1978

日本全国大学入学考试

数学题解

（上）

1978

日本全国大学入学考试

数学题解

（中）

1978

日本全国大学入学考试

数学题解

（下）

一九七八年

日本全国大学入学考试

数学题解

〔上　册〕

李开成　刘正一　译

吉林人民出版社

一九七八年

日本全国大学入学考试

数学题解

李开成 刘正一 译

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 $28\frac{3}{4}$印张 580,000字

1979年11月第1版 1980年6月第2次印刷

印数：105,501—185,850册

书号：13091·40 定价：(上中下共三册)2.30元

一九七八年

日本全国大学入学考试

数学题解

〔中　　册〕

李开成 刘正一 译

吉林人民出版社

一九七八年
日本全国大学入学考试
数学题解

〔下 册〕

李开成 刘正一 译

吉林人民出版社

目　　录

〔上　册〕

北海道大学……………………………………………1
岩手大学………………………………………………17
东北大学………………………………………………28
筑波大学………………………………………………39
千业大学………………………………………………55
御茶水女子大学………………………………………70
东京大学………………………………………………79
东京工业大学…………………………………………104
东京水产大学…………………………………………116
一桥大学………………………………………………124
长冈技术科学大学……………………………………137
新泻大学………………………………………………145
富山医科大学…………………………………………157
金泽大学………………………………………………165
滨松医科大学…………………………………………177
名古屋大学……………………………………………185
丰桥技术科学大学……………………………………195
三重大学………………………………………………203
滋贺医科大学…………………………………………214
京都大学………………………………………………227

大阪大学……………………………………………………243
神户大学……………………………………………………255
奈良女子大学………………………………………………268
鸟取大学……………………………………………………276
岛根医科大学………………………………………………288

〔中　　册〕

冈山大学……………………………………………………297
广岛大学……………………………………………………310
德岛大学……………………………………………………326
高知大学……………………………………………………338
九州大学……………………………………………………346
九州艺术工科大学…………………………………………357
长崎大学……………………………………………………368
熊本大学……………………………………………………386
大分医科大学………………………………………………399
宫崎大学……………………………………………………408
琉球大学……………………………………………………421
旭川医科大学………………………………………………434
小樽商科大学………………………………………………448
带广畜产大学………………………………………………462
北见工业大学………………………………………………471
北海道教育大学……………………………………………479
室兰工业大学………………………………………………487
弘前大学……………………………………………………496

秋田大学……506
山形大学……520
茨城大学……533
宇都宫大学……544
群马大学……551
埼玉大学……563
电气通信大学……579

〔下　　册〕

东京医科齿科大学……587
东京学艺大学……594
东京商船大学……602
东京农工大学……611
横滨国立大学……623
富山大学……639
福井大学……653
山梨大学……662
信州大学……671
静冈大学……684
爱知教育大学……701
名古屋工业大学……711
岐阜大学……719
滋贺大学……727
京都教育大学……735
京都工艺纤维大学……744

大阪教育大学……………………………………752
神户商船大学……………………………………760
奈良教育大学……………………………………767
和歌山大学………………………………………774
岛根大学…………………………………………781
山口大学…………………………………………791
香川大学…………………………………………800
爱媛大学…………………………………………808
高知医科大学……………………………………820
九州工业大学……………………………………828
福冈教育大学……………………………………839
佐贺大学…………………………………………846
大分大学…………………………………………859
宫崎医科大学……………………………………873
鹿儿岛大学………………………………………881
〔**附**〕
一九七九年日本国立、
公立大学入学考试数学试题……………………894

北海道大学

✧理科系✧

〔考期〕 3月4日 〔时间〕 150分 〔评分〕 120分

1 对于实数 α ($\alpha \neq 1$) 设有

$$C_{\alpha}=\{(x,y)\mid x^2-2ax+y^2+2(\alpha-2)y+2=0\},$$

$$D_{\alpha}=\{(x,y)\mid x^2-2ax+y^2+2(\alpha-2)y+2>0\}。$$

（1）α 变动时，试画出圆 C_{α} 的中心所描绘的图形，

（2）试求与所有的圆 C_{α} 相切的直线方程，

（3）对于 $\alpha<1$，试图示出属于 D_{α} 的所有点的集合。

2 设空间四点：$A(2,-2,1)$、$B(1,4,-1)$、$C(1,1,3)$、$D(-1,5,3)$，过点 A、B 的直线为 l_1，过 C、D的直线为 l_2。

（1）试求通过 l_1，且平行于 l_2 的平面 π 的方程，

（2）从点 C 向平面 π 引垂线，垂足为 H，试求点 H 的座标和线段 CH 的长，

（3）试证：线段 CH 的长等于 l_1 上的动点 P 和 l_2

上的动点 Q 的距离的最小值。

3 求解：

（1）试求满足不等式

$$2(\log_{0.5}x)^2+9\log_{0.5}x+9\leqslant 0$$

的 x 的范围，

（2）x 在（1）中求得的范围内变动时，试求：

$$f(x)=(\log_2\frac{x}{3})(\log_2\frac{x}{4})$$

的最大值 M 和最小值 L。

4 设 T 代表同时投掷两个骰子的试验，试验 T 进行一次时，出现的点数之差为 X。

（1）试求 X 的数学期望（平均值）$E(X)$ 和方差 $V(X)$，

（2）独立的把试验 T 重复进行 7 次，试求 X 取得奇数 3 次以上的概率。

5 设函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+a+1}{x^2+1}$ 当 $x=-\sqrt{3}$ 时有极小值 0，

（1）求 a、b 的值，

（2）试求使 $f(x)$ 为极大的 x 的值 C，然后再求：曲线 $y=f(x)$、x 轴、y 轴以及直线 $x=c$ 所围成的面积 S。

6 计算：

（1）$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t(1-\sin t)^{\frac{n-1}{2}}dt$ 的值（n 为自然

数)，

（2）按照（1）中求得的 a_n，计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_n-a_{n+1})$$

的和。

1 （圆的方程）

研究 在（2）中直线与圆相切条件虽然可以用判别式，但用垂线的长来求较为方便。关于（3），把（1）、（2）的结果可以画出图进行研究，仅靠计算来处理也可以。在这种场合，作为关于 α 的不等式考虑为宜。如果利用图形，（2）成为下面的样子。

对于 α 的一切值，$(\alpha\neq1)$，圆 C_α 的中心在直线 $x+y=2$ 上，且 C_α 过此直线上的点(1,1)，而且，当 $\alpha<\beta<1$ 或 $1<\beta<\alpha$ 时，由于圆 C_α 包含于圆 C_β 中、那么和所有的圆相切的直线的切点是 (1,1)。从而所求直线为 $y=x$。

解答 （1）把圆 C_α 改写为

$$(x-\alpha)^2+\{y+(\alpha-2)\}^2=2(\alpha-1)^2,$$

设圆的中心为 $(X、Y)$，则

$$x=\alpha,\ Y=-(\alpha-2),\ (\alpha\neq1)。$$

消去 α，$X+Y=2$，　　　　$(X\neq1)$。

所以，圆的中心在直线 $X+Y=2$ 上变动。但是对应于 $x=1$ 的点 (1,1) 除外。

（2）设所求直线为 $ax+by+c=0$，因为从圆心 $(\alpha,-(\alpha-2))$ 引垂线长等于半径 $\sqrt{2}|\alpha-1|$，则有

$$\frac{|a\alpha+b(-\alpha+2)+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}\,|\alpha-1|,\ (\alpha\neq 1)$$

两边平方后化为

$$(a+b)^2\alpha^2-2\{2(a^2+b^2)+(a-b)(2b+c)\}\alpha+\{2(a^2+b^2)-(2b+c)^2\}=0。$$

此式关于 α 为恒等的条件是

$$\begin{cases}(a+b)^2=0, & ①\\ 2(a^2+b^2)+(a-b)(2b+c)=0, & ②\\ 2(a^2+b^2)-(2b+c)^2=0, & ③\end{cases}$$

成立。

由第①式，$a=-b$，

再由第②式，$ac=0$，

再由第③式，$4ac-c^2=0$，

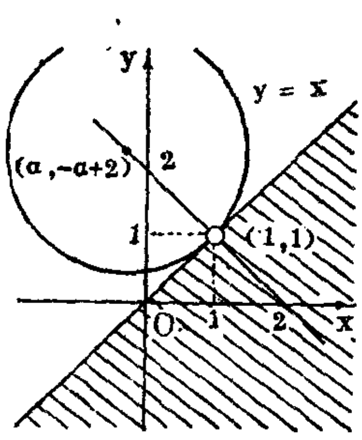
于是得到：$a=-b(\neq 0)$，$c=0$，故所求直线为 $y=x$。

…（答）

（3）$x^2-2ax+y^2+2(a-2)y+2>0$ 变形为

$$-2\alpha(x-y)+x^2+y^2-4y+2>0,$$

$$\therefore\quad 2(1-\alpha)(x-y)+(x-1)^2+(y-1)^2>0。$$



因为 $(x,y)\neq(1,1)$ 时，

$$(x-1)^2+(y-1)^2>0,$$

为使对 $\alpha<1$ 的一切 α 都成立，则 $y\leqslant x$。

所求范围如左图斜线部分，包括除点（1,1）的边界。

2（直线、平面的方程）

解答（1）因为含有二点 A、B

的平面 π 包含直线 l_1，设平面 π 的方程为 $ax+by+cz+d=0$，则

$$2a-2b+c+d=0, \qquad \cdots①$$

$$a+4b-c+d=0, \qquad \cdots②$$

又直线 l_2 的方向数比是 $2:-4:0=1:-2:0$，l_2与 π 平行，故

$$a-2b+0c=0, \qquad \cdots③$$

根据①、②、③得

$$a:b:c:d=2:1:2:-4,$$

故所求平面方程为 $2x+y+2z-4=0$。 …④(答)

（2）过 C 且垂直于 π 的直线是

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2}, \qquad \cdots⑤$$

解 ④、⑤得 $x=-\frac{1}{9}$、$y=\frac{4}{9}$、$z=\frac{17}{9}$，应用二点间距离公式：

$$CH=\sqrt{\left(-\frac{1}{9}-1\right)^2+\left(\frac{4}{9}-1\right)^2+\left(\frac{17}{9}-3\right)^2}=\frac{5}{3},$$

(答) $H\left(-\frac{1}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{17}{9}\right)$，$CH=\frac{5}{3}$。

（3）因为 CH 的方向比为 $2:1:2$，则有 $CH\perp l_1$ 且 $CH\perp l_2$，故 CH 的长等于 l_1、l_2 上的点的最短距离。

3 （对数不等式，二次函数图象）

研究 （1）宜设 $\log_{0.5}x=X$，更要留意 $\log_{0.5}x$是单调减函数。

（2）设 $\log_2 x=u$，求附有条件的二次式的最大值、最小值就行了。然后，再考虑到二次函数的图形。

解答 （1）$2(\log_{0.5}x)^2+9\log_{0.5}x+9\leqslant 0$，

$\therefore\quad (2\log_{0.5}x+3)(\log_{0.5}x+3)\leqslant 0,$

$\therefore\quad -3\leqslant \log_{0.5}x\leqslant -\dfrac{3}{2},$

$\therefore\quad (0.5)^{-3}\geqslant x\geqslant (0.5)^{-\frac{3}{2}},\quad \therefore\quad 2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 8$。…(答)

（2）对（1）中的 x $\dfrac{3}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant 3$，所以设 $\log_2 x$ $=u$，

$$f(x)=\left(\log_2\frac{x}{3}\right)\left(\log_2\frac{x}{4}\right)=(u-\log_2 3)(u-2),$$

$$=u^2-(2+\log_2 3)u+2\log_2 3,$$

$$=\left(u-\frac{2+\log_2 3}{2}\right)^2+2\log_2 3-\left(1+\frac{1}{2}\log_2 3\right)^2,$$

$$=\left(u-\frac{2+\log_2 3}{2}\right)^2-\left(1-\frac{1}{2}\log_2 3\right)^2。$$

可是 $\dfrac{2+\log_2 3}{2}=\log_2\sqrt{12}$，所以 $\dfrac{3}{2}<\log_2\sqrt{12}<3$，且

$$\log_2\sqrt{12}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+3\right)=\log_2\sqrt{12}-\frac{9}{4}$$

$$=\log_2\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}}<\log_2 1=0,$$

可见抛物线的轴靠近 $u=\dfrac{3}{2}$。因而，$f(x)$ 当 $u=3$ 从而当 $x=8$ 时取得最大值：$3-\log_2 3$。

$u=\dfrac{2+\log_2 3}{2}$，从而当 $x=2\sqrt{3}$ 时取最小值：$-(1-\dfrac{\log_2 3}{2})^2$

(答) $M=3-\log_2 3$；$L=-(1-\dfrac{1}{2}\log_2 3)^2$。