分格式的求解……………………………229
一、显式格式及简单迭代法…………………………………………………229
1.1　显式格式的求解………………………………………………………229
1.2　隐式格式的简单迭代法………………………………………………230
1.3　迭代过程的收敛性……………………………………………………231

二、牛顿法和追赶法……233

2.1 求解非线性方程的牛顿法……233

2.2 追赶法……235

2.3 矩阵追赶法……238

三、牛顿法在气体力学差分方程中的应用……240

3.1 等温情形……240

3.2 迭代过程的收敛性……245

3.3 牛顿迭代法在等温激波计算中的收敛条件……251

3.4 绝热情况隐式完全守恒格式的牛顿迭代公式……252

四、边界条件……256

4.1 速度的边界条件……256

4.2 压力的边界条件……257

五、对求解气体力学问题的一些建议……259

5.1 方程组的无量纲化……259

5.2 程序设计的模块化……263

5.3 利用准确解调试程序……264

六、用完全守恒型格式计算黎曼问题的算例……265

6.1 问题的提法……265

6.2 数值结果的分析及比较……265

附录……269

附录1 隐式完全守恒格式计算黎曼问题的框图及程序……269

附录2 欧拉坐标下的一个气体力学完全守恒型差分格式……273

参考文献……278

第一章　气体动力学基础

本章主要介绍需要用到的气体力学基础知识。第一节至第三节介绍气体力学问题的数学模型、欧拉坐标与拉格朗日坐标的概念以及有热传导的气体力学方程组的形式；第四节介绍一维不定常气体力学方程组的数学特点及其双曲型性质和声学近似方程；第五节介绍气体力学方程的间断解——接触间断和激波；第六节介绍在具有粘性和热传导的耗散介质中，激波波阵的结构；第七节讨论活塞运动的古典解；第八节介绍黎曼问题的提法及分析解；在第九节中推导一维变截面管道中流动的气体力学基本方程组。

一、气体动力学问题的数学模型

1.1　连续介质的定义

建立数学模型是研究气体力学现象时广泛采用的办法，也就是用经过某种简化的理想过程代替实际过程。这种简化一方面能突出气体力学现象的本质，另一方面根据所要研究的问题，忽略一些次要因素，有助于给出一个简单的数学描述。数学模型的合理性和有效性一般要用实验来检验。

气体力学中的基本假定是认为介质是连续的。事实上，任何介质都是离散的，都是由个体的微粒所组成，它们之间的距离远大于它们的直径，这些微粒处于不停的运动中，并且不断碰撞，互相排挤。一个分子在与其它分子碰撞前所运动的距离称为分子的自由程，分子的自由程越小，说明单位体积内分子数越多，即密度越大。气体动力学通常研究的是有足够密的介质，即在单位容积中有大量的分子，这个量可用阿佛伽德罗常数来描述。气体动力学研究所有分子运动造成的宏观效果，而不关心某一个分子的运动。

连续介质的模型就是这样建立的，但并不是所有问题都可以用连续介质的假设，一般要求是：

$$l/L \ll 1 \tag{1-1}$$

式中，l 是分子自由程；L 是问题的特征长度。

这种情况实际上是要求问题本身的特征尺度要远大于分子之间的缝隙。

l/L的量级对不同问题是不同的，气体在一般条件下$l \approx 10^{-5} \sim 10^{-6}$，所以若问题的特征尺度是cm量级的，则使用连续介质假设已经是很准确了。

式(1-1)并不一定要求 l 很小，例如在研究天体运动时，星球之间的气体分子自由程是很大的，但问题的特征长度也是很大的(相当于星球直径)，所以式(1-1)仍能满足；如果考虑的是宇宙飞船的运动，就满足不了式(1-1)的条件，也不能使用连续介质假设，而应采用相应的稀薄气体假设。连续介质模型现已成为一个广泛使用的概念。

在气体动力学中，连续介质的假定只是一个基本的假定，关于介质性质还有许多其它的假设，如是否存在粘性、热传导，是否考虑重力影响等。

1.2 连续介质的特点

质点的速度、位移等称为气体力学的运动学参数。设在某个坐标系中，介质质点位置用向量$\vec{r}$表示，则该质点的速度向量为

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{1-2}$$

研究气体的运动就是确定某一时刻所有质点的位置。

描述气体热力学性质的参数称为热力学参数。如气体的密度 ρ，压力 p，温度 T，熵 S 等。

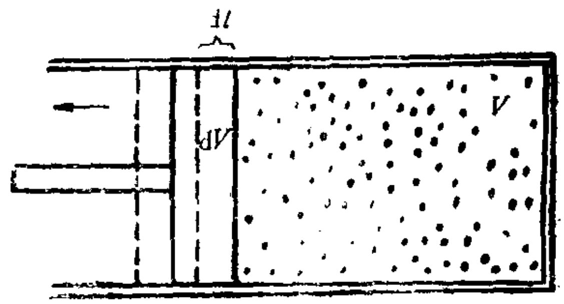


图 1-1

考虑一个一端封闭的，另一端是活塞的圆柱形容器

内的气体运动，见图1-1。假设气体体积是V，当容器内气体膨胀时体积变为$V+dV$，同时活塞向外运动一段距离dl，则气体对活塞做功dA，且

$$dA=-pSdl$$

式中，S是活塞面积；p是气体压力。

因为 $$Sdl=dV$$

所以 $$dA=-pdV \tag{1-3}$$

或 $$da=-pd\eta \tag{1-4}$$

式中，η为比容，即单位质量气体的体积；da为单位质量气体做的功。

如果活塞外是真空，则气体不做功。因为此时气体对活塞的作用力为零。

气体一旦做功，其内能就要改变，且内能的变化量等于对外所做的功与在物面上的热交换量之和。这个规律称为热力学第一定律。热力学第一定律是一切伴随有热现象的物理化学系统的能量守恒定律，说明了在热力学现象中能量转化和守恒的关系，是从大量实验中总结出来的普遍规律。

对于一个无限短的过程，热力学第一定律可表示为：

$$de=dq-pd\eta \tag{1-5}$$

式中，e为单位质量气体的内能；q为单位质量气体吸收的热量。

关系式(1-5)对任何平衡过程都是正确的。所谓平衡过程就是过程无限慢，而且中间任何状态都是平衡的。

在热力学中，除了热力学第一定律，常用的还有热力学第二定律。第二定律说明了孤立系统(与外界无热交换，无相互做功)中物理过程的方向性，即任何热力学过程中熵都是增加的。

对于可逆过程，熵S满足：

$$dS=dq/T \tag{1-6}$$

式中，T是温度。

平衡状态的热力学参数p、ρ、e、T、v、S，只有两个

是独立的，其它参数都可以用两个独立参数表示出来。例如取独立参数为 ρ 、T，则其它参数可以表示为

$$p=p(\rho, T) \quad e=e(\rho, T)$$

等，这种等式称为状态方程。

对于理想气体，这些状态方程有如下形式：

$$p=\rho RT \qquad e=e(T) \tag{1-7}$$

式中，R 是气体常数。如果内能和温度呈线性关系，则式(1-7)后一式可写为

$$e=RT/(\gamma-1) \tag{1-8}$$

式中，γ 是无量纲常数。

1.3 描写连续介质运动的拉格朗日坐标与欧拉坐标

讨论连续介质的运动，可以有两种坐标选取方法。

第一种是拉格朗日法，即跟踪研究每一个质点随时间的变化规律，从而了解整个流场的运动情况。在拉格朗日方法中，独立的自变量除时间外，还有用来标志每一个质点特征的变量（即所谓的拉格朗日变量）。如果质点个数是有限的，那么可以对质点编号，亦即拉格朗日变量的序号。

通常，拉格朗日变量取为质点的初始位置坐标，这时每一质点的运动可用下面的公式描述：

$$x_i=g_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) \quad (i=1, 2, 3) \tag{1-9}$$

式中，x_i是质点在 t 时刻的位置坐标；x_i^0是质点在 $t=0$ 时刻的位置坐标。

在式(1-9)中固定x_i^0($i=1, 2, 3$)，即可得到个别质点的运动规律；固定 t，则g_i是x_i^0的函数，可得到在 t 时刻所有质点的空间分布。

式(1-9)中x_i与x_i^0有一一对应的关系，因此可解出：

$$x_i^0=h_i(x_1, x_2, x_3, t) \tag{1-10}$$

雅可比行列式为

$$\Delta=D(x_1, x_2, x_3)/D(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \tag{1-11}$$

此量在任何时刻都不为零。即

$$\Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1^0} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2^0} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_3^0}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1^0} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2^0} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_3^0}\\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x_1^0} & \dfrac{\partial g_3}{\partial x_2^0} & \dfrac{\partial g_3}{\partial x_3^0}\end{vmatrix}\neq 0$$

第二种是欧拉法，即将整个流动区域看成一个向量场，研究此空间中任何一点的状态。对于某个固定的空间点，在某一时刻有不同的流体质点通过，该点的速度定义为在该时刻流过此点的质点速度。

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

式中，$\vec{v}$为质点速度；$r=\vec{r}(x_1,\ x_2,\ x_3)=\vec{r}(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0,\ t)$，$x_i^0$是质点在 t 时刻流过点$(x_1,\ x_2,\ x_3)$的拉格朗日坐标。

1.4 拉格朗日坐标与欧拉坐标之间的关系

无论是用拉格朗日法还是欧拉法都能得到整个流场的情况，而且两种方法之间可以互相交换。式(1-10)就是它们之间的变换公式。

设某流动参数 f 依赖于质点的初始位置及时间，即 $f=f(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0,\ t)$，则可利用式(1-10)得到 f 在物理空间的分布：

$$f=f[h_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t),\ h_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t),\ h_3(x_1,x_2,x_3,\ t)]$$

即为欧拉坐标下 f 的表达式。无论是在拉格朗日坐标还是在欧拉坐标中，时间参数是一样的。

同样办法可以实现由欧拉坐标向拉格朗日坐标的变换，为此需先将方程 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ 积分，解得：

$$x_i=x_i(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0,\ t)\quad(i=1,2,3)\qquad(1\text{-}12)$$

例：设速度分布满足如下条件：

$$v_1=U_0,\ v_2=v_3=0$$

即作一维直线运动。积分方程组：