陈家鑫 编著

应用概率论

科学出版社

应用概率论

陈家鑫　编著

科　学　出　版　社

1 9 9 2

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书用初等概率论的观点和方法，阐述了最有用的一些随机过程模型。为加深读者对随机过程模型有比较清晰直观的认识，多数章节后都附有一些实用性的例子，使读者不致有数学推演的枯燥乏味的感觉，凡是学过初等概率论和微积分的读者就能读懂本书。

本书可供一般的科技工作者、理工院校的本科生和研究生参考。

应用概率论
陈家鑫　编著
责任编辑　牛耘
科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100707
北京市怀柔县黄坎印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
*
1992 年 7 月深圳第一版　　开本：787×1092　1/32
1992 年 7 月第一次印刷　　印张：8 1/4
印数：1—3 000　　字数：186 000
ISBN 7-03-002865-1/O·538
定价：7.50 元

序　言

随机过程理论是概率论的一个重要研究课题，无论在通讯、生物、物理和化学等工程技术领域，还是在经济、管理、人口和保险等社会科学领域里都已经得到广泛的应用．可以毫不夸张地说，现代文明的造就和发展，无不打上并将继续更深地打上这一理论的烙印．

用严谨的数学语言叙述随机过程理论是这个学科的专家学者的事情，它对数学理论的完善和发展无疑是必不可少的．高深的数学工具却常常未能为更多的科技工作者所掌握，致有望而生畏之嫌．因此，撰写通俗的，能为一般的科技工作者、理工院校的本科生、研究生所接受，以介绍应用为目的的入门参考书籍和教材也是必要的．

作者寄予本拙作的意愿：用初等概率论的观点和方法，以力求概念准确、论证严格为宗旨阐述最有用的一些随机过程模型；用较浅显的数学工具对这些随机过程模型进行认真、细致的论述，使只学过初等概率论和微积分的读者能读懂全书．

因本书取材寓于概率这一概念的诸多应用，不介入高深数学理论的剖析，故拟定书名为《应用概率论》．

编写过程中，为加深读者对随机过程模型有比较清晰的直观认识，克服数学推演过程中的枯燥乏味的感觉，多数篇章的末尾均开辟一个小节，收集一些实用性的例题．对这些例题展开讨论，给出解案，试图为读者展现所述随机过程模型的应用前景，增强读者的学习兴趣．

编者受水平所限，书中错误和不妥之处一定不少，恳请批评指正。

作　　者

1991年6月于汕头大学

目　录

前言

第一章　生成函数……………………………………（1）

§1　概率生成函数……………………………………（1）

§2　矩生成函数……………………………………（8）

§3　特征函数……………………………………（18）

§4　Mellin 变换……………………………………（30）

第二章　随机过程的基本概念……………………………………（34）

§1　随机过程的有限维分布族……………………………………（35）

§2　随机过程的数字特征……………………………………（38）

§3　均方微积分简介……………………………………（42）

§4　几类重要的随机过程……………………………………（58）

第三章　分支过程……………………………………（63）

§1　分支过程的概率生成函数……………………………………（63）

§2　分支过程的数字特征……………………………………（69）

§3　灭绝概率……………………………………（72）

第四章　一维简单随机游动……………………………………（79）

§1　转移概率 $u_k(n)$ ……………………………………（80）

§2　首次返回原点的概率 f_k ……………………………………（81）

第五章　Markov 链……………………………………（86）

§1　绝对概率分布与一步转移概率阵……………………………………（88）

§2　基本方程……………………………………（91）

§3　状态分类……………………………………（93）

§4　遍历性……………………………………（103）

§5　例子……………………………………（107）

第六章　更新计数过程……………………………………（114）

§1　更新概率与事件分类……………………………………（115）

§2 更新计数过程……(118)
§3 剩余寿命与更新方程……(123)
§4 例子……(129)
第七章 Poisson 过程……(133)
§1 Poisson 过程……(133)
§2 时变 Poisson 过程……(137)
§3 复合 Poisson 过程……(141)
§4 滤过 Poisson 过程……(145)
§5 例子……(147)
第八章 可数状态的 Markov 过程……(150)
§1 转移概率函数……(150)
§2 Q 矩阵……(151)
§3 例子……(158)
第九章 生灭过程……(163)
§1 定义……(163)
§2 具线性增长的生灭过程……(165)
§3 时齐生灭过程……(173)
§4 例子……(180)
第十章 简单排队过程……(186)
§1 基本概念……(186)
§2 $M/M/k$ 队列……(187)
§3 $M/G/1$ 队列……(199)
§4 例子……(208)
第十一章 平稳过程……(214)
§1 定义……(214)
§2 平稳过程自相关函数的谱分解……(218)
§3 平稳过程的谱分解……(226)
§4 平稳随机序列……(238)
§5 平稳序列的线性预测……(244)
§6 例子……(249)

第一章　生 成 函 数

生成函数法是概率论研究的一个重要数学方法.

有几种不同形式的生成函数，各依不同类型的随机变数予以定义，按照不同的情形选择不同的生成函数，使应用起来更为方便. 比如说，非负整值随机变数，选用概率生成函数；一般的随机变数，定义矩生成函数或特征函数等. 这三种形式的生成函数，在寻求独立随机变数和的分布函数、在各种概率问题的计算中，都提供十分有效的论证与计算的途径，尤其在极限理论的研究中，为不少命题的证明架起了桥梁.

Mellin 变换是另一种形式的生成函数，对研究相互独立的非负整值随机变数的积或商的分布函数，对有关的概率计算也有着同样的重要作用.

§1　概率生成函数

定义 1.1.1　设 ξ 是概率空间（Ω，F，P）上的非负整值随机变数，记其样本空间为X，概率函数$P(x)$，令

$$G(s)=\sum_{x\in X}P(x)s^{x},\quad -1\leqslant s\leqslant 1 \tag{1.1.1}$$

称 $G(s)$ 为随机变数 ξ 的概率生成函数。

概率生成函数只对非负整值随机变数有定义，易知样本空间$X\subset\{0,1,2,\cdots\}$.

【例1.1.1】　设 ξ 服从二项分布 $B(n,P)$，求 ξ 的概

率生成函数.

解: ξ 的概率函数为

$$P(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x},\qquad x=0,1,2,\cdots n$$

于是，代入（1.1.1）式，得概率生成函数

$$G(s)=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}s^x=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(ps)^x q^{n-x}$$
$$=(ps+q)^n,\qquad -1\leqslant s\leqslant 1$$

【例1.1.2】 设 ξ 服从参数 $\lambda\,(>0)$ 的 Poisson 分布，求 ξ 的概率生成函数.

解: ξ 的概率函数为

$$P(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\quad x=0,1,2,\cdots$$

于是，代入（1.1.1）式，得概率生成函数

$$G(s)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}s^x=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^x}{x!}$$
$$=e^{(s-1)\lambda},\quad -1\leqslant s\leqslant 1$$

有关概率生成函数的较常用的一些性质，被总结成如下的几个定理：

定理1.1.1 设 ξ，ξ_1，ξ_2 都是概率空间（Ω，F，P）上的非负整值随机变数，$G(s)$，$G_1(s)$ 及 $G_2(s)$ 分别是它们的概率生成函数，则

(i) $G(s)$ 在$[-1,\ 1]$上连续（从而一致连续）；

(ii) $G(1)=1$ 且 $|G(s)|\leqslant 1$，$\qquad -1\leqslant s\leqslant 1$；

(iii) a, b 为非负整数，$\eta=a\xi+b$，η 的概率生成函数 $G_\eta(s)$ 为

$$G_\eta(s)=s^bG(s^a),\qquad -1\leqslant s\leqslant 1$$

(iv) 当 ξ_1 与 ξ_2 相互独立且 $\xi=\xi_1+\xi_2$，成立

$$G(s)=G_1(s)G_2(s) \qquad -1\leqslant s\leqslant 1$$

证：让我们分别用$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}_1$和$\boldsymbol{X}_2$表示ξ，ξ_1和ξ_2的样本空间.

(i) 对一切的$x\in\boldsymbol{X}$，$-1\leqslant s\leqslant 1$，因

$$|P(x)s^x|\leqslant P(x), \ \sum_{x\in X}P(x)=1$$

按数学分析中的判别准则，$G(s)$在$[-1,1]$上绝对且一致收敛．于是$G(s)$在$[-1,1]$上连续．

(ii) 显然$G(1)=\sum\limits_{x\in X}P(x)=1$且对一切的$-1\leqslant s\leqslant 1$，

$$|G(s)|=\left|\sum_{x\in X}P(x)s^x\right|\leqslant\sum_{x\in X}P(x)|s|^x\leqslant\sum_{x\in X}P(x)=1$$

(iii) 易知η是非负整值随机变数，用$\boldsymbol{Y}$表示其样本空间，必有

$$Y=\{ax+b: x\in\boldsymbol{X}\}$$

于是，代入（1.1.1）式，得η的概率生成函数

$$G_\eta(s)=\sum_{y\in Y}P\{\eta=y\}s^y=\sum_{x\in X}P\{\xi=x\}s^{ax+b}$$

$$=s^b\sum_{x\in X}P(x)(s^a)^x=s^bG(s^a)$$

(iv) 由ξ_1与ξ_2相互独立的假设，对$x\in\boldsymbol{X}$

$$P\{\xi=x\}=P\{\xi_1+\xi_2=x\}$$

$$=\sum_{x_1\in X_1}P\{\xi_1=x_1,\xi_2=x-x_1\}$$

$$=\sum_{x_1\in X_1}P\{\xi_1=x_1\}\cdot P\{\xi_2=x-x_1\}$$

这里$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$之间成立关系

$$\boldsymbol{X}=\{x: x=x_1+x_2, x_1\in\boldsymbol{X}_1, \ x_2\in\boldsymbol{X}_2\}$$

于是，代入（1.1.1）式，得

$$G(s)=\sum_{x\in X}P\{\xi=x\}s^{x}$$
$$=\sum_{x\in X}\sum_{x_1\in X_1}P\{\xi_1=x_1\}P\{\xi_2=x-x_1\}s^{x}$$
$$=\sum_{x_1\in X_1}P\{\xi_1=x_1\}s^{x_1}\cdot\sum_{x_2\in X_2}P\{\xi_2=x_2\}s^{x_2}$$
$$=G_1(s)\cdot G_2(s)$$

推论1.1.1.1 设 ξ_1，ξ_2，$\cdots\xi_n$ 都是概率空间（Ω,F,P）上的非负整值随机变数，相互独立且 $\xi=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，则 ξ 的概率生成函数 $G(s)$ 为

$$G(s)=\prod_{i=1}^{n}G_i(s),\quad -1\leqslant s\leqslant 1 \qquad (1.1.2)$$

其中 $G_i(s)$ 为 ξ_i 的概率生成函数，$i=1$，2，$\cdots n$.

定理 1.1.2（唯一性定理） 非负整值随机变数的概率函数 $P(x)$，$x\in X$ 为其对应的概率生成函数 $G(s)$ 唯一确定，即

$$P(x)=\frac{1}{x!}G^{(x)}(0),\quad x\in X \qquad (1.1.3)$$

其中 $G^{(x)}(0)=\left.\frac{d^{(x)}G(s)}{ds^{x}}\right|_{s=0}$，即 $G(s)$ 在零点的 x 阶导数.

证：按概率生成函数的定义，对一切 $-1\leqslant s\leqslant 1$ 有

$$G(s)=\sum_{x\in X}P(x)s^{x}$$

根据幂级数理论，对 $G(s)$ 展开 Maclaurin 级数，其展式为

$$G(s)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{G^{(x)}(0)}{x!}s^{x},\quad -1\leqslant s\leqslant 1$$

由于幂级数展开的唯一性，必成立（1.1.3）式.

该式常被用来计算概率．举例如下．

【例1.1.3】 袋里装有号码为1，2，3，4，5，6的六个球，进行有放回的抽球试验，共做五次试验并记录每次被抽到的球的号码，求五次试验所记录下的号码的总和等于15的概率．

解：第 k 次抽球所得号码是随机变数 ξ_k，$k=1, 2, \cdots 5$、设五次抽球所记录下的号码的总和等于 ξ，则

$$\xi=\sum_{k=1}^{5}\xi_k.$$

因抽球是有放回的，ξ_1，ξ_2，$\cdots\xi_5$ 相互独立同分布，它们的概率函数为

$$P(x)=\frac{1}{6}, \quad x=1, 2, \cdots 6$$

于是，对一切 $-1\leqslant s\leqslant 1$，有

$$G_k(s)=\frac{1}{6}(s+s^2+\cdots+s^6)$$

$$=\frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}, \quad k=1, 2, \cdots 5$$

根据推论 1.1.1.1，有

$$G(s)=\prod_{k=1}^{5}G_k(s)=\frac{1}{6^5}s^5(1-s^6)^5(1-s)^{-5}$$

定理 1.1.2 告诉我们，概率 $P\{\xi=15\}$ 恰好是概率生成函数 $G(s)$ 的 MacLaurin 展式中 s^{15} 的系数。

因此，只需求 $(1-s^6)^5(1-s)^{-5}$ 的 MacLaurin 展式中 s^{10} 的系数．因为

$$(1-s^6)^5=1-5s^6+\cdots$$

$$(1-s)^{-5}=1+\cdots+\frac{5\times 6\times 7\times 8}{4!}s^4+\cdots$$

$$+\frac{5\times 6\times\cdots\times 13\times 14}{10!}s^{10}+\cdots$$

所以，$(1-s^6)^5(1-s)^{-5}$ 的 MacLaurin 展式中 s^{10} 的系数 等于

$$-5\times\frac{5\times6\times7\times8}{4!}+\frac{5\times6\times\cdots\times13\times14}{10!}=651$$

于是

$$P\{\xi=15\}=\frac{651}{6^5}$$

定理1.1.3 设 ξ 是概率空间（Ω，F，P）上的非负整值随机变数，存在有限的 n 阶原点矩，则 ξ 的概率生成函数 $G(s)$ 在$[-1,\ 1]$内的 n 阶导数存在且 ξ 的 k（$\leqslant n$）阶原点矩由 $G(s)$ 在点 $s=1$ 处的阶数不超过 k 的左导数值所确定.

证：将幂级数

$$G(s)=\sum_{x\in X}P(x)s^x$$

在收敛区域$[-1,\ 1]$的内部，即（-1，1）上逐项求导数，得

$$G'(s)=\sum_{x\in X}xP(x)s^{x-1},\tag{1.1.4}$$

上式中令 $s\to1-0$，因 $E(\xi)$ 存在，得

$$G'(1-0)=\sum_{x\in X}xP(x)=E(\xi)$$

同理，在（-1，1）内对（1.1.4）式逐项求导数，得

$$G''(s)=\sum_{x\in X}x(x-1)P(x)S^{x-2}\tag{1.1.5}$$

上式中令 $s\to1-0$，因 $E(\xi^2)$ 存在，得

$$\begin{aligned}G''(1-0)&=\sum_{x\in X}x(x-1)P(x)\\&=\sum_{x\in X}x^2P(x)-\sum_{x\in X}xP(x)\\&=E(\xi^2)-E(\xi)\end{aligned}$$

依次类推，可得

$$G^{(n)}(s)=\sum_{x\in X}x(x-1)\cdots(x-n+1)P(x)s^{x-n} \quad (1.1.6)$$

上式中令 $s\to 1-0$，因 $E(\xi^n)$ 存在，得

$$G^{(n)}(1-0)=\sum_{x\in X}x(x-1)\cdots(x-n+1)P(x)$$

不难由上述的推导过程看出，ξ 的 $k(\leqslant n)$ 阶原点矩由 $G(s)$ 在点 $s=1$ 处的阶数不超过 k 的左导数值所确定．

推论1.1.3.1 设 ξ 是概率空间（Ω，F，P）上的非负整值随机变数，存在有限的 n 阶原点矩，$G(s)$ 为 ξ 的概率生成函数，则 ξ 的 n 阶阶乘矩 $E[\xi(\xi-1)\cdots(\xi-n+1)]$ 存在且

$$E[\xi(\xi-1)\cdots(\xi-n+1)]=G^{(n)}(1-0)$$

由于这个推论的结果，概率生成函数也被称为阶乘阶生成函数．

【例1.1.4】 设 ξ 服从参数 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 分布，求 ξ 的 n 阶阶乘矩

解：已在例 1.1.2 计算出 Poisson 分布随机变数的概率生成函数

$$G(s)=e^{(s-1)\lambda}$$

于是

$$G^{(n)}(s)=\lambda^n e^{(s-1)\lambda}$$

根据推论 1.1.3.1，有

$$\begin{aligned}E[\xi(\xi-1)\cdots(\xi-n+1)]&=G^{(n)}(1-0)\\&=\lim_{s\to 1-0}\lambda^n e^{(s-1)\lambda}\\&=\lambda^n\end{aligned}$$

尤其 $E(\xi)=\lambda, E[\xi(\xi-1)]=\lambda^2, D(\xi)=E(\xi^2)-(E\xi)^2=\lambda$

【例1.1.5】 设 ξ 服从几何分布，即

$$P\{\xi=x\}=pq^{x-1},\quad x=1\ 2,\cdots$$

令 $\eta=2\xi+1$，求 η 的分布

解： ξ 的概率生成函数为

$$G(s)=\sum_{x=1}^{\infty} pq^{x-1}s^{x}=ps\sum_{x=1}^{\infty}(qs)^{x-1}=\frac{ps}{1-qs}$$

根据定理1.1.1，随机变数 η 的概率生成函数 $G_\eta(s)$ 为

$$G_\eta(s)=sG(s^2)=\frac{ps^3}{1-qs^2}$$

$$=ps^3\sum_{k=0}^{\infty}(qs^2)^k=ps^3\sum_{k=0}^{\infty}q^ks^{2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}pq^ks^{2k+3}$$

于是，η 的样本空间 $X=\{3,5,7,\cdots 2k+1,\cdots\}$，对应的概率函数为

$$P(x)=pq^{\frac{x-3}{2}},\quad x\in X$$

§2 矩生成函数

定义1.2.1 设 ξ 是概率空间 (Ω,F,P) 上的随机变数，如果实数 s 使随机变数 $e^{s\xi}$ 的数学期望存在，记

$$M(s)=E(e^{s\xi})\tag{1.2.1}$$

称 $M(s)$ 为随机变数 ξ 的矩生成函数，用 D_M 表示使 $e^{s\xi}$有有限数学期望值 $M(s)$ 的全体实数 s 构成的集合，显然 D_M 便是矩生成函数 $M(s)$ 的定义域.

显然 $0\in D_M$，即 D_M 是包含零点的数集合且

$$M(0)=1$$

必须指出，存在这样的随机变数 ξ，其矩生成函数除 $s=0$ 处以外都无定义，即 $D_M=\{0\}$，请看下面的例子.

【例1.2.1】 称随机变数 ξ 服从参数 $a(>0)$ 的 Zeta 分布，如果 ξ 的概率函数为

$$P(x)=\frac{1}{2\zeta(a+1)|x|^{a+1}},\quad x=\pm 1,\pm 2,\cdots$$

其中，$\zeta(a+1)$ 是 Zeta 函数 $\zeta(t)$[1] 在 $t=a+1$ 处的值．随机变数 $e^{s\xi}$ $(s\neq 0)$ 存在有限的数学期望 $E(e^{s\xi})$，根据定义有

$$E(e^{s\xi})=\sum_{x=-\infty}^{-1}\frac{e^{sx}}{2\zeta(a+1)|x|^{a+1}}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{sx}}{2\zeta(a+1)x^{a+1}},\tag{1.2.3}$$

它等价于级数 $\sum\limits_{x=-\infty}^{-1}\frac{e^{sx}}{2\zeta(a+1)|x|^{a+1}}$ 和 $\sum\limits_{x=1}^{\infty}\frac{e^{sx}}{2\zeta(a+1)x^{a+1}}$ 同时收敛．

(i) 当 $s>0$ 时，对 $x=1,2,\cdots$，由于

$$e^{sx}=1+sx+\frac{(sx)^2}{2!}+\cdots+\frac{(sx)^{[a]+1}}{([a]+1)!}+\cdots$$
$$>\frac{(sx)^{[a]+1}}{([a]+1)!}$$

其中$[a]$表示最邻近 a 但不少于 a 的整数，这时，级数 $\sum\limits_{x=1}^{\infty}\frac{e^{sx}}{2\zeta(a+1)x^{a+1}}$ 的一般项将因满足不等式

$$\frac{e^{sx}}{2\zeta(a+1)x^{a+1}}>\frac{s^{[a]+1}}{2\zeta(a+1)([a]+1)!}$$

而发散，就是说，$s>0$ 时，随机变数 $e^{s\xi}$ 不可能存在有限的数学期望．

(ii) 当 $s<0$ 时，对 $x=\cdots-3,-2,-1$，有 $sx>0$，于是，仍然成立：

---

1) $\zeta(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^t}$，$t>1$.

$$e^{sx} > \frac{(sx)^{[\alpha]+1}}{([\alpha]+1)!}$$

此时级数 $\sum\limits_{x=-\infty}^{-1} \frac{e^{sx}}{2\zeta(\alpha+1)|x|^{\alpha+1}}$ 的一般项将因满足不等式

$$\frac{e^{sx}}{2\zeta(\alpha+1)|x|^{\alpha+1}} > \frac{|s|^{[\alpha]+1}}{2\zeta(\alpha+1)([\alpha]+1)!}$$

而发散，就是说，$s<0$ 时，随机变数 $e^{s\xi}$ 也不可能存在有限的数学期望.

综上所述，对一切 $s \neq 0$，随机变数 $e^{s\xi}$ 不存在有限的数学期望. 可见，随机变数 ξ 的矩生成函数 $M(s)$ 的定义域 $D_M=\{0\}$.

【例1.2.2】 设 ξ 服从参数为 λ $(\lambda>0)$ 的 *Cauchy* 分布，其密度函数为

$$f(x)=\frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}, \qquad -\infty<x<+\infty$$

于是对 $s \neq 0$，由积分

$$\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{sx}}{x^2+\lambda^2}dx$$

的发散性，矩生成函数 $M(s)$ 的定义域 $D_M=\{0\}$.

如下定理给出非负整值随机变数的概率生成函数与其矩生成函数之间的联系：

定理1.2.1 设 ξ 是概率空间 (Ω, F, P) 上的非负整值随机变数，$G(s)$ 和 $M(s)$ 分别表示 ξ 的概率生成函数和矩生成函数，则 $D_M \supset (-\infty, 0]$ 且成立

$$M(s)=G(e^s), \quad s \leqslant 0 \tag{1.2.4}$$

证： 由于概率生成函数 $G(s)$ 在 $[-1, 1]$ 内有定义，对一切 $s \leqslant 0$，$0<e^s \leqslant 1$，于是

$$G(e^s)=E[(e^s)^{\xi}]=E(e^{s\xi})=M(s)$$