

高等学校教学参考书

磁法勘探问题

申宁华 管志宇 主编



地质出版社

高等学校教学参考书

磁法勘探问题

申宁华 管志宁 主编

地质出版社

内 容 提 要

本参考书编入了基本教材中不宜过多展开的重点和难点,以及有关的比较成熟之内容。例如:第一章阐述了地磁场的球谐分析、地核自发电机的地磁起源假说、岩石剩余磁性及磁化率张量的概念和应用、古地磁测量数据的统计整理方法等;第二章介绍了计算不规则均质体磁场的多边形截面法、有限元法、频率域方法及频谱特征,讨论了磁化各向异性时磁场的计算方法等;第三章着重讨论了最优化选择法、线性反演法及线性规划法,介绍了区域磁异常解释中的磁性界面反演方法等;第四章阐述了磁异常数字滤波的原理、特征和方法,用相关函数求弱异常的方法等。第五章介绍磁法勘探的进展。

全书采用了国际单位制(SI)。

本书体系上与基本教材有机联系,是它的延展和扩充。编写上力求深入浅出。可供物探、地球物理专业学生、教师和广大野外工作者学习参考。

*

*

*

本书由程方道主审,经地质矿产部磁法勘探教材编审委员会1983年11月全体会议审定,同意作为高等学校教学参考书出版。

*

*

*

高等学校教学参考书 磁 法 勘 探 问 题

申宁华 管志宁 主编

责任编辑 阎桂林

*

地 质 出 版 社 出 版

(北 京 西 四)

地 质 出 版 社 印 刷 厂 印 刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本: $787 \times 1092^{1/16}$ 印张: 23 字数: 537,000

1985年6月北京第一版·1985年6月北京第一次印刷

印数: 1—3,685册 定价: 4.15元

统一书号: 13038·教207

前 言

本参考书对通用教材中较深、较难的重点部分作进一步介绍，供高等地质院校高年级学生及研究生对磁法勘探进行深入学习时参考，以开阔知识领域。本书内容大多选自国内外较成熟的科研成果，且与通用教材相呼应。各节内容又具有一定的独立性，可根据需要选择有关部份。

在“地磁场及岩石磁性”一章中重点介绍以下问题：地磁场球谐分析的进一步推导及阐述物理意义；地磁场起源的电磁流体力学及发电机理论；岩石磁学理论及古地磁学原理；岩石磁参数各向异性原理及参数统计方法的理论分析。在“磁性体磁场计算”一章中重点介绍均匀磁化多面体磁场的计算及解释；非均匀磁化体磁场的正演计算及有限元法的应用；各种规则形体及多面体磁场的频谱计算。在“磁异常反演理论方法”一章中重点介绍计算磁性体质心、磁化强度方向及磁性界面的反演方法；最优化及线性规划法解反演问题；磁场梯度异常解释法；频率域的反演理论；剩余磁异常可靠性的评价等。在“磁场数据的转换与处理”一章中重点介绍曲面延拓方法、磁异常数字滤波特征、磁异常的相关分析及空间域化向磁极等内容。最后一章介绍磁法仪器、方法及理论的进展。

本书各章节由长春地质学院、武汉地质学院北京研究生部、成都地质学院及中南矿冶学院的教师分工编写而成。其中§1.1, §1.3, §2.4, §3.2, §3.3, §4.4由申宁华编写，§1.6, §2.6, §2.7, §3.1, §3.5, §3.6, §4.1, §5.1由管志宁编写，§2.3, §2.5, §3.4由余钦范编写，§1.4、§4.3由周富祥编写，§1.7, §4.2由黄国祥编写，§2.1, §2.2由王邦华编写，§3.7由周梓星编写，§1.2, §1.5由叶祥华编写。大部分插图由长春地质学院杜爱林清绘，谢玉霞植字。

本书由中南矿冶学院程方道教授主审。

根据国务院规定，本书各公式及物理量采用SI（国际单位制），由申宁华、管志宁统一将原有章节中的CGSM制改为SI制。由于在SI制中，真空（或空气）中的磁感应强度 B_0 与磁场强度 H 在数值及量纲上均不相等，故二者不能混用。本书所指的磁场、磁异常场等，除了使岩石矿物等物质磁化的原始磁场外，一般情况下均指磁感应场。本书开始附有CGSM制及SI制中各有关物理量及主要公式的对照表。

在编写过程中各兄弟院校有关老师曾提出过宝贵意见，在此致谢！由于编者水平有限，书中难免存在各种缺点错误，欢迎读者批评指正。

编 者

1984年2月

CGSM制及SI制中磁学量及主要公式对照表

I. 磁学量

名称及符号	CGSM		SI		关 系
	单 位	量 纲	单 位	量 纲	
磁感应强度 B	高斯 = $\frac{\text{麦克斯韦}}{\text{厘米}^2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	特斯拉 = $\frac{\text{韦伯}}{\text{米}^2}$	$MT^{-2}I^{-1}$	1韦伯/米 ² = 10 ⁴ 高斯
磁 通 量 Φ_B	麦克斯韦	$L^3/2M^{1/2}T^{-1}$	韦 伯	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	1韦伯 = 10 ⁸ 麦克斯韦
磁 矢 位 A	CGSM(A) = 高斯·厘米 = 麦克斯韦/厘米	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	韦伯/米 = 牛顿/安培	$LMT^{-2}I^{-1}$	1韦伯/米 = 10 ⁶ CGSM(A)
磁 矩 m	CGSM(m)	$L^5/2M^{1/2}T^{-1}$	安培·米 ²	L^2I	1安培·米 ² = 10 ³ CGSM(m)
自感系数 L	CGSM(L) = 厘米	L	亨 利	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	1亨利 = 10 ⁹ CGSM(L)
磁化强度 J	CGSM(J)	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$\frac{\text{安培}}{\text{米}}$	$L^{-1}I$	1安培/米 = 10 ⁻³ CGSM(J)
磁 化 率 κ	CGSM(κ)	无 量 纲	SI(κ)	无量纲	1SI(κ) = 1/4 π CGSM(κ)
磁场强度 H	奥 斯 特	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$\frac{\text{安培}}{\text{米}}$	$L^{-1}I$	1安培/米 = 4 $\pi \times 10^{-3}$ 奥斯特
导磁系数 μ	CGSM(μ) (真空的 导磁系数 $\mu_0 = 1$)	无量纲	亨利/米 (真空的导磁 系数 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{亨利}}{\text{米}}$)	$LMT^{-2}I^{-2}$	1亨利/米 = (1/4 π) $\times 10^7$ CGSM(μ)
磁 标 位 U	吉伯特 = 奥斯特·厘米	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	安 培	I	1安培 = 4 $\pi \times 10^{-1}$ 吉伯特
磁 荷 Q_m	CGSM(Q_m)	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	安培·米	LI	1安培·米 = 10 CGSM(Q_m)
体磁荷密度 ρ_m	CGSM(ρ_m)	$L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}$	安培/米 ²	$L^{-2}I$	1安培/米 ² = 10 ⁻⁵ CGSM(ρ_m)
面磁荷密度 σ_m	CGSM(σ_m)	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	安培/米	$L^{-1}I$	1安培/米 = 10 ⁻³ CGSM(σ_m)
电磁能量密度 w	$\frac{\text{尔格}}{\text{厘米}^3}$	$L^{-1}MT^{-2}$	$\frac{\text{焦耳}}{\text{米}^3}$	$L^{-1}MT^{-2}$	1焦耳/米 ³ = 10尔格/厘米 ³
电磁能流密度 N	$\frac{\text{尔格}}{\text{秒} \cdot \text{厘米}^2}$	MT^{-3}	$\frac{\text{焦耳}}{\text{秒} \cdot \text{米}^2}$	MT^{-3}	1焦耳/(秒·米 ²) = 10 ³ 尔格/(秒·厘米 ²)

在磁法勘探中, 磁感应强度通常使用较小的单位——伽偶 (CGSM制) 或纳特 (SI制), 其关系为

1伽偶 = 10⁻⁸高斯, 1纳特 = 10⁻⁹特斯拉

1纳特 = 1伽偶

II. 公式

名 称	高 斯 制	国 际 单 位 制
安培-毕奥-沙瓦定律 (真 空 中)	$d\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{c^2} \frac{j_2 d\mathbf{v}_2 \times (j_1 d\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$ 或写作 $d\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{c} j_2 d\mathbf{v}_2 \times d\mathbf{B},$ 其中 $d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{j_1 d\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}.$	$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j_2 d\mathbf{v}_2 \times (j_1 d\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$ 或写作 $d\mathbf{F}_{12} = j_2 d\mathbf{v}_2 \times d\mathbf{B},$ 其中 $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j_1 d\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}.$
磁感应强度的定义	$ \mathbf{B} = \frac{c \mathbf{F} - q\mathbf{E} _{\max}}{ q \mathbf{v}}$	$ \mathbf{B} = \frac{ \mathbf{F} - q\mathbf{E} _{\max}}{ q \mathbf{v}}$
	$\mathbf{B}$ 的方向与具有最大模值的 $(\mathbf{F} - q\mathbf{E}) \times q\mathbf{v}$ 的方向相同	
真空中稳恒电流螺线管轴线上任一点的磁感应强度	$B = \frac{2\pi i}{c} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$	$B = \frac{\mu_0 i}{2} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$
特例: 无限长螺线管	$B = \frac{4\pi i}{c}$	$B = \mu_0 i$
磁矢位定义	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	
真空中稳恒电流的稳定磁场矢位计算公式	$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \iiint_V \frac{j d\mathbf{v}}{r}$	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{j d\mathbf{v}}{r}$
真空中稳恒电流圈的稳定磁场在远区的磁矢位	$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$ 对平面圈而言, 磁矩 $\mathbf{m} = \frac{1}{c} I S \mathbf{n}$	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$ 对平面圈而言, 磁矩 $\mathbf{m} = I S \mathbf{n}$
真空中麦克斯韦方程组	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$
洛伦兹力公式	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
极化强度定义	$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \mathbf{p}_i$	
磁化强度定义	$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \mathbf{m}_i$	

续表

名 称	高 斯 制	国 际 单 位 制
磁化体、面电流密度	$j_{\text{磁化}} = c \nabla \times J$ $i_{\text{磁化}} = c (J_1 - J_2) \times n_{12}$	$j_{\text{磁化}} = \nabla \times J$ $i_{\text{磁化}} = (J_1 - J_2) \times n_{12}$
磁场强度定义	$H = B - 4\pi J$	$H = \frac{B}{\mu_0} - J$
物质中的麦克斯韦方程组	$\nabla \cdot D = 4\pi \rho_f$ $\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$ $\nabla \cdot B = 0$ $\nabla \times H = \frac{4\pi}{c} j_f + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$	$\nabla \cdot D = \rho_f$ $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ $\nabla \cdot B = 0$ $\nabla \times H = j_f + \frac{\partial D}{\partial t}$
衔接条件	$n_{12} \cdot (D_2 - D_1) = 4\pi \omega_f$ $n_{12} \times (E_2 - E_1) = 0$ $n_{12} \cdot (B_2 - B_1) = 0$ $n_{12} \times (H_2 - H_1) = \frac{4\pi}{c} i_f$	$n_{12} \cdot (D_2 - D_1) = \omega_f$ $n_{12} \times (E_2 - E_1) = 0$ $n_{12} \cdot (B_2 - B_1) = 0$ $n_{12} \times (H_2 - H_1) = i_f$
各向同性、线性物质的导磁性质	$J = \kappa H \quad \text{或} \quad B = \mu H$ $(\mu = 1 + 4\pi \kappa)$	$J = \kappa H \quad \text{或} \quad B = \mu H$ $\mu = \mu_0 (1 + \kappa)$
电磁能量密度及电磁能流密度	$w = \frac{1}{8\pi} (D \cdot E + H \cdot B)$ $N = \frac{c}{4\pi} (E \times H)$ 在真空中 $w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2)$ $N = \frac{c}{4\pi} (E \times B)$	$w = \frac{1}{2} (D \cdot E + E \cdot B)$ $N = E \times H$ 在真空中 $w = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$ $N = \frac{1}{\mu_0} (E \times B)$
假想磁荷密度定义 体磁荷密度 面磁荷密度	$\rho_m = -\nabla \cdot J$ $\sigma_m = -(J_{2n} - J_{1n})$ (法向 n 由介质 1 至介质 2)	$\rho_m = -\nabla \cdot J$ $\sigma_m = -(J_{2n} - J_{1n})$ [注]
磁标位的微分方程	$\nabla \cdot H = -4\pi \nabla \cdot J$ $= 4\pi \rho_m$ $\nabla^2 U = 4\pi \rho_m$	$\nabla \cdot H = -\nabla \cdot J$ $= \rho_m$ $\nabla^2 U = \rho_m$

续表

名 称	高 斯 制	国 际 单 位 制
磁标位的积分表达式	$(1) U = \iiint_V \frac{\rho_m}{r} d\nu$ $+ \iint_S \frac{\sigma_m}{r} ds$ 或 $U = \iiint_V \frac{-\nabla \cdot \mathbf{J}}{r} d\nu$ $+ \iint_S \frac{\mathbf{J}_n}{r} ds$ (积分遍及磁性体体积及表面面积) $(2) U = \iiint_V \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\nu$	$(1) U = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho_m}{r} d\nu$ $+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\sigma_m}{r} ds$ 或 $U = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{-\nabla \cdot \mathbf{J}}{r} d\nu$ $+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{J}_n}{r} ds$ $(2) U = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\nu$

〔注〕 本书中定义 $\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{J}$ 和 $\sigma_m = -(J_{2n} - J_{1n})$ ，以与磁学量单位换算表一致。还有的书定义 $\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}$ 和 $\sigma_m = -\mu_0 (J_{2n} - J_{1n})$ ，读者阅读时应注意。
 (以上两表大部分摘自张秋光编《场论》一书)

目 录

第一章 地球磁场及岩石磁性	1
§ 1.1 地球磁场的解析及其结构	1
1.1.1 稳定磁场的基本定律	1
1.1.2 地球磁场的拉普拉斯方程解的表示式	3
1.1.3 地球磁场的球谐函数级数表示式	4
1.1.4 地球磁场的涡旋场成分	8
1.1.5 地磁场的内源场、外源场及涡旋场的球谐级数系数	8
1.1.6 地磁场的高斯级数展开式及其系数的物理意义	9
1.1.7 地磁场的组成部分	11
§ 1.2 地磁场的长期变化	13
1.2.1 长期变化的全球特征	13
1.2.2 非偶极场西向飘移的解释	16
§ 1.3 地磁场的起源及地磁现象的解释	20
1.3.1 地磁场起源的发电机理论	20
1.3.2 地磁现象与地球内部结构的关系	33
§ 1.4 岩石的剩余磁性及在古地磁中的应用	35
1.4.1 物质剩余磁性的理论基础概述	35
1.4.2 岩石的剩余磁性	45
1.4.3 剩余磁性在古地磁学中的应用技术	49
§ 1.5 古地磁在地学中的应用	58
1.5.1 古地磁场的特征	58
1.5.2 大陆漂移的古地磁证据	60
1.5.3 海底扩张的古地磁证据	62
1.5.4 应用古地磁研究地质构造	67
1.5.5 应用古地磁确定地质年代	70
1.5.6 应用古地磁预测矿产分布	73
§ 1.6 磁化率各向异性	74
1.6.1 磁化率和磁化率张量	74
1.6.2 引起岩石磁各向异性的因素	76
1.6.3 磁化率各向异性的表示方法	79
1.6.4 主磁化率的计算方法	84
1.6.5 磁各向异性对磁异常特征的影响	87
§ 1.7 磁参数统计方法	88
1.7.1 岩石标本物性参数的统计概率类型	89
1.7.2 均值 μ 和标准差 σ 的估计方法	90
1.7.3 区间估计	97
1.7.4 统计中几个问题的讨论	97

第二章 磁性体磁场计算	101
§ 2.1 均匀磁化多面体的磁场	101
2.1.1 水平梯形磁荷面磁场的一般式	102
2.1.2 转轴坐标系的建立	104
2.1.3 水平多边形磁荷面的磁场	105
2.1.4 均匀磁化多面体的磁场	108
2.1.5 有限长倾斜板状体的磁场	110
§ 2.2 规则三度体磁场 Z_a 的平面特征和解释	117
2.2.1 三度体磁异常 Z_a 特征的定性分析	117
2.2.2 三度体磁异常的平面特征	118
2.2.3 三度体磁异常的平面解释	123
§ 2.3 正演问题中的多边形截面法	133
2.3.1 多边形截面数值积分正演计算方法	133
2.3.2 组合多边形截面柱体正演计算方法	143
§ 2.4 非均匀磁化磁性体磁场计算及有限元法应用	152
2.4.1 均质不规则形状磁性体磁场计算方法	152
2.4.2 利用有限元法计算复杂条件下的磁性体磁场	161
2.4.3 利用有限元结合边界元方法计算磁性体磁场	170
§ 2.5 规则形体磁场频谱特征分析	174
2.5.1 规则二度体几何参量变化对频谱曲线的影响	175
2.5.2 规则三度体几何参量变化对频谱曲线的影响	181
2.5.3 磁性体叠加时的磁场频谱特征	190
§ 2.6 均匀磁化多面体磁场频谱的正演计算	192
2.6.1 物性均匀时频率域的泊松公式	192
2.6.2 多边形的重力异常频谱	195
2.6.3 均匀多面体重磁异常的频谱	200
§ 2.7 二度体与三度体磁异常频谱的等价关系	201
2.7.1 三度体与二度体磁异常间的联系	202
2.7.2 三度体与二度体磁异常频谱的等价关系	204
2.7.3 论述等价关系的其它途径	205
第三章 磁异常反演理论及方法	209
§ 3.1 反演磁性体中心位置及磁化强度方向的方法	209
3.1.1 空间域方法	209
3.1.2 频率域方法	220
§ 3.2 最优化选择法	227
3.2.1 最优化选择法的基本概念	227
3.2.2 最优化选择法的计算方法	228
3.2.3 应用实例	236
§ 3.3 磁异常的线性反演及线性规划法	238
3.3.1 位场线性反演的原理	239
3.3.2 线性反演的求解类型及条件	240

3.3.3 线性规划法进行异常反演	241
§ 3.4 磁梯度异常解释方法	249
3.4.1 磁场梯度测量概况	250
3.4.2 磁场梯度异常的基本特征	250
3.4.3 磁梯度异常的解釋推断	255
3.4.4 应用实例	260
§ 3.5 频率域几种反演方法	262
3.5.1 最优化选择法	262
3.5.2 重磁异常指数近似反演法	274
§ 3.6 磁性界面的反演方法	279
3.6.1 频率域界面模型及其理论公式	279
3.6.2 磁性界面的迭代反演方法	281
3.6.3 应用实例	287
§ 3.7 剩余磁异常可靠性的评价及处理	289
3.7.1 剩余异常的计算	290
3.7.2 剩余磁异常的可靠性评价	291
3.7.3 剩余异常解释中的几个问题	294
第四章 磁异常的转换处理	295
§ 4.1 磁异常的曲面延拓	295
4.1.1 曲面延拓方法概述	295
4.1.2 等效磁偶层曲面延拓方法	298
§ 4.2 磁异常数字滤波及其特征	305
4.2.1 线性滤波的一般特性	305
4.2.2 磁异常变换处理的选频滤波特征	309
4.2.3 最佳线性滤波器	319
4.2.4 数字化引起的误差及克服途径	320
§ 4.3 应用相关函数求弱磁异常	324
4.3.1 磁异常相关分析的一般概念	324
4.3.2 用相关分析确定弱磁异常的方法	326
§ 4.4 空间域磁异常化极方法	329
4.4.1 基本原理	330
4.4.2 计算公式及量板	335
第五章 磁法勘探的进展	342
5.1 高精度、多参量磁力仪	342
5.2 高精度磁测及新方法探索	344
5.3 近代数学方法的应用	350
5.4 我国磁法勘探的成就和进展	353
参考文献	355

第一章 地球磁场及岩石磁性

随着磁法勘探应用领域的扩大, 以及利用区域磁异常研究深部地质构造所发挥的作用日益显著, 由此需要加强对地核、地壳磁场结构的研究。本章从地磁学的角度分析了地磁场的结构及解析、讨论了地磁场的长期变化特征以及地磁场的起源, 重点阐述了地磁起源的发电机理论及地磁现象与地球内部结构的关系。

岩石磁性是磁法勘探的物理基础, 而岩石的剩余磁性则是表征岩石磁性的重要物理量, 不但在地质填图、找矿中应用磁法时需要深入研究岩石剩余磁性, 而且在古地磁工作中对剩余磁性的研究更为重要, 因为剩余磁性是古地磁工作的基础。因此本章系统地介绍有关物质剩余磁性的理论基础、岩石剩余磁性的类型及其在古地磁学中的应用。重点介绍古地磁在研究地质构造、地质年代、预测矿产等方面的作用以及大陆飘移和海底扩张的古地磁证据。

§ 1.1 地球磁场的解析及其结构^{[1]—[6]}

本节从稳定磁场的规律出发, 得到地球磁场的拉普拉斯方程解的表示式及球谐函数级数表示式。应用球谐分析讨论了地磁场的内源场、外源场及涡旋场的级数表达式, 并计算出相应的球谐级数系数, 分析这些系数可以得出地球磁场主要成分是内源场的结论。进一步还讨论了地磁场的高斯级数展开式及其系数的物理意义, 相当于多极子在地球内分布而产生的磁势。

1.1.1 稳定磁场的基本定律

地球磁场包括基本磁场与变化磁场两部分。基本磁场来源于地球内部, 它随时间的缓慢变化称长期变化, 如地磁极位置的移动及磁场强度的变化等, 但其相对变化率小于(1%) /年。变化磁场来源于地球外部, 与电离层中的电流体系有关, 它随时间变化, 但最大幅度不超过基本磁场的1%, 对应的周期为 10^2 — 10^4 秒。周期低于 10^2 秒的变幅仅为基本磁场的 10^{-5} — 10^{-6} 。对地球基本磁场的分析用稳定磁场的规律。

一、当介质中无传导电流存在时, 稳定磁场的麦克斯威尔方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \kappa) \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.1.2)$$

式中 $\mathbf{H}$ 为磁场强度, $\mathbf{B}$ 为磁感应强度, μ 为介质的导磁率, κ 为介质的磁化率, $\mathbf{J}$ 为磁化强度。因为一个标量的梯度的旋度为零, 故 $\mathbf{H}$ 可用一标量函数的梯度来表示。

设

$$\mathbf{H} = -\nabla U(x, y, z) \quad (1.1.3)$$

式中 U 称为磁标势。由(1.1.3)及(1.1.1)式得

$$\nabla \cdot (\nabla U + \mathbf{J}) = 0 \quad (1.1.4)$$

用矢量分析公式得

$$\Delta U = \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (1.1.5)$$

式中 ΔU 的 Δ 表示拉普拉斯算符。(1.1.5)式即泊松方程。利用格林公式求得(1.1.5)式中 U 的解为

$$U = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{r} d\tau \quad (1.1.6)$$

式中 $r = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$; (x_0, y_0, z_0) 为观测点坐标; (x, y, z) 为体积元 $d\tau$ 的坐标。积分遍及 $\nabla \cdot \mathbf{J}$ 不为零的全部体积。

在无磁介质存在的空间, $\kappa=0$, $\mathbf{J}=0$, (1.1.5)式变为

$$\Delta U = 0 \quad (1.1.7)$$

即磁势 U 满足拉普拉斯方程。

在地球表面的外部空间, 无传导电流, 也无磁性介质, 故磁势 U 应满足拉普拉斯方程。

二、当介质具有传导性且有外来电动势的情况下, 稳定磁场的麦克斯威尔方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (1.1.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.1.9)$$

$\mathbf{j}$ 是由外源电动势引起的稳定的传导电流密度。因为磁感应场是无源场, $\mathbf{B}$ 可用某矢量 $\mathbf{A}$ 的旋度来表示

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.1.10)$$

由(1.1.8), (1.1.9)及(1.1.10)式得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{j} \quad (1.1.11)$$

此处设介质均匀, μ 为常数。

利用矢量分析公式得

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{j} \quad (1.1.12)$$

为了计算方便, 令矢量 $\mathbf{A}$ 服从 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 的条件, 则得

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} \quad (1.1.13)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 称为磁矢势。按照与对待(1.1.5)式相似的方法求得 $\mathbf{A}$ 的积分形式的解为

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}}{r} d\tau \quad (1.1.14)$$

式中 r 及 $d\tau$ 意义同前。将(1.1.14)式代入(1.1.10)式得

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \left[\nabla \times \iiint \frac{\mathbf{j}}{r} d\tau \right]$$

因是对观测点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 求旋度, 设 P 点无传导电流, 且在真空中($\mu = \mu_0$), 则在上式中可将旋度算符移至积分号内, 再由 $(\nabla \times \mathbf{j})_p = 0$, 上式可变为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{r} \right) d\tau \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[\mathbf{j} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla \times \mathbf{j} \right] d\tau \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \mathbf{j} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\tau \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} d\tau \quad (1.1.15)$$

上式即毕奥-沙伐定律的积分形式，它是当稳定磁场由传导电流引起时，磁场的计算公式。

1.1.2 地球磁场的拉普拉斯方程解的表示式

在地表以上的空间，无磁介质也无传导电流，可用 (1.1.6)、(1.1.7) 及 (1.1.15) 三个公式来计算某观测点的磁标势及磁感应场。但当磁性介质的分布及其磁化强度 $\mathbf{J}$ 或传导电流密度 $\mathbf{j}$ 的分布及其强度为未知时，(1.1.6) 及 (1.1.15) 式的计算是困难的。可利用 (1.1.7) 式，以拉普拉斯方程的解 U 的梯度乘以 μ_0 来表示地磁感应场。根据地表面观测到的磁场强度值作为边界条件，加上在无穷远处边界上，磁场值为零，可求出方程解中的未知系数，从而得到拉普拉斯方程的解。

球坐标的拉普拉斯方程可写为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (1.1.16)$$

式中 (r, θ, λ) 为观测点的球坐标，以地球中心为原点， r 表示矢径的大小， θ 为余纬度， λ 为经度。用分离变量法求解，得拉普拉斯方程的普遍解，以下面两种形式之一来表示

$$U_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n (c_n^m \cos m\lambda + d_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.1.17)$$

$$U_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} (a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.1.18)$$

当 n 增大时， $r^n c_n^m$ 和 $r^n d_n^m$ 的全部项小于 1 并趋于零时用 (1.1.17) 式（相当于磁源物体在地球以外）。当 n 增大时 $\frac{a_n^m}{r^{n+1}}$ 和 $\frac{b_n^m}{r^{n+1}}$ 的全部项小于 1 并趋于零时，用 (1.1.18) 式（相当于磁源物体在地球之内）。

常系数 a_n^m 、 b_n^m 或 c_n^m 、 d_n^m 由边界条件确定。若已知地球面上各点的磁势 U_i ，($i=1, 2, \dots, N$)。 N 为点数。则将对应的点的坐标 $(r_i, \theta_i, \lambda_i)$ 及 U_i 值代入 (1.1.17) 或 (1.1.18) 式就可得 N 个方程，求解便得到系数。如限定级数的项数为 n ，则方程式数目 N 应大于或等于 $(n+1)(n+2)$ 个。若已知的不是磁势 U_i 而是空中磁感应场强度的分量 X_i ， Y_i ， Z_i ，则代入下式求解

$$\begin{aligned} X_i &= \mu_0 \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right]_i \\ Y_i &= \mu_0 \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\sin \theta \partial \lambda} \right]_i \\ Z_i &= \mu_0 \left[-\frac{\partial U}{\partial r} \right]_i \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

X 、 Y 、 Z 各为地磁感应强度的北向、东向及垂向分量。若每一测点上的这三个分量均已知，则需要的测点数 N 应 $\geq \frac{1}{3}(n+1)(n+2)$ 。解方程组求得的系数 a_n^m ， b_n^m 或 c_n^m ， d_n^m ，在拉

普拉斯方程的解的表达式中只有数学常系数的意义。

1.1.3 地球磁场的球谐函数级数表示式

如利用 (1.1.6) 式来表示地球表面观测点的磁位

$$U(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{r} d\tau$$

可写为

$$U = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho}{r} d\tau = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{dm}{r}$$

式中 $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{J}$ 代表虚构的体磁荷密度;

$$dm = \rho d\tau$$

代表 $d\tau$ 体积元内的磁荷量。于是积分变为对虚构磁荷来进行。虽因不知磁化强度 $\mathbf{J}$ 的具体分布, 磁势 U 所表示的积分式无法具体计算, 但可将被积函数 $\frac{1}{r}$ 展成球谐函数的级数。有两种方法展开:

一、磁源物体在地球之内

若坐标原点在地球中心 O 处; R 为观测点 P 到 O 点的距离, 即地球半径; r' 为磁源物体内任意点 Q 处体积元到地球中心的距离; r 为 P 点至 Q 点的距离, 见图 1.1.1。

因磁源物体在地球之内, 由图知必有 $r' < R$, 设 R 与 r' 的夹角为 ψ , 由三角形 PQO 可知

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2Rr' \cos \psi \quad (1.1.20)$$

进一步写为

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left[1 + \left(\frac{r'}{R} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{R} \right) \cos \psi \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (1.1.21)$$

并展开成为 $\left(\frac{r'}{R} \right)$ 的多项式, 其 $\left(\frac{r'}{R} \right)^n$ 项的系数即 $(\cos \psi)$ 的 n 阶勒让德多项式 $P_n(\cos \psi)$, 有

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{R} \right)^n P_n(\cos \psi) \quad (1.1.22)$$

将 (1.1.22) 式代入 (1.1.6) 式得

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{R^{n+1}} \quad (1.1.23)$$

式中

$$A_n = \frac{1}{4\pi} \iiint r'^n P_n(\cos \psi) dm$$

当 $n=0$ 时

$$A_n = A_0 = \frac{1}{4\pi} \iiint dm = 0$$

这是因为磁源物体的磁荷总量应为零的缘故。于是 (1.1.23) 式可写为

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{R^{n+1}} \quad (1.1.24)$$

为了进一步计算 A_n , 须用 P, Q 两点的角坐标 (θ, λ) 及 (θ', λ') 表示 $\cos \psi$ 。作一个中心在

O 点的单位球面（半径为1），将 P, Q 两点 and 地理轴投影在这球面上并设为 P', Q', N 三点，见图1.1.2。由球面三角形 $P'Q'$ ，按球面三角余弦定理，将有

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cdot \cos (\lambda - \lambda') \quad (1.1.25)$$

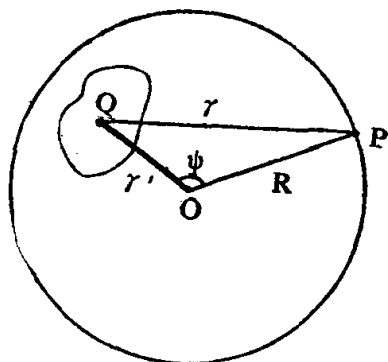


图 1.1.1 地球磁场分析符号示意图

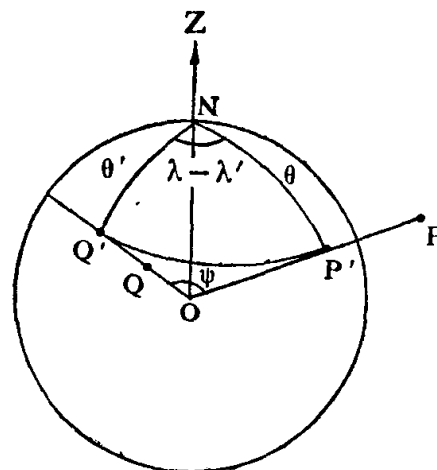


图 1.1.2 地球磁场分析坐标示意图

再利用球谐函数的加法定理

$$\begin{aligned} P_n(\cos \psi) &= P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta') P_n^m(\cos \theta) \cos m(\lambda - \lambda') \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} C_m P_n^m(\cos \theta') P_n^m(\cos \theta) \cos m(\lambda - \lambda') \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

式中 $C_m = 1$ 当 $m=0$

$C_m = 2$ 当 $m \neq 0$

$P_n^m(\cos \theta)$, $P_n^m(\cos \theta')$ 为缔合勒让德多项式。

将 (1.1.26) 式代入 (1.1.24) 式得

$$A_n = \frac{1}{4\pi} \iiint r'^n \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} C_m P_n^m(\cos \theta) \cdot P_n^m(\cos \theta') \cos m(\lambda - \lambda') dm \quad (1.1.27)$$

可写为

$$A_n = \sum_{m=0}^n (a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.1.28)$$

其中

$$a_n^m = \frac{1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} C_m \iiint r'^n P_n^m(\cos \theta') \cos m\lambda' dm$$

$$b_n^m = \frac{1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} C_m \iiint r'^n P_n^m(\cos \theta') \sin m\lambda' dm$$

将 (1.1.28) 式代入 (1.1.23) 式，有

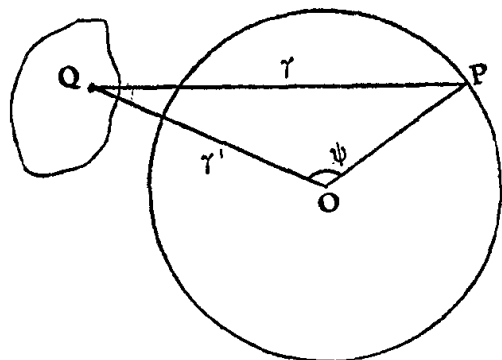
$$U = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} (a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.1.29)$$

(1.1.29) 式与 (1.1.18) 式有相同的形式，但 (1.1.29) 式中的系数 a_n^m , b_n^m 由 (1.1.28) 式所决定，有一定物理含义。

二、磁源物体在地球之外

当磁源物体位于地球之外时, 由图1.1.3可知 $r' > R$ 。

图1.1.3中各项符号定义与图1.1.1中相同。



将 $\frac{1}{r}$ 写成如下形式

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} \left[1 + \left(\frac{R}{r'} \right)^2 - 2 \left(\frac{R}{r'} \right) \cos \psi \right]^{-\frac{1}{2}}$$

有

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r'} \right)^n P_n(\cos \psi) \quad (1.1.30)$$

图 1.1.3 地球磁场分析符号示意图

代入 (1.1.6) 式得

$$U = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} R^n \iiint \frac{1}{r'^{n+1}} P_n(\cos \psi) dm$$

按照与前相似的方法将 $P_n(\cos \psi)$ 变为 θ 及 θ' 和 λ 及 λ' 的表达式, 并将与积分无关的 θ 及 λ 的函数提出积分号之外, 得P点磁势的表达式为

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} R_n (c_n^m \cos m\lambda + d_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.1.31)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} c_n^m &= \frac{1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} C_m \iiint \frac{1}{r'^{n+1}} P_n^m(\cos \theta') \cos m\lambda' dm \\ d_n^m &= \frac{1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} C_m \iiint \frac{1}{r'^{n+1}} P_n^m(\cos \theta') \sin m\lambda' dm \end{aligned} \right\} \quad (1.1.32)$$

各符号意义同前。

(1.1.31) 式与 (1.1.17) 式有相同的形式, 表示地球外部磁源物体所产生的磁势, 但 (1.1.31) 式中 c_n^m , d_n^m 等系数由 (1.1.32) 式决定, 并非纯常系数。

三、地球磁场的球谐函数展开

由 (1.1.29) 式, 求地球磁场的内源场, 有

$$\left. \begin{aligned} X_{in} &= -\frac{\mu_0}{R} \frac{\partial U_{in}}{\partial \theta} = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n R^{-(n+2)} (a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \\ Y_{in} &= -\frac{\mu_0}{R \sin \theta} \frac{\partial U_{in}}{\partial \lambda} = \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n R^{-(n+2)} (a_n^m \sin m\lambda - b_n^m \cos m\lambda) \frac{m P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \\ Z_{in} &= -\mu_0 \frac{\partial U_{in}}{\partial r} = \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) R^{-(n+2)} (a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.33)$$

其中 R 为地球半径, 在以上各式右端中, 设其为常数, 并令