

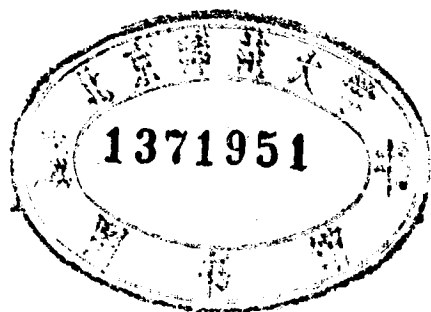
数学物理中的几何方法

〔英〕 B. F. 舒茨 著

冯承天 李顺祺 译

张民生 校

J711/27104



上海科学技术文献出版社

**Geometrical methods of
mathematical physics**

Bernard F. Schutz

© Cambridge University Press 1980

Cambridge University Press

数学物理中的几何方法

[英] B. F. 舒茨 著

冯承天 李顺祺 译

张民生 校

*

上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路2号)

新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 10.75 字数 260,000

1986年4月第1版 1986年4月第1次印刷

印数: 1—6,400

书号: 13192·82 定价: 2.00 元

《科技新书目》107-227

内 容 提 要

本书是为物理学工作者编写的一本有关现代微分几何及其应用方面的书籍。全书系统地论述了现代微分几何中的一些基本概念(如流形、张量、纤维丛、李群、李代数、微分形式和黎曼流形的联络等)和理论,以及它们在物理学诸领域中的应用。

本书重点突出,取材合适,读者只要具备数学分析和线性代数的一些基础知识即可。全书在论述中尽可能给出直观的几何图象,而且还附有大量习题(并附参考解答)。对参考文献也有详细的说明,书末还附有中英名词对照及索引等,因此特别适宜于初学者之用。

本书可作为数学系和物理系的高年级学生、研究生和数学、物理学工作者学习现代微分几何及其应用的教科书或参考书。

译 校 序

现代微分几何学在物理学中的应用已越来越受到人们的重视。不掌握必要的微分几何知识,要学习和研究近代物理(特别是相对论和规范理论),那将是十分困难的。此外,近年来发展十分迅速的大范围分析,也就是经典分析与几何的综合,已成了处理非线性现象的一种重要的数学工具,应用范围已远远超出了物理学。

B. F. 舒茨的《数学物理中的几何方法》一书详细地论述了现代微分几何的基础理论和方法,如微分流形和张量、纤维丛、李导数和李群、微分形式和上同调理论、流形上的联络理论等,同时还讨论了这些理论在哈密顿力学、热力学、电磁学、理想流体力学、宇宙学和规范理论中的应用。

作者写作本书旨在为大学生和研究生提供一本合适的现代微分几何教材,因此阅读本书只要具有数学分析和线性代数的一些基础知识就可以了。作者在撰写时特别注意给出直观的几何图象,对各种概念的来龙去脉均作了详尽的说明。由于本书取材合适,重点突出,书中插入一定数量的习题(书末附有部分习题的解答和提示),每章末尾都附有参考书目,所以它很适宜作为大学数理系高年级学生及研究生的有关课程的教科书或参考书,同时也不失为一本自学现代微分几何的好书。

目前国内同类书籍尚付阙如,故而我们把它译出奉献给广

大读者,以期推动现代微分几何的学习和研究.

由于我们水平有限,译文不当之处敬希广大读者不吝指正.

译校者

1983年10月

作 者 序

为什么要学习几何学？

本书目的在于给开始从事或已从事研究工作的物理工作者介绍各种源于微分几何且近来在理论物理中变得越来越有用的分析工具。事实上尽管年轻的物理工作者被鼓励去发展适合于物理现象的“图象”思维和“直观”形象，但是在物理工作者的数学教学中却只有一些最简单的几何概念，这种情况在今天并不少见。在数学工具中忽视“图象”这种难以理解的做法也许是在若干世纪中逐渐演化而成的。对于古代和中世纪的自然哲学家来说，几何学无疑是十分重要的。正是用了几何学的语言，托勒密、哥白尼、开普勒和伽利略才完全地表达了他们的思想。但是当笛卡尔把坐标引进欧几里得几何以后，他证明了几何的研究可以看成是代数学的一种应用。嗣后，在科学家的培养中，学习几何的重要性的观念就日趋淡薄了，以致现今的大学物理专业和应用数学专业的学生根本就不可能遇到较多的几何学。

我们立即想到其中的一个原因是：十九世纪的物理学家认为他们生活在其中的三维欧几里得空间有相当简单的几何学，很快就可以把握；而解物理中微分方程所需的多种多样的分析技巧却需要学生花大量时间去学习。毫无疑问，另一个原因是：这些分析技巧的发展，至少在一定程度上使物理学家深刻地认识到，自然界的规律可以用微分方程来表达。这就致使大多数数学物理工作者直到不久前还一直不太重视微分几何。

然而，本世纪的两大发现显著地改变了二十世纪物理学家

心目中几何学和分析学之间的关系。首先是相对论的发现。根据相对论，十九世纪物理学家的三维欧几里得空间只是物理世界正确描述的一种近似。刚开始产生影响的第二个发展是由嘉当带领的二十世纪的数学家作出的。他们认识到：几何学与分析学之间的关系好比是一条双向的马路，一方面，分析学是研究几何学的基础，而另一方面，几何学的研究自然地导致某些分析工具的发展（诸如李导数和外微分），以及某些概念的出现（诸如流形、纤维丛和向量与求导的同化），它们在分析学的应用中十分有用。用近代的观点来看，几何学仍是附属于分析学的。例如，微分几何的基本概念——微分流形是用实数和可微函数来定义的。但这却不无益处的：这意味着由分析学得到的概念可以几何地表示，而且这样做有很大的启发力。

由于在几何概念与分析概念之间已经发展了这样密切的关系，所以现代微分几何对理论物理就变得越来越重要了。在理论物理中，微分几何大大地简化了数学方法，并且使得人们能更本质地理解物理。这一场变革不仅影响了显然是几何学内容的狭义相对论和广义相对论，而且也影响到其他的一些物理领域，在那里涉及的几何并不总是物理空间的几何，而是更为抽象的变量空间。这些领域有电磁学、热力学、哈密顿理论、流体动力学和基本粒子物理学。

本书的宗旨

在本书中，我想给读者介绍二十世纪微分几何中的一些重要概念。我们将试图使用几何的或“图形”的思维方法，这对于发展物理学家的直觉来说，通常是很有帮助的。本书讨论的是数学而不是物理。我在本书中也力图包括了这种数学在一些物理学分支（它们是大多数高年级学生所熟悉的）中的广泛应用。

我希望这些例子不光是阐明了所讨论的数学。如果我能做到的话，熟悉的概念的新的数学表述将会使读者对所讨论的物理问题有一个更深刻的理解。

在下面我将较详细地讨论我假定读者应具有的数字背景，在这里给出在本书中用新的观点来处理的一些“熟悉”的老概念的简短的清单，也许是有助益的。这是向量、张量、内积、狭义相对论、球谐函数和转动群（及角动量算子）、守恒定律、体积、积分定理、旋度和叉积、矩阵的行列式、偏微分方程及其可积条件、向量计算中的高斯和斯托克斯积分定理、简单体系的热力学、凯雷瑟多里定理（及热力学第二定律）、相空间中的哈密顿体系、麦克斯韦方程组、流体动力学（包括环量守恒定律）、曲线坐标系中的向量计算和荷电标量场的量子理论。除了这些或多或少有些熟悉的内容以外，还有几个在大学的课程中通常是不教的，而大多数读者大概是听到过的其他的课题。这些课题是李群论与对称性、开和闭的宇宙论、黎曼几何和物理学的规范理论。所有这些课题都可以用微分几何的方法来研究，这表明了微分几何在未来的理论物理中很可能会起的重要作用。

在某些情况下，我相信建立起一种图形的思维方法以及对某些几何工具的一种“自然”感，对于读者来说是重要的。为此，我反复强调了张量是几何实体，它的定义与任何坐标系的选取无关。分量和坐标变换所起的作用放到次要的地位。所以只要有可能，我就不用指标写方程，以强调运算与坐标的无关性。我并不企图用十分严格的方法或公理化的方式来处理这些内容，而且我不得不忽视我们课题中的许多数学家可能会认为是十分基本的东西。除了不多的几个最重要的结果外（可以在所引的参考文献中找到它们的证明），我对其他结论都作了证明。而且，我还在可能的情况下努力使得证明中的主要几何思想明显地突

出在数学处理的背景之上。我想尽可能地显示出这种数学的优美、奇妙和它们的自然之处。

如何读这本书

在第一章中，我对读者所熟悉的一些基础数学进行复习，并简短地引入了大学生并不熟悉的一些概念，尤其是拓扑概念。以下的几章是本书的精髓，其中我引入了张量、李导数和微分形式。在这几章中还分散着一些应用，但是大部分的物理应用将在第五章中系统处理。最后一章论述黎曼几何，这是更高深的，且与粒子物理和广义相对论有关。在这两个领域中微分几何是一种常用的工具。

只要教师对难度较大的内容作一些取舍，本书就适合作一学期之用。在论述数学方法的高级班中也可以用。例如，用十次讲演的时间来讲授那些最为重要的内容。我对研究生这样做过，主要集中讲解以下几节：2.1~2.3, 2.5~2.8, 2.12~2.14, 2.16, 2.17, 2.19~2.28, 3.1~3.13, 4.1~4.6, 4.8, 4.14~4.18, 4.20~4.23, 4.25, 4.26, 5.1, 5.2, 5.4~5.7 和 5.15~5.18。我也希望教师能自己选择教材，特别是因为有许多人，对他们来说几何推理比纯分析推理更容易和更自然，而且给他们较早地揭示几何概念是有益的。为了便于选材，我把教材分成基本教材和加有“*”号的章节，后者比较高深或是补充性质的。最后一章中的所有小节，都是加有“*”号的。对于属于补充性的习题我也加有“*”号，以区别于那些对于数学发展来说是极为重要的习题。

习题是本书的组成部分，穿插在正文之中，这样的安排就是为了一遇到这些习题就马上去解。习题后面正文的内容通常是在假定读者已经做了并懂得了这些习题的基础上编写的。没有

时间解题的读者，仍然应该看一下习题，并且竭力掌握它的结论。读者可以在书末找到提示和部分解答。

本书对读者的数学基础的要求

对于本书的大部分内容，理论物理和应用数学专业的高年级学生和低年级的研究生都能读懂。我只假定读者懂得一些向量分析、多变量微积分、矩阵代数(包括本征向量和行列式)和初等量子力学中讲到过的那一点算子理论。物理应用是从各个领域中选出来的，所以并不是每个人对所有这些实例全都是熟悉的。可以跳读许多讲述物理的小节，而不会丧失连贯性。但是，如果一点也不熟悉经典力学、狭义相对论和电动力学，却想读这本书也许是不实际的。第一章后面的参考文献开列了一些能提供适当背景材料的参考书。(下略)

B. F. 舒茨

1979年6月30日于加的夫

目 录

译校序	i
作者序	iii
第一章 数学预备知识	1
1.1 R^n 空间及其拓扑	1
1.2 映射	5
1.3 实分析	10
1.4 群论	13
1.5 线性代数	15
1.6 方阵代数	19
1.7 参考文献	24
第二章 微分流形和张量	28
2.1 流形的定义	28
2.2 球面作为流形	32
2.3 流形的其他例子	34
2.4 整体考察	35
2.5 曲线	36
2.6 M 上的函数	37
2.7 向量和向量场	38
2.8 基向量和基向量场	41
2.9 纤维丛	42
*2.10 纤维丛的例子	44
*2.11 对纤维丛深入考察	45
2.12 向量场和积分曲线	50
2.13 算子 $d/d\lambda$ 的指数	51

2.14	李括号和非坐标基	52
*2.15	什么条件下一个基是坐标基	56
2.16	一次形式	59
2.17	一次形式的例子	60
*2.18	狄拉克 δ 函数	61
2.19	梯度及一次形式的图形表示	63
2.20	基一次形式和一次形式的分量	66
2.21	指标的符号法	68
2.22	张量和张量场	69
2.23	张量的例子	70
2.24	张量的分量和外积	72
2.25	缩并	73
2.26	基的变换	75
2.27	对分量的张量运算	78
2.28	函数和标量	79
2.29	向量空间上的度规张量	80
2.30	流形上的度规张量场	84
2.31	狭义相对论	87
2.32	参考文献	89
第三章	李导数和李群	91
3.1	引言: 流形上的向量场给出流形到其自身中的映射	91
3.2	函数的李拉曳	92
3.3	向量场的李拉曳	92
3.4	李导数	94
3.5	一次形式的李导数	97
3.6	子流形	98
3.7	弗罗比纳斯定理(向量场表述)	100
*3.8	弗罗比纳斯定理的证明	103
3.9	例: S^2 的生成元	106
3.10	不变性	107

3.11	开林向量场	109
3.12	开林向量和粒子动力学中的守恒量	111
*3.13	轴对称	111
3.14	抽象李群	114
3.15	李群的例子	117
*3.16	李代数和它的群	125
3.17	实现和表示	131
3.18	球对称性, 球谐函数和转动群的表示	133
3.19	参考文献	139
第四章 微分形式		141
A 形式的代数和积分计算		141
4.1	体积的定义——微分形式的几何作用	141
4.2	反对称张量的记号和定义	144
4.3	微分形式	146
4.4	微分形式的运算	149
4.5	形式的限制	150
4.6	形式的场	151
4.7	手征性和可定向性	151
4.8	体积和定向流形上的积分	152
4.9	N 次向量, 对偶和符号 $\epsilon_{i_1 \dots i_N}$	157
*4.10	张量密度	162
*4.11	广义克罗尼克尔 δ 符号	164
*4.12	行列式和 $\epsilon_{i_1 \dots i_N}$	166
4.13	度规体积元	167
B 形式的微分及其应用		169
4.14	外微分	169
4.15	导数的标记法	170
4.16	外微分的常见例子	172
4.17	偏微分方程的可积条件	173

4.18	恰当形式	174
*4.19	闭形式局部恰当性的证明	176
4.20	形式的李导数	179
4.21	李导数和外微分的可换性	181
4.22	斯托克斯定理	181
4.23	高斯定理和散度的定义	185
*4.24	对上同调理论的简短讨论	188
4.25	微分形式和微分方程	191
4.26	弗罗比纳斯定理(微分形式表述)	193
*4.27	弗罗比纳斯定理两种表述的等价性的证明	197
*4.28	守恒定律	199
*4.29	向量球谐函数	201
4.30	参考文献	203
第五章 物理应用		205
A 热力学		205
5.1	简单体系	205
5.2	麦克斯韦恒等式和其他数学恒等式	206
5.3	复合热力学体系: 凯雷瑟多里定理	208
B 哈密顿力学		210
5.4	哈密顿向量场	210
5.5	正则变换	212
5.6	由 ω 给出的向量和一次形式之间的映射	212
5.7	泊松括号	213
5.8	多粒子体系: 辛形式	214
5.9	线性动力学体系: 辛内积和守恒量	215
*5.10	哈密顿方程的纤维丛结构	218
C 电磁理论		220
5.11	应用微分形式重新表述麦克斯韦方程组	220

5.12	电荷与拓扑.....	224
5.13	矢量.....	226
5.14	平面波——一个简单的例子.....	227
D	理想流体动力学	228
5.15	李导数的作用.....	228
5.16	共动时间导数.....	228
5.17	运动方程.....	230
5.18	涡量守恒.....	231
E	宇宙论	234
5.19	宇宙学原理.....	234
5.20	最大对称性的李代数.....	238
5.21	球对称三维空间的度规.....	341
5.22	六个开林向量的构造.....	243
5.23	开的, 闭的和平直的宇宙	247
5.24	参考文献.....	249
第六章	黎曼流形的联络和规范理论	252
*6.1	引言.....	252
*6.2	弯曲面上的平行性.....	252
*6.3	协变导数.....	254
*6.4	分量, 基的协变导数	256
*6.5	挠率.....	259
*6.6	测地线.....	260
*6.7	正规坐标.....	262
*6.8	黎曼张量.....	263
*6.9	黎曼张量的几何解释.....	265
*6.10	平直空间.....	267
*6.11	联络与体积测度或度规的相容性.....	268
*6.12	度规联络.....	270
*6.13	仿射联络和等价原理.....	272

*6.14	联络和规范理论: 电磁理论的例子	273
*6.15	参考文献	277
附录	1. 部分习题的解答和提示	280
	2. 人名译名对照表	303
	3. 中英名词对照和索引	304

• • •