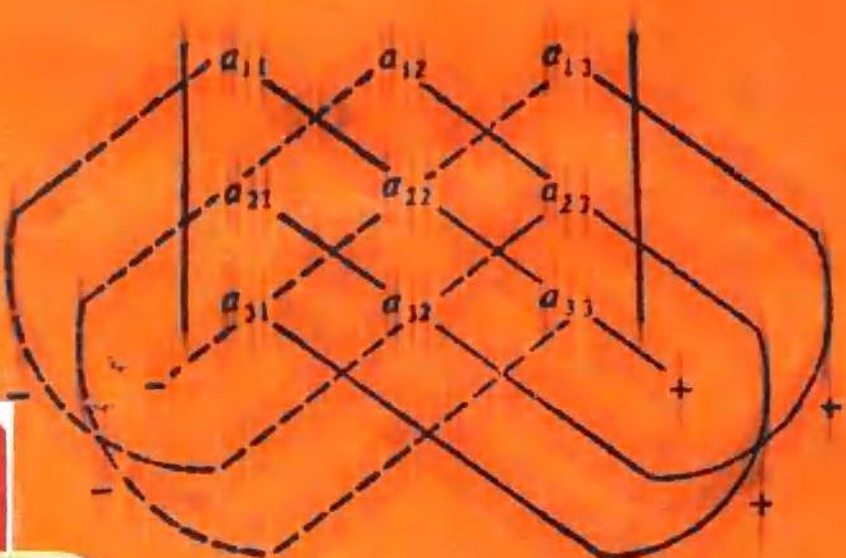
经济数学（线性代数）解题指导

李晋明 主编



经济管理出版社

经济数学(线性代数)
解题指导

李晋明　主编

经济管理出版社

责任编辑 贾晓建
版式设计 王宇航
责任校对 全志云

图书在版编目(CIP)数据

经济数学(线性代数)解题指导/李晋明主编. 一北京:经济管理出版社,1999.1

ISBN 7-80118-738-5

Ⅰ.经… Ⅱ.李… Ⅲ.线性代数-解题 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 35551 号

经济数学(线性代数)解题指导

李晋明 主编

出版:经济管理出版社

(北京市新街口六条红园胡同 8 号 邮编:100035)

发行:经济管理出版社总发行 全国各地新华书店经销

印刷:北京国马印刷厂

850×1168 毫米 1/32 7.75 印张 200 千字

1999 年 1 月第 1 版 1999 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:1—6000 册

ISBN 7-80118-738-5/F·701

定价:11.00 元

前　　言

自从北京商学院院编教材《经济数学(线性代数)》出版以来,许多同学经常向作者询问教材中一些习题的解法,并建议出版一本解题指导。

考虑到广大同学的需要,为帮助不同层次同学更好地学习、掌握线性代数,我们在原教材的基础上,编写了这本解题指导。

本解题指导,除了将教材中每章后的习题共 296 道题按顺序详细解答以外,在每章习题前还安排了共 72 道题的典型例题分析。这些例题有介绍基本概念和基本运算方法的计算题或证明题;有初学者容易在计算中出现错误或不易理解的概念澄清题;有一题多解的开拓思路题;也有不少较灵活的综合题。

本解题指导,主要是为初学线性代数同学提供的辅导教材,编者由衷地希望初学的同学一定要在独立思考、独立解题的前提条件下,再参考本解题指导的提示与解答,千万不要盲目地照搬照抄。否则就有违编者的初衷与意愿。

参加本解题指导编写工作的有贺新瑜(第一、二章),李晋明(第三、四章),柏金群(第五章)等老师。本书最后由李晋明负责统稿,由黄先开老师审定。

限于编者的水平,书中难免有不妥之处,希望读者批评指正。

编者

1998 年 12 月

目　　录

第一章　行列式

典型例题分析

例 1.1　计算排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，并回答当 n 为何值时 $n(n-1)\cdots 21$ 为偶排列，当 n 为何值时 $n(n-1)\cdots 21$ 为奇排列？

解：$N((n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$，由于$\frac{n(n-1)}{2}$的奇偶性需根据 n 而定，故分别讨论如下：

当 $n=4k$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{4k(4k-1)}{2}=2k(4k-1)$是偶数；

当 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$是偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$是奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$是奇数；

（其中 $k=0,1,2\cdots$）。综上所述，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，此排列为奇排列。

例 1.2　求函数 $f(x)$中 x^4 的系数

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

解法一：$f(x)$中含有 x 为因子的元素有

$$a_{11}=-x \quad a_{21}=x \quad a_{23}=2x \quad a_{32}=x$$

$$a_{35}=3x \quad a_{44}=x \quad a_{52}=-7x$$

因而，含有 x 为因子的元素 a_{ij}的列下标只能取

$$j_1=1, j_2=3, j_3=2,5, j_4=4, j_5=2$$

于是，含 x^4 的项中元素 a_{ij}的列下标只能取

$$j_1=1, j_2=3, j_3=2, j_4=4$$

与

$$j_2=1, j_3=5, j_4=4, j_5=2$$

相应的五元排列只有 13245，31542，含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{N(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4$$

$$(-1)^{N(31542)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4$$

故 $f(x)$中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

解法二：将 $f(x)$化为含 x 的元素位于不同行不同列的行列式，于是将这些元素相乘，即可求出 x^4 的系数. 为此，将 $a_{21}=x$ 及 $a_{32}=x$ 变成零元素，得到

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & 4 \\ -6/7 & 0 & 3/7 & 27/7 & 3x+2/7 \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

x^4 的系数是下列两项系数之和：

$$(-1)^{N(1352)}(-x)\cdot 1\cdot 3x\cdot x\cdot(-7x)=21x^4$$

$$(-1)^{N(13542)}(-x)\cdot 2x\cdot 2/7\cdot x\cdot(-7x)=4x^4$$

故所求系数为 $21+4=25$.

解法三：将 $f(x)$化成 x 只位于主对角线上的行列式，为此，将 $f(x)$的第一行加到第二行，第三行的 7 倍加到第五行上，再将所得行列式第二列的 -3 倍加到第五列，最后将新行列式的第二、三行对调，得到

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & -9 \\ -1 & x & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & -14 \\ 2 & 21 & 4 & x & -58 \\ -6 & 0 & 3 & 27 & 21x+2 \end{vmatrix}$$

含 x^4 的两项分别为

$$(-1)\cdot(-x)\cdot x\cdot 1\cdot x\cdot(21x)=21x^4$$

$$(-1)\cdot(-x)\cdot x\cdot 2x\cdot x\cdot 2=4x^4$$

故 $f(x)$中含 x^4 的系数为 $4+21=25$.

例 1.3　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$$

解:　在计算数字行列式时,一般是利用其性质,将行列式中某行(列)的元素除一个元素不为零外,其余的均变为零,即“造0”。然后,利用行列式展开定理将行列式“降阶”。重复应用此过程,直到行列式的值容易算出为止。在“造0”时,应尽量选定含有元素1的行(列),如没有1,可适当选取便于“造0”的一些数。

另外,在计算行列式之前,首先应观察其特点。如能利用性质化简,则应化简后再计算。例如,化分数为整数;化较复杂的行列式为几个简单行列式的代数和;提出公因子(往往是通过行(列)之间的变换后达到此目的);加边法等等。

这里给出的这个行列式中,大多数元素为分数,其分母各不相同,在计算时每一步都要进行通分运算,运算比较麻烦而且容易出错。因此,首先应将各行乘以适当的数,把各元素化为整数,然后再

通过其他变换把行列式化为上(下)三角形行列式。应该注意的是：各行乘以某常数时，行列式的值要除以同样的常数。

具体解法如下：

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{30}\times\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 10 & -75 & 12 & 45 \\ 15 & -60 & 21 & 75 \\ 20 & -135 & 24 & 75 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{30}\times\frac{1}{7}\times(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 15 & -60 & 21 & 75 \\ 20 & -135 & 24 & 75 \\ 10 & -75 & 12 & 45 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[15(1)+(2)]{\substack{10(1)+(4)\\20(1)+(3)}}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -30 & 6 & 120 \\ 0 & -95 & 4 & 135 \\ 0 & -55 & 2 & 75 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times\frac{1}{30}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{30}\times\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 30 & 6 & 120 \\ 95 & 4 & 135 \\ 55 & 2 & 75 \end{vmatrix}$$

$$=\left(-\frac{1}{30}\right)\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{30}\times\frac{1}{7}\times5\times2\times5\begin{vmatrix} 6 & 3 & 24 \\ 19 & 2 & 27 \\ 11 & 1 & 15 \end{vmatrix}$$

$$=\left(-\frac{1}{30}\right)\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{30}\times\frac{1}{7}\times5\times2\times5\times3\begin{vmatrix}2&1&8\\19&2&27\\11&1&15\end{vmatrix}$$

$$=\left(-\frac{1}{30}\right)\times\frac{1}{7}\begin{vmatrix}2&1&8\\19&2&27\\11&1&15\end{vmatrix}=\frac{1}{35}$$

例 1.4　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

解：　所有行(列)对应元素相加后都等于 $a+(n-1)b$，然后提出公因子 $a+(n-1)b$，即

$$D_n=\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&a&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a+(n-1)b&b&b&\cdots&b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\1&a&b&\cdots&b\\1&b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\begin{subarray}{c}-1(1)+(n)\\ \cdots\\ -1(1)+(3)\\ -1(1)+(2)\end{subarray}]{}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

例 1.5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$$

解: 行列式 D 中 a_{11},a_{22},a_{33}均为两项之和,可用分项法求之.

$$D=\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & ab & ac \\ 0 & b^2+1 & bc \\ 0 & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} a & ab & ac \\ b & b^2+1 & bc \\ c & bc & c^2+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & ab & ac \\ 0 & b^2 & bc \\ 0 & bc & c^2+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 & ac \\ 0 & 1 & bc \\ 0 & 0 & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} 1 & ab & ac \\ 0 & b & c \\ 0 & bc & c^2+1 \end{vmatrix}+c^2+1$$

$$=a^2+b\begin{vmatrix} 1 & ab & ac \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}+c^2+1=a^2+b^2+c^2+1$$

注:由例 1.4 和例 1.5 可见,如果给定行列式的元素间有某些特点,则应充分利用其特点,结合行列式的性质,选取恰当的方法进行计算,以达到简化计算的目的.

例 1.6 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \qquad (a_i\neq 0, i=1,2,\cdots n)$$

解： 此行列式中除第一行第一列及对角线上的元素外，其余元素均为零. 以下给出这类题的一般解法.

把所有第 $i+1(i=1,2,\cdots,n)$ 列的 $-\frac{c_i}{a_i}$ 倍加到第一列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right).$$

例 1.7　利用加边法计算行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

解： $D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$

所谓加边法，是把 n 阶行列式适当地添加一行一列(或 m 行 m 列)，得到一个 $n+1$(或 $n+m$)阶行列式，使其值不变，并且要求 $n+1$(或 $n+m$)阶行列式的值比较容易计算.

例 1.8　计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a & a \\ b & \alpha & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ b & \beta & \alpha & \cdots & \beta & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

解： 从最后一行开始直到第三行，每行都减去相邻前一行得

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta-\alpha & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

再把第三列至第 n 列都加到第二列得

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda & (n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ b & \alpha+(n-2)\beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta-\alpha & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

依第一、二行按拉普拉斯定理展开得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \lambda & (n-1)a \\ b & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+2)+(1+2)}(\alpha-\beta)^{n-2} \\ &= [\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab](\alpha-\beta)^{n-2} \end{aligned}$$

例 1.9　利用范德蒙行列式计算

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$$

解： 此行列式通过变形后成为范德蒙行列式标准型

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 1^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix} \\ &= (3-1)(4-1)(5-1)(4-3)(5-3)(5-4)=48 \end{aligned}$$

注：范德蒙行列式是

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

公式特点:同一列(如第 l 列)上,第 K 行的元素 a_{Kl} 有:$a_{Kl}=a_l^{K-1}$,等式右端是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数的所有可能的差 $a_i-a_j(1\leqslant j\leqslant i\leqslant n)$的连乘积.

例 1.10 用递推法计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解: 将第一列元素写成两数之和

$$D_n=\begin{vmatrix} (x-a)+a & a & \cdots & a \\ 0+a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0+a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ 0 & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}$$

所以导出递推公式

$$D_1=x,D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}\qquad(n=2,3,\cdots)$$

因此有 $D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}$

$$(x-a)D_{n-1}=(x-a)^2D_{n-2}+a(x-a)^{n-1}$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$(x-a)^{n-2}D_2=(x-a)^{n-1}D_1+a(x-a)^{n-1}$$

故

$$\begin{aligned}D_n&=(x-a)^{n-1}\cdot x+(n-1)\cdot a\cdot(x-a)^{n-1}\\&=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]\end{aligned}$$

利用递推关系式解题的一般步骤是:从原行列式出发,按某行(列)展开或利用行列式的性质,找到高阶行列式与一个或几个同类型的较低阶的行列式之间的关系式(称为递推关系式)后,由此逐次推出 D_n 与可明显求值的低阶行列式 D_1 和 D_2 等的关系,再归纳运算出 D_n 的结果.

例 1.11　求证

$$\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&a_1+x\end{vmatrix}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

证:　左端行列式的特征是对角线以及与对角线平行的位置上元素非零,于是通过变形,如果能变成上、下三角形行列式,问题便可得到解决。由此推出,只要按第 n 行展开即可。

$$\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&a_1+x\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\x&-1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&-1&0\\0&0&\cdots&x&-1\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+2}a_{n-1}\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+(n-1)}a_2\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+n}(a_1+x)\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}+(-1)^{n+2}a_{n-1}x(-1)^{n-2}$$

$$+\cdots+(-1)^{2n-1}a_2(-1)x^{n-2}+(-1)^{2n}(a_1+x)x^{n-1}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_2x^{n-2}+(a_1+x)x^{n-1}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

在行列式的证明问题中，经常采用数学归纳法，这是一种很有效的方法，以此题为例.

(1)验证 $n=2$ 时命题成立.

$$D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=x(x+a_1)+a_2=x^2+a_1x+a_2$$

(2)假设 $n=K$ 时命题成立，要证 $n=K+1$ 时命题成立. 假设