# 高 等 数 学

## 下 册

龙文庭 杨克劭
富景隆 何德周 编

哈 尔 滨 工 业 大 学 出 版 社

## 内 容 提 要

本书共 14 章，分上、下两册。上册共 9 章，主要内容为函数、极限、一元函数微分、积分及其应用以及微分方程等；下册共 5 章，主要内容为无穷级数、傅立叶级数、空间解析几何、多元函数等。可作为高等工科院校的高等数学教材或教学参考书，也可供自学者参考。


高 等 数 学

下 册

龙文庭 杨克劭 宿景隆 何德周 编

*

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张17 字数389 000

1988 年 3 月第 1 版 1988 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—10 000

ISBN 7-5603-0055-3/O·13 定价：2.35元

# 目　　录

# 第十章 级 数

无穷级数（简称为级数），是数学分析的一个重要组成部分。它是研究函数与进行数值计算的工具。本章首先讨论数项级数，这是级数理论的基础；然后再讨论在应用上有重要意义的幂级数与傅立叶级数。

## §10.1 数 项 级 数

本节介绍与数项级数的概念和数项级数的收敛与发散的定义等有关的一些基础理论。

### 一、数项级数的概念

级数可以认为是无穷多个数的形式上相加。例如，设 $a$、$r$ 均为确定的数，则

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ \cdots$$

称为一个无穷等比数列，而

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

则称为一个无穷等比级数。仿此我们给出级数一般概念如下：

设

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots \tag{1}$$

为任意的一个数列，将（1）的各项依序用加号连接起来而得到的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{2}$$

称为一个无穷级数。其中 $u_1$，$u_2$，$\cdots$，$u_n$，$\cdots$分别称为它的第一，第二，…，第 $n$ 项，特别是 $u_n$ 又称为通项或一般项。

在这里，我们假定 $u_1$，$u_2$，$\cdots$，$u_n$，$\cdots$都是实数，故无穷级数(2)是由无穷多个实数用加号连接起来的式子，应称为无穷数项级数。一般简称为数项级数或级数。并常用累加符号简记为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$。

注意，在此我们将级数定义为由无穷个数"依序用加号连接起来"而得到的一个式子，而不是"相加"。这是因为加法只能对有限个数运算，无穷多个数相加，在代数运算中无法完成，而且也是未予定义的。因此级数（2）只是一个表达式，还谈不上是否有什么意义。

但是，对于确定的 $n$，级数（2）的前 $n$ 项和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \quad (3)$$

是可以运算的。我们称（3）为级数（2）的前 $n$ 项部分和。由前$n$项部分和构成的数列 $\{s_n\}$：

$$s_1=u_1,\quad s_2=u_1+u_2,\cdots,s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k \tag{4}$$

称为级数（2）的部分和数列。

显然

$$u_n=s_n-s_{n-1}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{5}$$

（此处规定 $s_0=0$）。

**例 1** 几何级数（等比级数）

$$\sum_{n=1}^{+\infty}ar^{n-1}=a+ar+\cdots+ar^{n-1}+\cdots\qquad(a\neq0,\ r\neq0)$$

其首项为 $a$，公比为 $r$，通项为 $u_n=ar^{n-1}$。它的前 $n$ 项部分和为

$$s_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\qquad(r\neq1)$$

当 $r=1$ 时

$$s_n=a+a+\cdots+a=na$$

当 $r=-1$ 时

$$s_n=a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a=\begin{cases}0 & n\text{ 为偶数时}\\ a & n\text{ 为奇数时}\end{cases}$$

**例 2** 调和级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

其通项 $u_n=\frac{1}{n}$。前 $n$ 项部分和

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

**例 3** 通项为$u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$的级数为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

**例 4** 通项为 $u_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 的级数为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}=1+(-1)+(-1)+1+1+(-1)+(-1)+\cdots$$

**例 5** $\sqrt{2}$可表为无穷级数

$$\sqrt{2}=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\cdots$$

其通项 $u_n$ 至今不能写出。

## 二、数项级数的收敛定义

**定义** 若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛于确定的有穷值 $s$，即

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = s$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，并称 $s$ 为其和数。记为

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

而称

$$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

为其余和。显然，当级数收敛时

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$$

不收敛的级数（即 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ 不存在，或 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \infty$）称为发散级数。发散级数没有和数。

按照数列收敛的 $\varepsilon$—$N$ 定义，级数收敛的 $\varepsilon - N$ 定义为：

对任给 $\varepsilon>0$，存在序号$N$，当 $n>N$ 时，恒有

$$|r_n| = |s - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| < \varepsilon$$

由上述级数收敛的定义可知，级数的收敛与和数问题，归结为其部分和数列的收敛与极限问题：先求部分和 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，这是普通的有限加法运算，然后求 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$，这是极限运算。

**例 6** 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

的敛散性。

**解** 先求前 $n$ 项部分和

$$s_n = a\frac{1-r^n}{1-r} \qquad (r\neq 1)$$

$r<1$

然后，令 $n\to+\infty$，求 $s_n$ 的极限。

当 $|r|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$，所以

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = a \lim_{n\to+\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

当 $|r|>1$ 时 $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n$ 不存在。从而知 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a\frac{1-r^n}{1-r}$ 不存在。

当 $r=1$ 时，

$$s_n = na, \qquad \lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$$

当 $r=-1$ 时，

$$s_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数时} \\ a & n \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ 不存在。于是我们有下述重要结果：

几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$，当公比的绝对值小于 1，即 $|r|<1$ 时收敛，和为 $\dfrac{a}{1-r}$。当公比的绝对值大于或等于 1，即 $|r|\geqslant 1$ 时级数发散。

**例 7** 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$1 - \frac{1}{n+1}$

的敛散性。

**解**

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

故级数收敛，且和数为 1，即

$$1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \cdots \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

其余和为

$$r_n = s - s_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n\to+\infty)$$

**例 8** 讨论调和级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

的敛散性。

**解**

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

此时 $s_n$ 不能像前面的例子那样写成一个简洁的表达式而求极限。但利用不等式

$$x > \ln(1+x) \qquad (x>0)$$

有

$$s_n > \ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(1+n)$$

而已知

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(1+n)=+\infty$$

从而可知

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=+\infty$$

故调和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 为发散的。

## 三、收敛级数的性质

级数当其收敛时，是一种“无限和”，那么，通常有限和的许多运算性质（例如结合律，交换律等等）是否对于级数也成立？对于收敛级数有下列结论。

**定理 1** （收敛级数的结合律）

在收敛级数各项之间，任意加括号后所成的级数仍为收敛的，且和数不变。

**证** 设

$$s=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

将其项任意加以括号而得到的新级数，比如为

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5+u_6)+u_7+\cdots=b_1+b_2+b_3+\cdots$$

其中 $b_1=u_1+u_2$ $b_2=u_3+u_4+u_5+u_6$，$b_3=u_7$，…

令 $\sigma_m=b_1+b_2+\cdots+b_m$，则有

$$\sigma_m=s_n \qquad n\geqslant m$$

从而

$$\lim_{m\to+\infty}\sigma_m=\lim_{n\to+\infty}s_n=s$$

即 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛，且和仍为 $s$。

值得强调指出的是，对于发散级数，结论不成立。例如，发散级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+1-1+\cdots$$

任意加以括号后，可能成为收敛级数了。

**定理 2** （收敛级数乘以常数）

将收敛级数 $s=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 各项乘以常数 $k$ 后所得级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}ku_n$仍收敛，且和为$ks$，即

$$k\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}ku_n$$

若 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散，$k\neq0$，则$\sum_{n=1}^{+\infty}ku_n$ 亦发散。

证明作为习题，读者自证之。

**定理** 3　（两个收敛级数相加）

设$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$均收敛，和分别为 $s$ 及 $\sigma$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ 仍为收敛的，且和为 $s+\sigma$，即

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$$

**证明留作习题。**

综合定理 2 与定理 3 可得较一般的结论：

设 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 均收敛，$k_1$，$k_2$ 为两个常数，则有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(k_1a_n+k_2b_n)=k_1\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+k_2\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$$

**定理** 4　（级数的收敛性与它的有限项无关）

对一个收敛级数，更换它的有限项，其收敛性不变（当然，和数一般是不同了）。

证　设收敛级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$，部分和为 $s_n{}^a$，和为 $s$，更换它的有限项，比如 $a_1$ 变为 $b_1$，$a_5$ 变为 $b_5$，$\cdots a_k$ 变为 $b_k$，其余不变，即 $a_n=b_n$ $(n>k)$，变换后的级数设为 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$，部分和为 $s_n{}^b$，则显然有

$$\begin{aligned}s_{k+p}^b&=b_1+a_2+\cdots+a_4+b_5+\cdots+a_{k-1}+b_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+p}\\&=s_{k+p}^a-s_k{}^a+s_k{}^b\end{aligned}$$

其中 $s_k{}^a$、$s_k{}^b$ 均为有限项，故都是常数。于是

$$\begin{aligned}\lim_{p\to+\infty}s_{k+p}^b&=\lim_{p\to+\infty}(s_{k+p}^a-s_k{}^a+s_k{}^b)\\&=s-s_k{}^a+s_k{}^b\end{aligned}$$

即 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛于和 $s-s_k{}^a+s_k{}^b$。

定理 4一般也说成是在收敛级数中增加有限项或删去有限项，不改变它的收敛性。因为，如果是删去有限项，我们可以认为是把删去项换成了 0；如果是增加有限项，我们可以认为增加的项和与它相邻的项合并成了一项。这两种情况，都归结为改换了有限项的情形，因而由定理 4 知，结论成立。

由定理 4，还可知道，将一个收敛级数的有限项重新排列，级数的收敛性不变，且和亦不变。但应注意，这里我们说的是有限项，对于涉及无限项的情形，则结论可能是不成立的。这就是说交换律对级数不一定成立。此外两个收敛级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 相乘所得的级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\right)$$

如何运算，结果是否收敛，这些都将在后面讨论。

最后，我们再指出收敛级数的一个重要的性质。

**定理 5** （级数收敛的必要条件）

如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，则它的通项趋向于零，即 $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$。

**证** 因为 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，故

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s$$

而

$$u_n = s_n - s_{n-1}$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

本定理说明，如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，那么必有 $u_n\to 0$，于是可知，若 $\lim_{n\to+\infty} u_n\neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 必为发散的。但绝不可误认为，若 $u_n\to 0$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛。例如调和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 的通项 $\frac{1}{n}\to 0(n\to+\infty)$，但它是发散的。

据此，对一个级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$，首先判断其通项 $u_n$ 的极限是很有意义的。一切通项不趋于0的级数都属于发散级数类。而一切收敛级数都必须属于通项趋向零的这一类之中。

**例 9** 证明级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{2!}{10^2} + \frac{3!}{10^3} + \cdots + \frac{n!}{10^n} + \cdots$$

是发散的。

**解** 考虑其通项，当 $n>10$ 时

$$u_n = \frac{n!}{10^n} = \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}\cdots\frac{10}{10}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{10}\cdots\frac{n}{10} > \frac{10!}{10^{10}}$$

因为 $\frac{10!}{10^{10}}$ 为确定的正数，$\lim_{n\to+\infty} u_n\neq 0$，所以级数是发散的。

## §10.2 正项级数的收敛性判别法

由上节的介绍，我们可以看出，对于数项级数，最基本的问题就是判别其收敛或者发散。当然，级数收敛的定义本身就是一种判别法，不过，对于大多数的级数，我们很难把它的部分和 $s_n$ 写成一个简单的式子（例如象例6例7那样），以便于求 $s_n$ 的极限，所以，用定义来判别级数的敛散性，只是个原则性方法。以下两节我们就要在这个原则性方法上，讲述几个有效、常用的判别法。

### 一、正项级数及其收敛原理

所谓正项级数，就是构成级数的各项均为正的常数。即对于一切的 $n$，均有 $u_n>0$，

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 为正项级数。

显然正项级数的部分和数列 $\{s_n\}$ 有一个简单而重要的性质，即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 是单调递增数列。

根据单调数列收敛的充分必要条件，立即可得正项级数收敛性准则。

**定理 1** （正项级数的收敛准则）

正项级数收敛的充分必要条件是它的部分和数列有界。

**证** 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 为正项级数，则由前述的结论，其部分和数列 $\{s_n\}$ 是单调递增的。现在又假设它是有界的。于是部分和数列 $\{s_n\}$ 就是单调递增有界数列。故 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ 存在，即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛。定理的必要性，则是很显然的。

容易看出，正项级数的部分和数列总是有下界的。定理 1 所说的有界，实际主要是指有上界。如果 $\{s_n\}$ 无上界，那么 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 必发散，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$。

根据第一节的定理 2 与定理 4，上述关于正项级数的论述，可以推广到下述的级数。

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 为数项级数，$k$ 为某一确定正整数。如果对于任意的自然数 $m>k$、$n>k$，恒有 $u_m \cdot u_n > 0$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为同号级数。

同号级数与正项级数有相同性质。

定理 1 在实际使用上，仍是不甚便利的。因为要判断一个数列是否有界，在多数情况下是困难的。本定理的重要意义，在于以它为基础，可以建立下面的便于应用的各种判别法。

## 二、比较判别法

**定理 2** （比较法）

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 均为正项级数，且

$$a_n \leqslant b_n \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

则 (1) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，那么 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 亦收敛。

(2) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散，那么 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 亦发散。

**证** 设

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$\sigma_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

则有

$$s_n \leqslant \sigma_n \qquad (\text{由假设 } a_n \leqslant b_n)$$

因之 (1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，则 $\sigma_n$ 有上界，于是 $s_n$ 亦有上界，所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

(2) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散，则 $s_n$ 无上界，于是 $\sigma_n$ 亦无上界，所以 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散。

定理 2 之所以称为比较法，其意义是明显的，将两个正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$逐项比较其大小。结论是优（强）级数收敛，则劣（弱）级数亦收敛。而劣级数发散时，优级数亦必发散。又由第一节的定理 4，如果 $a_n \leqslant b_n, n>k$ 成立，则本定理结论仍成立。

**例 1** 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

的敛散性。

**解** 我们熟知调和级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

是发散的，而且不难看出

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

于是判定级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$为发散的。

**例 2** 判别级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

的敛散性。

**解：** 已知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$是收敛的，而

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

于是可知$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$是收敛的。

在此顺便指出，$P$ 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \qquad (p>0)$$

显然，当 $p \leqslant 1$ 时有$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$，与调和级数比较，可知它是发散的。当 $p>1$ 时（例 2，即 $p=2$ 的情形），以后我们可以证明它是收敛的。$p$ 级数、等比级数常常作为比较法的标准级数。

**例 3** 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$$

的敛散性。

**解** 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$ 有

$$0 < u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} < 2^n \frac{\pi}{3^n} = \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

而 $\pi \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 为收敛的，$\left(r = \frac{2}{3} < 1\right)$，故

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$

收敛。

对于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$ 有

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^3}} = \frac{1}{(n+1)^{2/3}}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^{2/3}} \left(p = \frac{2}{3} > 1\right)$ 发散，故

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$$

发散。

### 三、比值判别法（达朗贝尔 D'Alembert 判别法）

**定理 3** 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 为正项级数。如果

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

则 (1) 当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛。

(2) 当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散（包括 $\rho = +\infty$）。

**证** 由数列极限的 $\varepsilon—N$ 定义有：对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N$，当 $n > N$ 时，恒有

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \varepsilon$$

亦即 $$\rho - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon \qquad (n > N)$$

(1)　设$\rho<1$，则总可取 $\varepsilon$ 如此之小，使

$$\rho+\varepsilon=r<1$$

于是由 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon$，有

$$u_{n+1}<r\cdot u_n \qquad n=N+1,\ N+2,\ \cdots$$

记 $u_N=c$，则有

$$u_{N+1}<cr$$
$$u_{N+2}<ru_{N+1}<cr^2,$$
$$u_{N+3}<ru_{N+2}<cr^3,$$

由归纳法，可得

$$u_{N+k}<c\cdot r^k \qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

显然 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}cr^k=c\sum\limits_{k=1}^{+\infty}r^k$ 收敛 $(r=\rho+\varepsilon<1)$。由比较法，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{N+k}$收敛，因而

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_N+\sum_{k=1}^{\infty}u_{N+k}$$

收敛。

(2)　设 $\rho>1$，则总可取 $\varepsilon$ 如此之小，使

$$\rho-\varepsilon=q>1$$

于是由

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>q$$

有

$$u_{n+1}>q\cdot u_n>u_n \qquad n=N+1,\ N+2,\ \cdots$$

亦即

$$0<u_{N+1}<u_{N+2}<\cdots<u_{N+k}<\cdots, \qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

所以，$n\to+\infty$ 时 $u_n$ 不趋于 0，因而此时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是发散的。

**例 4**　判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

的敛散性。

**解**

$$u_n=\frac{1}{n!},\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

所以此级数收敛。

比值法是以极限形式给出的，并且只须用到级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 本身的项 $u_n$ 来判别其敛

散，使用起来比较方便，是一个极为重要的判别法。但使用这个方法，当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 时，则得不到什么结论，例如 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，但此时它们均有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$；当然，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在确定的趋向时，就更不能得出什么结论了，在上述两种情况下，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的敛散性，就需要用其它的方法来判别。

**例 5** 讨论级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=1+\frac{1}{2!}x+\frac{2^2}{4!}x^2+\frac{6^2}{6!}x^3+\cdots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n+\cdots$$

的敛散性（$x>0$）。

**解**

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{\frac{n!^2}{(2n)!}x^n}{\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-2)!}x^{n-1}}=\frac{n^2}{(2n-1)\cdot 2n}x\to\frac{x}{4}\qquad(n\to+\infty)$$

所以，当 $x<4$ 时，此级数收敛；而 $x>4$ 时，此级数发散。

当 $x=4$ 时，由比值法不能判定。但此时

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{4n^2}{4n^2-2n}>1\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots,\ )$$

于是 $u_n>u_{n-1}$，$u_n$ 不趋于 0，级数发散。

## 四、根值判别法（柯西 Cauchy 判别法）

**定理 4** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，如果

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$$

则 (1) $\rho<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛。

(2) $\rho>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散，（包括 $\rho=+\infty$ 的情形）。

**证** 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ 有：对任给 $\varepsilon>0$，存在 $N$，当 $n>N$ 时，恒有

$$\rho-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon\qquad(n>N)$$

(1) 若 $\rho<1$，则可选 $\rho+\varepsilon=r<1$，于是有

$$\sqrt[n]{u_n}<r$$

或即 $$u_n<r^n\qquad n=N+1,\ N+2\cdots$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}r^n$ 是收敛的，由比较法，即知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 为收敛的。

(2) 若 $\rho>1$，则可选 $\rho-\varepsilon>1$，于是有

$$\sqrt[n]{u_n}>\rho-\varepsilon>1 \qquad (n>N)$$

从而 $u_n>1$，$u_n$不趋于 0。故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$发散。

像比值法一样，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$，则不能得到什么结论。

**例 6** 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0)$ 的敛散性。

**解** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot x=0<1$

所以此级数，对于一切 $x>0$ 都是收敛的。

比值法与根值法都是建立在比较法的基础上。下面我们再讲一种与广义积分相联系的判别法。

## 五、积分判别法

**定理 5** 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 为正项级数，$f(x)$ 为定义在$[1,+\infty)$的单调递减连续函数。如果

$$u_n=f(n),\quad n=1,2,3,\cdots$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 同为收敛的或同为发散的。

**证** 由已设条件可推知 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为非负的，且在任意的有限区间 $[1,A]$ $(A>1)$ 可积。将广义积分写成级数形式

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}f(x)dx$$

其通项为

$$u_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$$

再由所设条件，对任意的 $x$，$n\leqslant x<n+1$，有

$$f(n+1)\leqslant f(x)\leqslant f(n) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

于是
$$\int_n^{n+1}f(n+1)\,dx\leqslant\int_n^{n+1}f(x)dx\leqslant\int_n^{n+1}f(n)dx$$

亦即
$$f(n+1)\leqslant\int_n^{n+1}f(x)dx\leqslant f(n)$$

此即
$$u_{n+1}\leqslant\int_n^{n+1}f(x)dx\leqslant u_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

由比较法 若$\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，由左端的不等式推出 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_{n+1}$，亦即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛。若 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 发散，由右端的不等式推出 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散；反之，若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散，由不等式左边推出$\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 发散。若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛，由不等式右边推出 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。所以广