中央广播电视大学

高等师范专科小学教育专业

（理科方向）

高等数学课程学习指导书

上册

主编　朱铉道

高等教育出版社

高等数学课程
学习指导书
上　册

主编　朱铉道
编写人员　朱铉道　朱晓鸽

高等教育出版社

(京)112 号

内容提要

本书是小学教师进修高等师范专科小学教育专业教材(理科方向)《高等数学(上)》的配套书,内容包括函数、极限与连续、导数和微分、导数的应用、不定积分、定积分等六章,各章又分成学习要求、内容指导、例题选讲、自测试题与答案四个部分,可供在职小学教师进修高等数学课程时参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学课程学习指导书 上册/朱鋐道主编;朱晓鸽编写.—北京:高等教育出版社,1997
ISBN 7-04-006327-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①朱… ②朱… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 15383 号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街 55 号
邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588
高等教育出版社发行
北京朝阳北苑印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6 字数 150 000
1997 年 12 月第 1 版 1997 年 12 月第 1 次印刷
印数 0 001--20 067
定价 6.60 元

前　言

为配合电视教学及学员自学所需，我们根据国家教委师范司制定的小学教师进修高等师范专科小学教育专业教学方案，中央电大所拟定的高等数学课程（理科方向）教学大纲，编写了这本指导书，内容是一元微积分.

考虑到电视远程教学与自学的特点，以及学员往往是兼职进修这一实际情况，书中的每一章都由四个部分组成：学习要求，即大纲的要求；内容指导，着重对基本概念与基本技能作必要剖析与指导；例题选讲，通过对典型例题的讲解，巩固和加深对基本概念的理解与基本技能的掌握；自测试题与答案，供学员对所学的知识作必要的检测.

我们希望读者阅读本书后，在加深理解微积分的基本思想和方法，以及提高数学修养和思维素质方面有所收益.

本书第六章由朱晓鸽执笔，其余各章及全书统纂由朱鋐道完成.限于编者的水平，以及编写时间仓促，书中一定存在不少缺点和错误，恳切地希望广大读者批评指正，以便今后进一步修改和提高.

编　者

1997年6月

责任编辑　高尚华
封面设计　王　睢　杨立新
责任绘图　黄建英
版式设计　焦东立
责任校对　马静如
责任印制　宋克学

数学课程学习指导书

目　　录

第一章　函数…………………………………………… 1
第二章　极限与连续 ……………………………………… 26
第三章　导数和微分 ……………………………………… 66
第四章　导数的应用…………………………………… 100
第五章　不定积分……………………………………… 126
第六章　定积分………………………………………… 155
高等师范专科小学教育专业学习指导书书目……………… 184

第一章　函　　数

学习要求

1. 理解函数概念;掌握函数的四则运算和复合运算,了解分段函数和反函数,了解反函数的意义.

2. 理解函数的四种性质:有界性、单调性、奇偶性、周期性.

3. 掌握基本初等函数和初等函数的定义,能画出其中主要的几种基本初等函数的图象.

内容指导

1. 函数概念

函数概念是微积分的基础,也是本章的重点.理解函数概念需要把握下列几个方面:

(1) 对应法则(规律)和定义域是函数定义中的两个要素.在函数的定义中,包含着三个因素,即定义域、对应法则和值域.当定义域和对应法则确定后,对于定义域中每一个数 x,都可得到对应的函数值 $f(x)$,从而函数值的范围(值域)就完全确定了,所以定义域和对应规律是两个要素.

因此,两个函数仅当它们的对应规律和定义域都相同时,才是

两个相同的函数.

(2) 关于由解析表达式给出的函数的定义域,分两种情况:在不考虑函数的实际意义时,约定函数的定义域是使函数的解析表达式有意义的一切实数所构成的数集;在实际问题中,还需根据问题的实际意义来确定.

(3) 记号 f 和 $f(x)$ 有着本质的差别. f 表示对应规律(也可以用 $f(\quad)$ 表示),而 $f(x)$ 是表示根据对应规律 f 所取的对应于值 x 的数 y,即 x 处的函数值. 由于历史的原因,习惯上把"定义域 D 上的函数 f"说成是"y 是 x 的函数"或"函数 $f(x)$". 教材与本书下面的叙述中,也沿用习惯上的说法.

(4) 分段函数是指,它的对应规律在自变量不同的范围内用不同的解析式子表示. 对于分段函数,不论它分多少段,它总表示一个函数,而不是几个函数. 求分段函数的值,要注意自变量的值落在哪一范围,然后用相应的解析式子计算.

2. 函数的性质

理解函数的四种性质是本章的另一个重点.

(1) 奇偶性

奇函数、偶函数的定义中要求定义域 D 关于原点对称. 它们的图象特点是:奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称.

按函数的奇偶性对函数进行分类,可分为四类:既奇又偶的函数,只有 $y=0$;奇函数,如 $y=x^3$, $\sin x$ 等;偶函数,如 $y=x^2$, $\cos x$ 等;非奇非偶函数,如 $y=a^x$, $3x+5$ 等.

判断函数的奇偶性大致有下列三种方法:

(ⅰ) 用奇、偶函数的定义,主要考察 $f(-x)$ 是否与 $-f(x)$, $f(x)$ 相等. 例如, $f(x)=|x|$.

由于 $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$,故它是偶函数.

(ⅱ) 利用一些已知函数的奇偶性及下列准则:两个奇函数的

代数和是奇函数；两个偶函数的代数和是偶函数(参见教材的习题1.1第10题)；奇函数与偶函数的和既非奇函数，也非偶函数；两个奇函数的乘积是偶函数；两个偶函数的乘积是偶函数(参见教材的习题1.1第5题及第11题)；奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

例如，我们已经知道 $y=c$(常数函数)，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=\operatorname{tg} x$ 是奇函数，则用上列准则就容易得到 $y=1+\cos x$ 是偶函数，$y=1+\operatorname{tg} x$ 是非奇非偶函数，而 $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{1+\cos x}$ 是奇函数.

(ⅲ) 当被研究的函数的图象容易作出时，用奇、偶函数图象特点来判断它的奇、偶性.

例如，考察符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)$ 的奇偶性(参见教材的复习题一第11题)，其中

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

$\operatorname{sgn}(x)$ 的图象如图1.1所示，由图容易看出，$\operatorname{sgn}(x)$ 的图象是关于原点 O 对称的，因此，$\operatorname{sgn}(x)$ 是奇函数.

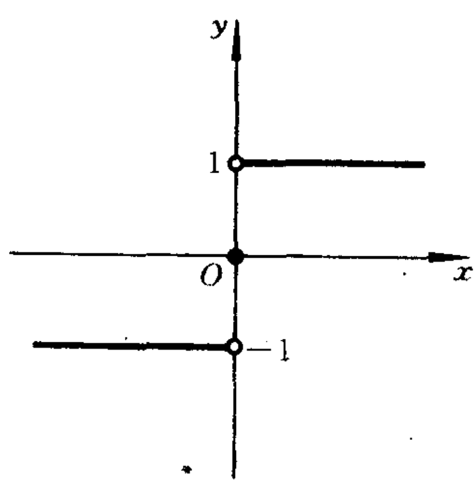

图 1.1

(2) 单调性

在函数单调性的定义中，需要注意：

（ⅰ）所讨论的区间(a,b)应当含在函数$f(x)$的定义域D中．$f(x)$可能在其定义域内的不同区间内有不同的单调性．

（ⅱ）x_1,x_2是(a,b)内任意两个数，且$x_1<x_2$．总有

$f(x_1)\leqslant f(x_2)$　　**（单调递增）**

或　$f(x_1)<f(x_2)$　　**（严格单调递增）**

或　$f(x_1)\geqslant f(x_2)$　　**（单调递减）**

或　$f(x_1)>f(x_2)$　　**（严格单调递减）**

相应的区间(a,b)称为$f(x)$的**单调递增（或严格单调递增、或单调递减、或严格单调递减）区间**．

（ⅲ）$f(x)$在(a,b)内单调递增（严格单调递增），其图象特点是：沿x的正向观察时，曲线不下降（上升），$f(x)$在(a,b)内单调递减（严格单调递减）时，沿x正向观察，曲线不上升（下降）．

（ⅳ）$f(x)$在定义域内单调递增（单调递减），则称$f(x)$为单调递增（单调递减）函数．单调递增、单调递减函数统称为**单调函数**．例如，$y=x^3$，$y=\log_a x$都是单调函数；而$y=x^2$不是单调函数，因为它在区间$(-\infty,0)$内单调递减，在$(0,+\infty)$内单调递增．

讨论一个具体函数，特别是基本初等函数的单调性，可以借助于图象，依据图象的特点来判断、理解其单调性．为此，要求学员熟记主要的几种基本初等函数的图象．

(3) 周期性

在周期函数、周期的定义中，着重理解：

（ⅰ）对任意$x\in D$（$f(x)$的定义域），若有常数$T(T\neq 0)$，使$x+T\in D$，且$f(x+T)=f(x)$，则称函数$f(x)$为**周期函数**，T叫做$f(x)$的**周期**．

例如，$y=\sin x$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，因此，对任意实数x，有$T=2\pi$，使$\sin(x+2\pi)=\sin x$成立，故$\sin x$是周期函数，2π是它的周期，但因为

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \quad (k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

因此，$2k\pi(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$也是 $\sin x$ 的周期. 在这无穷多个周期中，通常以最小正周期作为周期函数的周期.

这样，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期是 2π；$y=\operatorname{tg} x$，$y=\cot x$①的周期为 π.

（ⅱ）周期函数在每一周期内的图象是相同的. 因此，作周期函数的图象，只要先画出某一个周期内的图象，然后再作 x 方向的平移，就可获得其它周期内的图象.

（ⅲ）由教材的定理 1.1 知，正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$. 例如，$y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(4) 有界性

教材给出了有界（无界）函数的定义. 对于函数 $f(x)$在区间(a,b)内的有界（无界）定义，可类似地给出.

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，区间 $I=(a,b)\subset D$. 如果存在正数 M，使得对一切 $x\in I$，都有 $|f(x)|<M$，则称 $f(x)$在区间 I 内**有界**；如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$在区间 I 内**无界**.

可见，有界函数就是在定义域内有界的函数. 例如，因为

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1 \quad (x\neq 0)$$

所以函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$在其定义域内有界. 而 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$内无界，但在$(1,+\infty)$内有界. 这是因为对任意给定的正数 M，在区间$(0,+\infty)$内总能找到使

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|>M$$

成立的 $x\left(\text{只要取 } 0<x<\dfrac{1}{M}\right)$. 如果将 x 限定在$(1,+\infty)$内，必有

---

① 教材中用 $\operatorname{ctg} x$.

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|<1$$

显然,如果函数 $f(x)$ 在某区间 (a,b) 内的图象能介于两平行线 $y=\pm M$ 之间,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的;否则就是无界的.

概括上面的讨论,研究函数的性质,不但要理解这些性质的定义,而且要与函数的图象联系起来,做到数形结合,抽象与直观结合.这也是学习微积分的基本方法之一.

3. 函数的四则运算与复合运算

微积分主要研究的对象是初等函数,而初等函数是由基本初等函数经过四则运算和复合运算得到,因此,掌握函数的四则运算与复合运算是本章的第三个重点.

(1) 四则运算

设 $f(x),g(x)$ 的定义域分别是 D_1 与 D_2,若 $D=D_1\cap D_2$ 非空,则对于 $x\in D$,称

$$f(x)\pm g(x),f(x)g(x),\frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$$

为 $f(x),g(x)$ 的**和(差),积,商**.

例如,$f(x)=\sqrt{1-x^2}$,定义域 $D_1=[-1,1]$,$g(x)=\lg x$,定义域 $D_2=(0,+\infty)$,则它们的和 $h(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{1-x^2}+\lg x$,其定义域为 $D=D_1\cap D_2=(0,1]$.

对于商函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的定义域,要附加条件 $g(x)\neq 0$.例如,$q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\lg x}$,由 $g(x)=\lg x\neq 0$ 得 $x\neq 1$,因此,其定义域应从 $(0,1]$ 中除去 $x=1$,即 $(0,1)$ 是 $q(x)$ 的定义域.

(2) 复合函数(复合运算)

先看一个例子.

设 $y=f(u)=\sqrt{u}$,$u=g(x)=a-x^2$.考察 $a=1,a=-1$

时，能否构成复合函数 $y=f[g(x)]$. 或者说，复合运算 $f[g(x)]$ 是否有意义?

$a=1$ 时，有 $y=\sqrt{u}$, $u=1-x^2$, 且 $f(u)$ 的定义域 $D_f=[0,+\infty)$, 而 $u=g(x)$ 的值域 $R_g=(-\infty,1]$. 由于 $D_f\cap R_g$ 非空，所以 $y=f[g(x)]=\sqrt{1-x^2}$ 是复合函数，其定义域为 $1-x^2\geqslant 0$, 即 $[-1,1]$.

当 $a=-1$ 时，有 $y=\sqrt{u}$, $u=-1-x^2$, $D_f=[0,+\infty)$, 但 $R_g=(-\infty,-1]$. 从而 $D_f\cap R_g$ 为空集. 所以 $y=f[g(x)]=\sqrt{-1-x^2}$ 不是复合函数.

上例表明：函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 可以复合成为函数 $y=f[g(x)]$, 或者说，能作复合运算 $f[g(x)]$ 的前提是，$f(u)$ 的定义域 D_f 与 $g(x)$ 的值域 R_g 之交集要**非空**；否则不能成为复合函数，或运算 $f[g(x)]$ 无意义.

另外，在讨论复合函数时还要注意下列两方面：

(ⅰ) 两个以上函数的复合与两个函数复合相类似. 例如，$y=\sqrt{u}$, $u=\lg v$, $v=1-x^2$, 复合后有 $y=\sqrt{\lg v}=\sqrt{\lg(1-x^2)}$.

又如，$f(x)=\lg x$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=2^x$, 则

$$f[g(x)]=\lg\sin x,\quad f[g(h(x))]=\lg\sin 2^x$$
$$g[f(x)]=\sin\lg x,\quad f[h(g(x))]=\lg 2^{\sin x}$$

本例也表明：复合的次序不同，结果也可能不同.

(ⅱ) 分解一个复合函数，正好是将几个函数复合成一个函数的相反过程. 教材第三章要求我们熟练地掌握将一个复合函数分解成几个简单函数(特别是基本初等函数). 具体分解时，可以从复合函数的**外层往里，逐层分解**.

例如，$y=\sqrt{\lg(1-x^2)}$. 由外层往里，可设 $y=\sqrt{u}$, 而 $u=\lg(1-x^2)$. 再对 $\lg(1-x^2)$, 设 $1-x^2=v$. 于是，分解成 $y=\sqrt{u}$, $u=\lg v$, $v=1-x^2$.

4. 反函数

反函数的实质是它所表示的对应规律，至于用什么字母来表示反函数中的自变量与因变量是无关紧要的. 我们习惯于自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，因此函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常表示成 $y=f^{-1}(x)$. 例如

函数	反函数	反函数(仍用 x 表自变量)
$y=2x-1$,	$x=\dfrac{y+1}{2}$,	$y=\dfrac{x+1}{2}$
$y=e^x$,	$x=\ln y$,	$y=\ln x$
$y=x^3$,	$x=\sqrt[3]{y}$,	$y=\sqrt[3]{x}$

由此看出，求反函数的步骤是：先从函数 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，再置换 x 与 y，就得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 是对称的. 但要注意，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 是同一条曲线. 用这个结论可帮助我们记忆一些函数的图象. 如，$y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 互为反函数，它们的图象是关于 $y=x$ 对称的.

5. 基本初等函数

(1) 幂函数：$y=x^\alpha$ （α 为实数）

幂函数的定义域与 α 的取值有关，例如，$y=x^2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$ 等等. 但不管 α 取什么实数，不同的幂函数的定义域都有一个公共部分：$(0,+\infty)$，函数值域也有公共部分 $(0,+\infty)$，且所有幂函数的图象都过点 $(1,1)$.

读者应熟记经常用到的幂函数 $y=x, x^2, x^3, x^{\frac{1}{2}}, x^{-1}$ 的图象，并能借助于图象理解它们的奇偶性、单调性和有界性等性质. 对于其它幂函数，可先讨论每个幂函数的定义域及性质，再大致作

出图象.

(2) 指数和对数函数

指数函数:$y=a^x(a>0,a\neq 1)$

对数函数:$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

只要 $a>0$,且 $a\neq 1$,指数函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$;对数函数的定义域都是$(0,+\infty)$;指数函数的图象都过点$(0,1)$,对数函数的图象都过点$(1,0)$;且对于同一个 a,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数.

指数函数与对数函数的图象都分成两类:一类是 $a>1$;另一类是 $0<a<1$.读者应熟记这两类图象的特点,并借助于图象理解它们的单调性.

在高等数学中,最常用的指数函数与对数函数是以 e 为底的,即 $y=e^x$ 与 $y=\log_e x=\ln x$.这里,e 是一个无理数,e=2.718 281 ….

(3) 三角函数

正弦函数:$y=\sin x$	余弦函数:$y=\cos x$
正切函数:$y=\mathrm{tg}\, x$	余切函数:$y=\cot x$
正割函数:$y=\sec x$	余割函数:$y=\csc x$

它们统称三角函数.

需要注意的是:

(ⅰ) 自变量 x 用实数(理解为弧度).

(ⅱ) 在六个三角函数中,着重研究前四个.读者应理解并掌握这四个三角函数的定义域,函数值域;周期与主值区间:

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\mathrm{tg}\, x$	$y=\cot x$
主值区间	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$

并熟练地作出它们的图象.

(ⅲ) 除 $\cos x$ 是偶函数外,其余的 $\sin x$,$\mathrm{tg}\, x$,$\cot x$ 都是奇函数;在主值区间上,$\sin x$,$\mathrm{tg}\, x$ 单调递增,$\cos x$,$\cot x$ 单调递减,

从而在主值区间上，它们都有反函数，称为反三角函数.

(4) 反三角函数

反正弦函数：$y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

反余弦函数：$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$

反正切函数：$y=\operatorname{arctg} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$

理解反三角函数必须与相应的三角函数联系. 把它们看成主值区间上的互反函数来记忆. 例如：在主值区间上，

$$y=\sin x \xrightarrow[\text{反函数}]{\text{互为}} y=\arcsin x$$

主值区间 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$　　定义域 $x\in[-1,1]$

值　　域 $y\in[-1,1]$　　值　域 $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

对于反三角函数的图象，可根据三角函数在主值区间上的图象，作出它们关于 $y=x$ 的对称曲线来得到. 有了图象就容易研究反三角函数的奇偶性与单调性.

6. 初等函数

由常数与上述各类基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合，并用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

高等数学中所遇到的函数，大多数是初等函数. 分段函数一般不是初等函数.

为了便于作出初等函数的图象，这里介绍几种简单的常用的图象组合与变换的方法.

(ⅰ) 叠加

已知 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象，作 $y=f(x)+g(x)$ 的图象，只要在同一横坐标处将两图象的纵坐标叠加即可.

例如，已知 $y=x$ 及 $y=\frac{1}{x}$ 的图象，作 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象，见图

1.2.

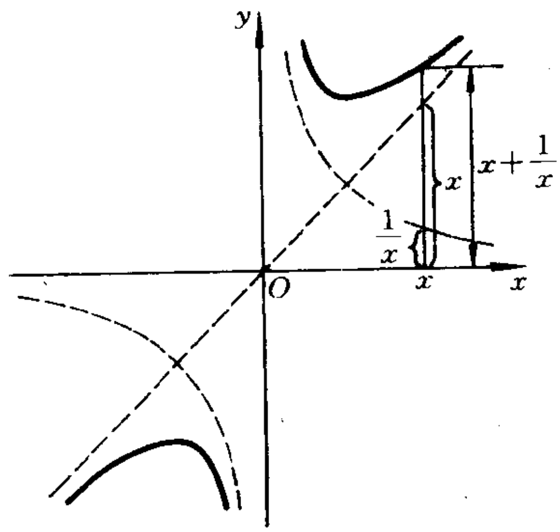

图 1.2

（ⅱ）翻转

已知 $y=f(x)$的图象，作 $y=-f(x)$的图象，可将 $f(x)$曲线关于 x 轴对称的曲线作出来，就是要作的图象.

例如，已知 $y=x^2-1$ 的图象，作 $y=-(x^2-1)$的图象，见图 1.3.

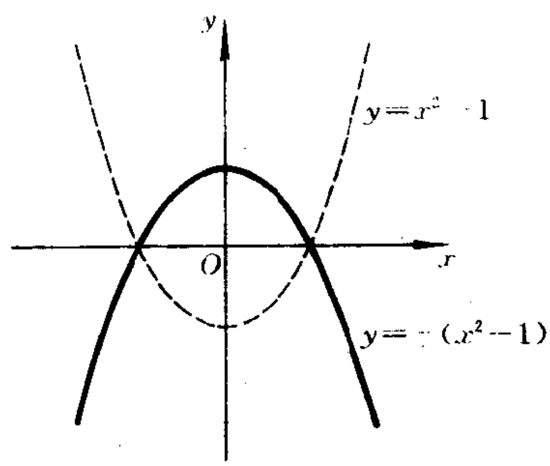

图 1.3

（ⅲ）放缩

已知 $y=f(x)$的图象，作 $y=kf(x)$的图象（k 为不等于 0 的