面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

动力学（II）

谢传锋 主编

程 耀 王士敏 金 俐 编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

动力学（II）

谢传锋 主编
程 耀 王士敏 金 俐 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

图书在版编目（CIP）数据

动力学（Ⅱ）/谢传锋主编；程耀等编．—北京：高等教育出版社，1999

面向 21 世纪课程教材

ISBN 7－04－007476－1

Ⅰ．动… Ⅱ．①谢… ②程… Ⅲ．动力学－高等学校－教材 Ⅳ．0313

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 30266 号

动力学（Ⅱ）

谢传锋　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010－64054588	传　　真	010－64014048
网　　址	http：//www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	中国科学院印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	1999 年 9 月第 1 版
印　　张	7.5	印　　次	1999 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	130 000	定　　价	8.60 元

内 容 提 要

北京航空航天大学谢传锋教授主编的《静力学》、《动力学(I)》、《动力学(II)》和单辉祖教授编著的《材料力学(I)》、《材料力学(II)》,是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果,是面向21世纪课程教材和教育部工科力学"九五"规划教材,其中,《静力学》、《材料力学(I)》和《材料力学(II)》也是普通高等教育"九五"国家级重点教材。

《静力学》包括几何静力学与分析静力学;《动力学(I)》包括原理论力学课程中的运动学与动力学的基础部分;《动力学(II)》包括原理论力学中的专题部分,以及机械振动基础和流体力学基础;《材料力学(I)》包括材料力学的基础部分,涉及杆件变形的基本形式与组合形式,涵盖强度、刚度与稳定性问题;《材料力学(II)》包括材料力学的加深与扩展部分。

本教材在妥善处理传统内容的继承和现代科技成果的引进以及知识的传授和能力、素质的培养方面,进行了积极探索,是一套面向21世纪的具有新内容、新体系,论述严谨,重视基础与工程应用(包括计算机的应用),重视能力培养的新教材。教材体现了模块式的特点,通过对模块的选择与组合,可同时满足不同层次工科院校的不同专业对基础力学课程的教学要求。

本书为《动力学(II)》,内容包括拉格朗日方程、刚体动力学(二)、机械振动基础、流体力学基础等四章。

本书可作为不同层次高等学校工科本科各专业的教材,也可供高等学校工程专科、高等职业大学和成人教育学院师生及有关工程技术人员参考。

责任编辑　黄　毅
封面设计　张　楠
责任绘图　朱　静
版式设计　马静如
责任校对　朱惠芳
责任印制　宋克学

动力学(Ⅱ)目录

第五章　拉格朗日方程

在牛顿力学中研究质点系的动力学问题时，常常采用的是直角坐标系或一些特殊的正交曲线坐标系。本章将介绍一种在任意选择的坐标系（称为**广义坐标**）下建立质点系动力学方程的新方法，我们在选择坐标系时只需判断该系能否有效地描述质点系位置。

实际问题中质点系的各质点在运动时往往并不都是自由的，它们受到一些约束，有约束力作用在质点系的质点上。约束力的作用是保证质点系在运动过程中满足约束条件，在建立质点系的动力学方程时，不可避免要带入约束力。约束力是一种“被动的”力，是未知量。如果我们仅是关心质点系的运动，求解这些约束力会增加不必要的计算量，因此希望能建立一种不含约束力的动力学方程。虚位移原理使我们看到如何在静力学中建立不含约束力的平衡方程，而达朗贝尔原理可帮助我们用静力学的方法来求解动力学问题，可以想见，二者的结合能达到我们的目的。

本章首先将虚位移原理与达朗贝尔原理结合，导出不含约束力的质点系动力学方程——动力学普遍方程；然后，推导出动力学普遍方程在广义坐标下的表现形式——拉格朗日方程；最后，给出了拉格朗日方程的首次积分，它们有助于动力学方程的求解，同时也具有物理意义（常常表示运动过程中某些动力学变量守恒）。

§5－1　动力学普遍方程

考虑一含有 n 个质点的质点系，其中第 i 个质点的质量为 m_i，其上作用有主动力 $\boldsymbol{F}_i$，并受约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$。我们在各质点上虚加上该点的惯性力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i}=-m_i\boldsymbol{a}_i$。按照达朗贝尔原理，所有的主动力 $\boldsymbol{F}_i$、约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$ 和惯性力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i}$ 构成一平衡力系。如果该质点系所受的约束均为理想约束，考虑到 $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$，由虚位移原理，有

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i})\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

由于 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}i}=-m_i\boldsymbol{a}_i$，上式可写为

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{5-1}$$

式(5－1)表明:**受有理想约束的质点系在运动过程中,其上所受的主动力和惯性力在质点系的任何虚位移上所作的虚功之和为零**。式(5－1)称为动力学普遍方程。

动力学普遍方程也可写成下列直角坐标的形式:

$$\sum_{i=1}^{n}[(F_{ix} - m_i a_{ix})\cdot\delta x_i + (F_{iy} - m_i a_{iy})\cdot\delta y_i + (F_{iz} - m_i a_{iz})\cdot\delta z_i] = 0 \tag{5-2}$$

由于达朗贝尔原理给出的主动力、约束力和惯性力的平衡关系是对每一瞬时的,质点系的虚位移也是对给定瞬时的,因此只须考虑约束的瞬时性质,即把时间看成是不变的。因此动力学普遍方程对定常和非定常约束都是适用的。

式(5－1)和(5－2)也可用来列写连续质点系(如刚体、刚体系统等)的动力学方程,其实现过程与静力学中的虚位移原理大致相同,区别只是在分析受力时,要在各连续质点系上虚加上合成后的惯性力。

例5－1 椭圆规机构在水平面内由曲柄OC带动(图5－1)。曲柄和规尺都可看成匀质细杆,质量分别是m和$2m$,且长度$AC = BC = OC = l$。滑块A和B的质量都是m_1。设曲柄上作用着不变转矩M_O,不计摩擦,试求曲柄的角加速度。

解: 该问题也可用动能定理、动静法求解。现在试用动力学普遍方程求解,求解步骤如下。

1. 确定研究对象,分析受力

选定曲柄OC、规尺AB、滑块A和B组成的系统为研究对象,不计摩擦时,该系统具有理想约束。在画受力图时,只需画出作功的主动力和所有的惯性力。

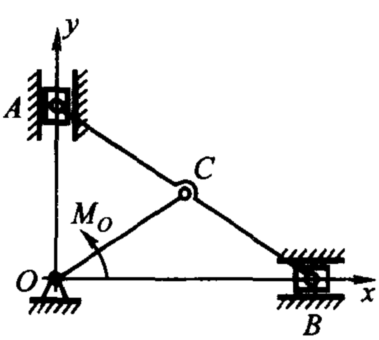

图5－1

当该机构在水平面内运动时,作功的主动力只有力偶M_O,重力不作功。所以在受力图中可略去重力。

曲柄OC作定轴转动,规尺AB作平面运动,可以由刚体上惯性力系的简化结果,分别在机构的每个构件上虚加惯性力,如图5－2所示。

2. 确定并计算惯性力

设曲柄OC的角速度和角加速度分别为ω和α(逆时针转向),则由几何关系可知规尺AB的角速度和角加速度分别为ω和α(顺时针)。由运动学关系可算出A,B和C的加速度,并由此导出各惯性力的表达式:

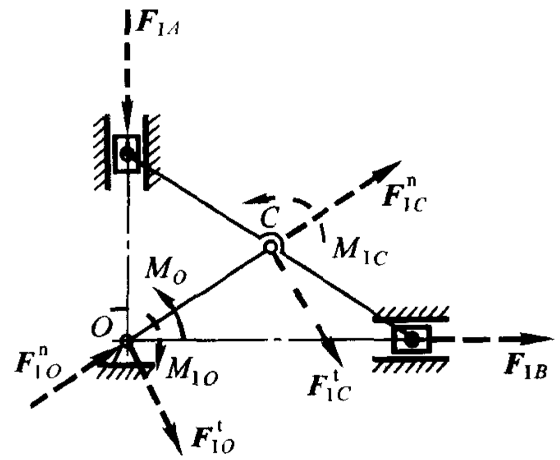

图5－2

$$F_{1O}^{t} = \frac{l}{2}m\alpha,\quad F_{1O}^{n} = \frac{l}{2}m\omega^2$$

$$F_{1C}^{t} = 2ml\alpha,\quad F_{1O}^{n} = 2ml\omega^2$$

$$M_{1O} = \frac{1}{3}ml^2\alpha,\quad M_{1C} = \frac{1}{12}(2m)(2l)^2\alpha$$

$$F_{1A} = 2m_1 l\alpha\cos\theta - 2m_1 l\omega^2\sin\theta,\quad F_{1B} = 2m_1 l\alpha\sin\theta + 2m_1 l\omega^2\cos\theta$$

3. 给出虚位移

设曲柄 OC 有一逆时针转向的虚位移 $\delta\theta \neq 0$,则由动力学普遍方程,有

$$\delta W = M_O\delta\theta - M_{1O}\delta\theta - M_{1C}\delta\theta - F_{1C}^{t}l\delta\theta$$
$$- F_{1A}\cdot 2\cos\theta\cdot l\delta\theta - F_{1B}\cdot 2\sin\theta\cdot l\delta\theta = 0$$

由于 $\delta\theta \neq 0$,可得

$$M_O = 3ml^2\alpha + 4m_1 l^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{M_O}{(3m + 4m_1)l^2}$$

§5－2 拉格朗日方程

从前一节中可以看出,动力学普遍方程中的虚位移并不都是独立的。动力学普遍方程可分解为一组独立的方程,独立方程的个数恰好等于确定质点系位置所需的独立参数个数,也就是质点系的自由度数。

静力学中的虚位移原理在广义坐标下可表示为系统的各广义力等于零。动力学普遍方程也有类似的结果。下面将导出广义坐标形式下的动力学普遍方程。

设非自由质点系具有 k 个自由度,则在任何瞬时其空间位置的 $3n$ 坐标可由 k 广义坐标 $q_1,\cdots,q_k$ 唯一确定,即

$$x_i = x_i(q_1, \cdots, q_k, t)$$
$$y_i = y_i(q_1, \cdots, q_k, t)$$
$$z_i = z_i(q_1, \cdots, q_k, t)$$

写成矢量形式,有

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, \cdots, q_k, t) \tag{5-3}$$

将式(5-3)两边对时间 t 求全导数,有

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{5-4}$$

$\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_k$ 称为**广义速度**,它们也是独立变量。当质点系运动时,这 k 个广义坐标和 k 个广义速度均是时间 t 的单值连续函数。

式(5-4)两边对广义速度 $\dot{q}_j$ 求偏导,有

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{5-5}$$

式(5-4)两边对 q_j 求偏导,有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)
\end{aligned} \tag{5-6}$$

现在先取式(5-3)的变分,由于 $\delta t = 0$,有

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k \tag{5-7}$$

考察动力学普遍方程(5-1),从《静力学》第四章可知,其中的第一项可写成 $\sum\limits_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j$,$Q_j$ 是对应于广义坐标 q_j 的广义力。由式(5-1)中的第二项:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(-m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i) &= \sum_{i=1}^{n}\left(-m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(-m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[-m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) + m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\right]\delta q_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[-m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) + m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\right)}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\right)}{\partial q_j}\right]\delta q_j$$

在最后一个等式中分别应用了式(5－5)和(5－6)。

显然，$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i$ 为质点系的动能，记为 T，则有

$$\sum_{i=1}^{n}(-m_i\boldsymbol{a}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i)=\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j=\sum_{i=1}^{n}Q_j^*\delta q_j$$

其中，

$$Q_j^*=-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right] \tag{5－8}$$

Q_j^* 称为对应于广义坐标 q_j 的广义惯性力。于是，在广义坐标形式下动力学普遍方程可表示为

$$\sum_{j=1}^{k}(Q_j^*+Q_j)\delta q_j=0 \tag{5－9}$$

由 $\delta q_1,\cdots,\delta q_k$ 的独立性，可得

$$Q_j^*+Q_j=0\qquad(j=1,\cdots,k) \tag{5－10}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\qquad(j=1,\cdots,k) \tag{5－11}$$

式(5－11)称为**第二类拉格朗日方程**，简称**拉格朗日方程**。它实质上就是动力学普遍方程在广义坐标下的表现形式，利用它可方便地建立双侧、完整、理想约束下的有限自由度质点系的动力学方程。

如果作用在质点系上的所有主动力均为有势力，记系统的势能函数为 V，$V=V(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n)=V(q_1,\cdots,q_k)$，则对应于广义坐标 q_j 的广义力为

$$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

代入拉格朗日方程(5－11)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{5－12}$$

由于 V 仅是广义坐标 $q_1,\cdots,q_k$ 的函数，$\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_j}=0$，故式(5－12)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial(T-V)}{\partial q_j}=0 \tag{5－13}$$

记 $L = T - V$，L 称为**拉格朗日函数**或**动势**。则势力场中的拉格朗日方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1,\cdots,k) \tag{5-14}$$

势能函数可使我们很方便地计算广义力。如果作用在质点系上的主动力只是部分地有势，则可将该部分力记入拉格朗日函数 L，而只需单独计算非有势力的广义力 $Q'_1,\cdots,Q'_k$，此时的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j \qquad (j = 1,\cdots,k) \tag{5-15}$$

非有势力的广义力的求法除了可以利用《静力学》第四章中的定义式(4-38)外，还可利用下面介绍的方法。

为求出对应与广义坐标 q_j 的广义力 Q_j，可取特殊的虚位移 $\delta q_j \neq 0$，而其余的 $\delta q_i = 0, i = 1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,k$，求出所有非有势力在该虚位移上所作的虚功 $[\delta W]_{\delta q_j}$，则应有

$$[\delta W]_{\delta q_j} = Q_j \delta q_j$$

由此可得出

$$Q_j = \frac{[\delta W]_{\delta q_j}}{\delta q_j} \tag{5-16}$$

例 5-2 图 5-3 所示一 U 形管，内盛液体，液体密度为 ρ，初始时两液面的高度差为 h，无初速度。由于重力的作用，液体在管内运动。设液体与管之间无摩擦，试求液面的运动规律。

解： 这是一个质点系的动力学问题。液体在管中的位置可用自由液面距静平衡位置的偏移 x 来确定，所以这是一个单自由度的受约束质点系。不计摩擦，意味着理想约束。下面用拉格朗日方程来建立管内液体的动力学方程。

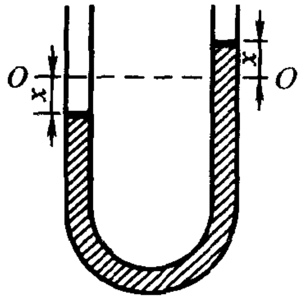

图 5-3

设液体在管内的总长度为 l，管的截面积为 A，以 x 为广义坐标，则系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}\rho A l \dot{x}^2$$

质点系所受的主动力仅有重力，重力势能可由如下观察得到：取液体在静平衡位置时势能为零，在 x 位置的重力势能变化为：左边的 $O-O$ 线下长度为 x

的液体升至右边 O - O 线上的 x 长度液体，势能增加了 $\rho Axg\left[\frac{x}{2}-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]$，所以

$$V = \rho Agx^2$$

系统的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}\rho Al\dot{x}^2 - \rho Agx^2$$

代入拉格朗日方程，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho Al\dot{x}) - (-2\rho Agx) = 0$$

可得动力学方程：

$$l\ddot{x} + 2gx = 0$$

该方程的通解有形式

$$x = C_1\cos\sqrt{\frac{2g}{l}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{2g}{l}}t$$

由初始条件：$t = 0, x = \frac{h}{2}, \dot{x} = 0$，得 $C_1 = \frac{h}{2}, C_2 = 0$，最后得液面的运动规律

$$x = \frac{h}{2}\cos\sqrt{\frac{2g}{l}}t$$

这是一个振幅为 $\frac{h}{2}$，周期为 $2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$ 的振荡。

例 5 - 3　离心式调速器以角速度 ω 绕铅垂轴转动(图 5 - 4)。每个均质杆长为 l，质量为 m_1，每个球质量为 m_2，忽略球径，套筒质量为 m_3。试求：

(1) 系统的运动微分方程；

(2) 相对平衡时系统的位形；

(3) 维持系统匀速转动所需的控制力偶。

解： 1. 当绕铅垂轴匀速转动时，这是一个单自由度系统，取杆与铅垂线的夹角 θ 为广义坐标。下面先计算系统的动能。

杆与球上的各质点的运动都可分解成牵连运动为定轴转动、相对运动为平面曲线运动的复合运动。由于这两种运动的速度矢量互相垂直，故可分别计算它们的动能，然后简单叠加。

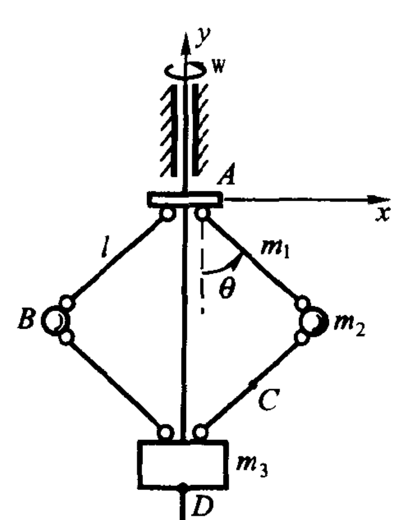

图 5 - 4

系统中上面的两杆的相对运动为定轴转动，角

速度均为$\dot{\theta}$,转向相反;下面的两杆作平面运动,角速度也均为$\dot{\theta}$,转向相反。系统的动能由以下几项组成:

$$T = 2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}m_1 l^2\right)\dot{\theta}^2 + 2\times\left[\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}m_1 l^2\dot{\theta}^2\right]+$$
$$4\times\frac{1}{2}\int_0^l\frac{m_1}{l}(\omega\xi\sin\theta)^2\mathrm{d}\xi + 2\times\frac{1}{2}m_2(l\dot{\theta})^2 + 2\times\frac{1}{2}m_2(\omega l\sin\theta)^2 +$$
$$\frac{1}{2}m_3 m_3\dot{y}_D^2$$

其中:

$$x_C = \frac{l}{2}\sin\theta,\quad \dot{x}_C = \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y_C = -\frac{3l}{2}\cos\theta,\quad \dot{y}_C = \frac{3l}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$
$$y_D = 2l\cos\theta,\quad \dot{y}_D = -2l\dot{\theta}\sin\theta$$

经过计算,可得

$$T = \left(\frac{2}{3}m_1 + 2m_1\sin^2\theta + m_2 + 2m_3\sin^2\theta\right)l^2\dot{\theta}^2 +$$
$$\frac{2}{3}m_1\omega^2 l^2\sin^2\theta + m_2\omega^2 l^2\sin^2\theta$$

作用在系统上的主动力是各构件的重力,取过O点的水平面为零势能面,则系统的势能函数为

$$V = -2\times m_1 g\times\frac{l}{2}\cos\theta - 2\times m_1 g\times\frac{3l}{2}\cos\theta -$$
$$2\times m_2 gl\cos\theta - m_3 g\times 2l\cos\theta$$
$$= -(4m_1+2m_2+2m_3)gl\cos\theta$$

$L = T - V$,代入拉格朗日方程,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$\left[\frac{4}{3}m_1 + 4(m_1+m_3)\sin^2\theta + m_2\right]l^2\ddot{\theta} + 2(m_1+m_3)l^2\sin 2\theta\cdot\dot{\theta}^2 -$$
$$\left(m_2+\frac{2}{3}m_1\right)\omega^2 l^2\sin 2\theta + (4m_1+2m_2+2m_3)gl\sin\theta = 0$$

2. 为求系统的相对平衡位置,令$\ddot{\theta}=0,\dot{\theta}=0$,可得

$$\sin\theta = 0\quad 或\quad \cos\theta = \frac{(6m_1+3m_2+3m_3)g}{(3m_2+2m_1)\omega^2 l}$$

3. 如果求控制力偶M,则必须考虑系统绕铅直轴的一般转动(不要求匀

速)。因为“系统绕铅直轴匀速转动”相当于一个约束,现解除该约束,将控制力偶作为主动力,则系统增加了一个自由度。记系统绕铅直轴的转角为 φ,系统的势能不变,动能表达式中以 $\dot{\varphi}$ 代替 ω,则

$$L=\left(\frac{2}{3}m_1+2m_1\sin^2\theta+m_2+2m_3\sin^2\theta\right)l^2\dot{\theta}^2+$$
$$\frac{2}{3}m_1\dot{\varphi}^2l^2\sin^2\theta+m_2\dot{\varphi}^2l^2\sin^2\theta+(4m_1+2m_2+2m_3)gl\cos\theta$$

将控制力偶看成非有势力,它对应于广义坐标 θ、φ 的广义力计算如下:

取 $\delta\theta\neq0,\delta\varphi=0$,在该虚位移下 M 作的虚功为 $[\delta W]_{\delta\theta}=0$,所以 $Q_\theta^M=0$;

取 $\delta\varphi\neq0,\delta\theta=0$,在该虚位移下 M 作的虚功为 $[\delta W]_{\delta\varphi}=M\cdot\delta\varphi$,所以 $Q_\varphi^M=[\delta W]_{\delta\varphi}/\delta\varphi=M$。

由拉格朗日方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=Q_\theta^M$,可得

$$\left[\frac{4}{3}m_1+4(m_1+m_3)\sin^2\theta+m_2\right]l^2\ddot{\theta}+2(m_1+m_3)l^2\sin2\theta\cdot\dot{\theta}^2-$$
$$\left(m_2+\frac{2}{3}m_1\right)\dot{\varphi}^2l^2\sin2\theta+(4m_1+2m_2+2m_3)gl\sin\theta=0$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\varphi}=Q_\varphi^M$,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{4}{3}m_1\dot{\varphi}l^2\sin^2\theta+2m_2l^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\right]=M$$

令 $\dot{\varphi}=\omega$,可得控制力偶

$$M=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{4}{3}m_1+2m_2\right)\omega l^2\sin^2\theta\right]=\left[\left(\frac{4}{3}m_1+2m_2\right)\omega l^2\sin2\theta\right]\dot{\theta}$$

可以看出,上式实际上相当于对系统关于 y 轴应用动量矩定理。

例5－4　质量为 m_A 的直角三角块 A 沿光滑水平面作直线滑动(图5-5),在它的光滑斜面上放置一质量为 m_B 的均质圆柱 B,圆柱 B 上绕有不可伸长的绳索,绳索通过理想滑轮 C 悬挂一质量为 m_D 的物块 D。滑轮的质量及大小不计,试建立系统的运动微分方程。

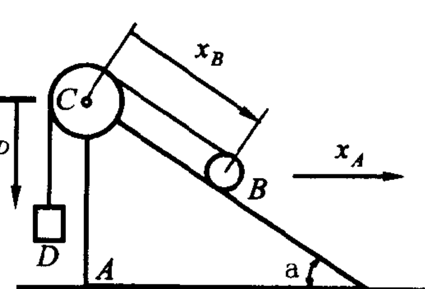

图5－5

解:　首先确定系统的自由度。由于斜面是光滑的,圆柱体在斜面上的位置与它所转过的角度是相互独立的变量,这两个变量可确定物块 D 的垂直方向位置。另外三角块 A 的位置也是一独立变量,所以系统的自由度是3。

取三角块的水平滑动位移 x_A,圆柱体 B

的圆心在斜面上的位移 x_B、物块 D 的铅直方向的位移 y_D 为广义坐标。记圆柱体的半径为 r，圆柱体的角速度为 $\frac{\dot{x}_B+\dot{y}_D}{r}$。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2+\frac{1}{2}m_D(\dot{x}_A^2+\dot{y}_D^2)+\frac{1}{2}m_B[(\dot{x}_A+\dot{x}_B\cos\alpha)^2+(\dot{x}_B\sin\alpha)^2]+$$
$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}m_Br^2\left(\frac{\dot{x}_B+\dot{y}_D}{r}\right)^2$$

取通过滑轮 C 的轮心的水平面为重力的零势能面，系统的势能为

$$V=-m_Bgx_B\sin\alpha-m_Dgy_D$$

系统的拉格朗日函数：

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_A+m_B+m_D)\dot{x}_A^2+\frac{3}{4}m_B\dot{x}_B^2+$$
$$\frac{1}{4}(m_B+2m_D)\dot{y}_D^2+m_B\dot{x}_A\dot{x}_B\cos\alpha+\frac{1}{2}m_B\dot{x}_B\dot{y}_D+m_Bgx_B\sin\alpha+m_Dgy_D$$

代入拉格朗日方程，有

$$(m_A+m_B+m_D)\ddot{x}_A+m_B\ddot{x}_B\cos\alpha=0$$
$$m_B\ddot{x}_A\cos\alpha+\frac{3}{2}m_B\ddot{x}_B+\frac{1}{2}m_B\ddot{y}_D-m_Bg\sin\alpha=0$$
$$\frac{1}{2}(m_B+2m_D)\ddot{y}_D+\frac{1}{2}m_B\ddot{x}_B-m_Dg=0$$

这就是系统的运动微分方程。

§5－3 拉格朗日方程的首次积分

上一节中导出了有限自由度受约束质点系的拉格朗日方程，可以看出，拉格朗日方程是一组二阶常微分方程。一般情况下，方程是非线性的，求解很困难。但对某些类型的系统，可以利用系统的特性给出某些首次积分，使部分二阶常微分方程降阶，这对整个微分方程组的定性分析和数值求解都是很有帮助的。以下研究势力场中的拉格朗日方程的首次积分。

为给出首次积分，必须研究系统的拉格朗日函数，我们首先考察质点系的动能。

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial_l}\dot{q}_j\dot{q}_l+\sum_{i=1}^{n}m_i\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

可以看出,质点系的动能由三部分组成:广义速度的二次齐次函数,记为 T_2;广义速度的一次齐次函数,记为 T_1;广义速度的零次齐次函数,记为 T_0。即

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

当质点系所受的都是定常约束时,$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = 0$,此时,

$$T_1 = T_0 = 0$$

$$T = T_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_l$$

质点系的势能仅是广义坐标和时间的函数,即 $V = V(q_1,\cdots,q_k,t)$。

一、循环积分

一般而言,拉格朗日函数 L 会显含所有广义速度 $\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k$,但可能会不显含某些广义坐标,在这种场合我们可得到循环积分,L 中显缺的广义坐标称为**循环坐标**。下面导出循环积分。

由于广义坐标的编号是人为的,不妨设质点系的前 r 个坐标是循环坐标,则有

$$L = L(\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k,q_{r+1},\cdots,q_k,t),\quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,\qquad (j = 1,\cdots,r)$$

由拉格朗日方程,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0,\qquad (j = 1,\cdots,r)$$

可得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = p_j = 常量,\qquad (j = 1,\cdots,r) \tag{5-17}$$

它们就是质点系的拉格朗日方程的**循环积分**,$p_j = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ 称为对应于广义坐标 p_j 的**广义动量**($j = 1,\cdots,k$)。循环积分的力学意义就是**对应于循环坐标的广义动量守恒**。

二、能量积分

如果在拉格朗日函数中不显含时间 t,则有

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) \tag{5-18}$$