

〔新西兰〕 C.W. 加德纳著

汪凯仁 徐家驹 李洪芳译

随机方法 手册

供物理、化学等专业使用

上海科学技术出版社

施普林格出版公司

随机方法手册

〔新西兰〕C. W. 加德纳 著

汪凯仁 徐家骝 李洪芳 译

上海科学技术出版社

林格出版公司

责任编辑 叶 路 汪沛霖

随机方法手册

〔新西兰〕C. W. 加德纳 著

汪凯仁 徐家鹄 李洪芳 译

上海科学技术出版社 合作出版
施普林格出版公司

本书由上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 16.625 字数 222,000

1991年3月第1版 1991年3月第1次印刷

ISBN 7-5323-2261-0/O·145

印数 1—1860 定价: 6.70 元

译者序

本书是施普林格协同论丛书中的一卷。

“协同论”是这套丛书的主编、杰出的联邦德国理论物理学家哈肯(H. Haken)在七十年代首创的一门横跨自然科学和社会科学的所谓横断科学。“协同论”的思想和方法已在物理、化学、生物等自然科学以及社会科学的各学科中得到了越来越广泛的应用。随机过程的理论和方法为协同论的随机模型提供了基本的数学工具。

本书不同于一般的随机过程专著或教科书。它结合物理、化学、生物等自然科学领域中的典型过程来介绍随机过程的历史背景、理论和方法。内容丰富,叙述简明扼要,概念直观形象,较容易为自然科学工作者所掌握。

本书不但介绍了马尔可夫过程、伊藤分析、随机微分方程、福克-普朗克方程以及近似方法等随机过程理论的重要内容,而且结合跳过程、空间分布系统、扩散过程及量子力学马尔可夫过程等有关问题,介绍了随机过程的方法及最新应用。既有一定的科学趣味,又有相当高的学术水平。

本书可供高等学校学生、研究生和教师作为有关学科的教学参考书,也适用于物理、化学、生物等有关领域的科技工作者。而且对于需要了解随机过程理论应用情况的数学工作者,这无疑是一本很好的读物。

我们在翻译过程中对原书的错误作了改正,对其中重要的更正作了译注。

本书由汪凯仁(序言、1~4章),徐家鹤(5~7章),李洪芳

(8~10章)共同翻译,最后由汪凯仁作了统校。

限于译者水平,翻译错误与不当之处在所难免,望读者批评指正。

译 者

1988年10月于复旦大学

前 言

过去，施普林格协同学丛书主要是由这个新交叉学科领域的会议文集所组成，这个情况是由该领域迅速成长所决定的。随着协同学的成熟，我们越来越希望以一种首尾一贯的风格来陈述有关的实验和理论成果，并以教科书和专著的形式向大学生和研究工作者提供基本的“诀窍”。

从一开始我们就强调指出，只有适当地考虑到随机过程，复杂系统的空间、时间或函数结构的形态才能被妥善地处理。为此，我在《协同学》一书中给出了这些过程的一个导引，那本书是丛书的第一卷，也是一个引论。但是，想要更透彻地领会随机过程理论的研究工作者和学生显然需要有更完整的教科书。由 C. 加德纳 (Crispin Gardiner) 教授撰写的本书填补了这个空缺，它为那些即将出版的、相当依赖于随机过程的方法和概念的丛书分卷提供了一个坚实的基础。这些分卷包括 W. Horsthemke 和 R. Lefever 的《噪声感生的跃迁》、Y. L. Klimontovich 的《电磁过程动力学理论》以及 W. Weidlich 和 G. Haag 的《定量社会学的概念和模型》。

虽然协同学向我们提供了相当普遍的概念，但它一点也不“为艺术而艺术”。相反，它所处理的过程是自组织系统中最重要、的基础，这种系统包括生物系统，电子学之类的器件所构成的系统，等等。使我特别满意的是，本书是由这样的一位科学家所撰写，他本人应用了——甚至发展了——随机过程理论中的方法，例如在量子光学和化学反应的领域中。加德纳教授的书将被证实不仅对于协同学方面的学生和研究工作者是极为有用的，而且对于那些对随机过程理论及其在多种领域中的重要应用有兴趣的广大读者也是很有帮助的。

H. 哈 肯

第一版序言

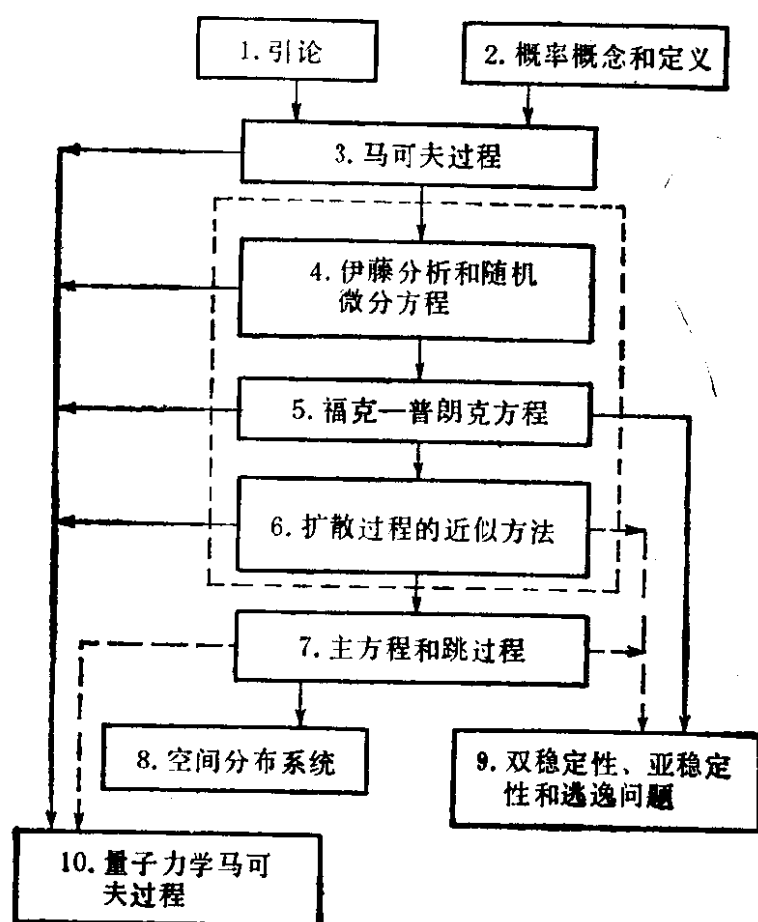
我写作本书的意图是用相对简明的语言和适当的推理形式辑录所有那些八十年来所使用的，散见于随机方法科学文献中的公式和方法。这似乎是不必要的，因为已经有了大量书籍以“随机过程”为题，或者有相似的书名。但细察一下这些书籍，很快看到它们的目标同我的并不一致。它们中有的是纯理论的高深数学著作，有的是联系于电机工程或通讯理论的书籍，也有的是面向生物学家的读物。这些书中的许多确是好书，但没有一本包罗了那些如今频繁地应用在统计物理、物理化学、量子光学和电子学中的理论以及许多别的理论课题。所有这些正构成了协同学研究范围的一部分，本书就属协同学丛书之一。

这里，主要的新观点在于处理近似问题或为逼近所作变换的篇幅大小。我完全知道许多学者在本书中将看不到他们自己的方法。我的准则始终是：近似方法是否是成系统的。许多近似方法是基于无法证实的或不可控制的假设的，并后验地被证实为正确。这种近似方法不会是一本成系统的书的主题，至少在它们被适当地公式化并控制其有效范围之前不会。在某些场合，我已能将一些近似方法放在一个系统化的基础之上，它们出现于本书中；另一些场合我则未能做到。还有一些别的方法因篇幅和时间的限制而被舍去了，我料想甚至有些方法是在我眼皮底下滑走的。

要讲一下关于背景知识的假定。读者必需熟悉实用微积分（包括围道积分）、矩阵代数、常微分方程和偏微分方程，还预期有初步的应用数学、物理或理论化学的知识。这本书不是特定课程的教科书，虽然它包含了 Waikato 大学物理研究生课程一直在使

用的材料。我期望我们量子光学和随机过程理论小组中攻读博士学位的研究生所必须熟悉的材料都已包括在本书中。所以书中有某些内容为我自己的兴趣所偏重,这不免是一个作者的特权。

我料想读者主要由理论物理学和化学工作者组成,²⁾因此取了这些人士的一般水准。本书不是在数学意义上严格的著作,但我确信书中包含的内容全都可以严格证明,其证明可以从给出的示范中展开出来。



本书的结构如上面的表中所示,它可能使人诧异,因为在引入了马尔可夫过程的一般性质之后,我选定概念上困难而直观上吸引人的随机微分方程概念作为论述的基础。如此处理是因为我自己有这样的体验:一旦人们熟悉了伊藤分析,随机微分方程方法就极为简捷了。我在第4章中用相当易懂的方式陈述了伊藤分析,这是在任何先前的教科书中所未见的。确实,随机微分方程中是没有一点内容超出福克-普朗克方程的,但随机微分方程远为容

易书写和运用，以至仅有过于热心的纯粹主义者才会试图避开该技术；另一方面，只有对立阵营中的相仿的纯粹主义者才会试图不用福克-普朗克方程去发展这套理论。所以第5章采用这一考虑作为处理同一问题的互补的、有时是重叠的方法。第6章论述两种主要的分析近似技术：小噪声展开和绝热消去，完成了可称之为本书核心的内容。

本书的其余部分围绕这一核心而构筑。从第7章中处理跳过程的很多方法开始，随之是空间分布系统，——这些系统本身可被最适合地处理为跳过程。都有赖于化简成一个近似扩散过程，这样一来，虽然在逻辑上跳过程的概念比扩散过程简单得多，但从分析和计算方法的角度来看，这种反过来做法却是正确的。

第9章被纳入本书是因为双稳定性在实践中的重要性。又如图示，它跟前五章以外的部分几乎是没有关系的。重复说一下，我仅采纳成系统的方法，因为在这方面有着大量针对特定目的的方法。

第10章需要一些量子力学知识。我希望研究随机过程的数学家将对之有兴趣，因为在这方面还有很多工作要做。它们是很有实用重要性的，并自然而然地在随机过程理论中进入一个新的领域，特别是相当令人神往的复平面上的随机过程这一方面，人们发现这是将量子过程化成通常的随机过程的唯一途径。我有点儿失望地注意到，在述及量子马尔可夫过程时数学家们倾向于注意别的途径，而这里有更多的事要做。例如，我对量子马尔可夫系统中逃逸问题的处理方法毫无所闻。

再给出一些本书中未述及的概念。我完整地论述了马尔可夫过程或可被嵌入马尔可夫过程的系统，这意味着未将非线性马尔可夫随机微分方程方面的任何工作收入本书，对此我很遗憾。然而，van Kampen 已妥善地阐述了这一问题，并已包含在他的随机过程著作中。

另外有些论题被略去是因为我觉得它们的定形的确切陈述尚未就绪。例如有空间分布系统中的绝热消去理论、脉动流体力学，

随机微分方程中的重正化群方法和有关的临界现象等。现已有了大量论述这些论题的文献,很快就需要有一个定形的、推理正确的数学处理。

此外,为了紧凑和简明,我通常只给出各个方法的确切陈述的一种。例如,有数种不同的方法陈述绝热消去结果,然而没有几个用在本书中。我的量子马尔可夫过程的陈述和 P -表示的应用仅是多种途径之一。给出所有不同的论述则会出现一本篇幅巨大、几乎不可阅读的书。然而,在适当的地方我都列出了专门的文献索引,更进一步的有关材料可在一般参考书中找到。

C. W. 加德纳 (C. W. Gardiner)

哈密尔顿, 新西兰

1983 年 1 月

第二版序言

在这一版中我改正了一些印刷错误，并作了少量更实质性的修改。特别地，我重写了4.2.3节和4.3.6节。采用了一个斯特拉托诺维奇随机积分的更正确的定义；我澄清了5.2.1节e段中关于边界的一个稍稍令人不解的说明；我也改写了6.3.3节和6.4.4节c段以注意到这一领域的新近发展。我还把文献和参考书目稍作了扩充。

C. W. 加德纳 (C. W. Gardiner)

帕萨迪纳，加利福尼亚

1985年3月

谢 辞

我必须向 Hermann Haken (哈肯) 教授致以最热诚的感谢, 是他邀请我为这套施普林格协同学丛书撰写本书的, 还促成资助了我在斯图加特的一个休假年, 在那里我对本书的主题作了大多数初步的探究并开始写作。

没有 Christine Coates 的一丝不苟的工作, 本书的原稿是不可能就绪的; 不管我的笔迹如何, 又时时改变主意, 她总是能打出漂亮的文稿, 真使我赞赏不已。在核对公式和原稿的前后一致性方面, Moira Steyn-Ross 做了不厌其烦的工作, 只有一名作者才能体会到这是一种实质性的贡献。

许多插图和一些计算是在 Craig Savage 帮助下完成的, 我非常感谢他的帮助。

自从我对随机现象感到兴趣以来, 同他人的众多联系使我受益匪浅, 我特别要感谢 L. Arnold, R. Graham, S. Grossman, F. Haake, P. Hohenberg, W. Horsthemke, N. G. van Kampen, R. Landauer, R. Lefever, M. Malek-Mansour, G. Nicolis, A. Nitzan, P. Ortoleva, J. Ross, F. Schlögl 和 U. Titulaer。

本书中的许多工作尤其应归功于我在 Waikato 大学的同事、学生和以前的学生们; 特别要感谢 Bruce Liley 的鼓励并提供部门的支持。我要向 Dan Walls 表示我的谢意, 是他首先把我引入这一领域, 同他多年卓有成效的合作是一种愉快的经历。谢谢 Howard Carmichael, Peter Drummond, Ken McNeil, Gerard Milburn, Moira Steyn-Ross, 更要谢谢 Subhash Chaturvedi, 他对这一领域的真知灼见是特别有价值的。

我愿将本书奉献给我的妻子 Heather 和我的孩子 Simon 和 Amanda, 他们对于我一心一意把时间用于这一写作计划表现了异常的耐心。

1.2.1 节中爱因斯坦的论文摘录是在拥有版权的以色列耶路撒冷的希伯莱大学允许下复制的。

图 1.3 b 中的图形是在普林斯顿大学出版社的允许下复制的。

内 容 提 要

本书是联邦德国著名物理学家、“协同论”学说创始人 H. 哈肯主编的施普林格协同论丛书中的一卷。原书于 1983 年出版第一版, 1985 年出版第二版。本书系根据 C. W. Gardiner 的 *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* 1985 年版翻译的。

全书共分十章, 包括: 历史背景, 概率论基本概念, 马尔可夫过程, 伊藤分析与随机微分方程, 福克-普朗克方程, 扩散过程的近似方法, 主方程和跳过程, 空间分布系统、稳定性与逃逸问题, 量子力学马尔可夫过程。

本书可供高等学校师生作为“协同论”、“控制论”、“系统论”以及随机过程的理论和方法等方面的教学参考书, 也可供有关科技工作者阅读和参考。

O. W. Gardiner

Handbook of Stochastic Methods
for Physics, Chemistry and the Natural Sciences
Second Edition

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

目 录

1. 历史介绍	1
1.1 动机	1
1.2 一些历史实例	2
1.2.1 布朗运动	2
1.2.2 郎之万方程	6
1.3 生灭过程	9
1.4 电子系统中的噪声	12
1.4.1 散粒噪声	12
1.4.2 自相关函数与谱	17
1.4.3 涨落函数的傅里叶分析: 平稳系统	19
1.4.4 约翰逊噪声与尼奎斯定理	20
2. 概率概念	23
2.1 事件和事件集	23
2.2 概率	24
2.2.1 概率公理	24
2.2.2 $P(A)$ 的意义	25
2.2.3 公理的意义	26
2.2.4 随机变量	26
2.3 联合概率和条件概率: 独立性	27
2.3.1 联合概率	27
2.3.2 条件概率	28
2.3.3 不同次序的联合概率间的关系	29
2.3.4 独立性	29
2.4 均值和概率密度	30

2.4.1	由任意函数的均值确定概率密度	31
2.4.2	零概率集	32
2.5	均值	32
2.5.1	矩、相关和协方差	33
2.5.2	大数法则	34
2.6	特征函数	35
2.7	累积母函数: 相关函数和累积量	36
2.7.1	例: 4 阶累积量: $\langle X_1 X_2 X_3 X_4 \rangle$	38
2.7.2	累积量的意义	39
2.8	高斯和泊松概率分布	39
2.8.1	高斯分布	39
2.8.2	中心极限定理	41
2.8.3	泊松分布	42
2.9	随机变量序列的极限	43
2.9.1	几乎必然极限	44
2.9.2	均方极限(依均方收敛)	44
2.9.3	随机极限(依概率收敛)	44
2.9.4	依分布收敛	45
2.9.5	各极限之间的关系	45
3.	马尔可夫过程	46
3.1	随机过程	46
3.2	马尔可夫过程	47
3.2.1	相容性——查普曼-柯尔莫哥洛夫方程	48
3.2.2	离散状态空间	49
3.2.3	更一般的测度	49
3.3	随机过程连续性	49
3.3.1	连续马尔可夫过程的数学定义	51
3.4	微分查普曼-柯尔莫哥洛夫方程	52
3.4.1	微分查普曼-柯尔莫哥洛夫方程的推导	53
3.4.2	微分查普曼-柯尔莫哥洛夫方程的地位	57
3.5	条件和结论的解释	58

3.5.1	跳过程: 主方程	58
3.5.2	扩散过程——福克-普朗克方程	59
3.5.3	确定性过程——刘维方程	60
3.5.4	一般过程	61
3.6	初始时刻的时间发展方程——后向方程	62
3.7	平稳齐次马尔可夫过程	64
3.7.1	遍历性质	65
3.7.2	齐次过程	67
3.7.3	趋向于平稳过程	69
3.7.4	马尔可夫过程的自相关函数	73
3.8	马尔可夫过程的例子	75
3.8.1	维纳过程	76
3.8.2	一维随机游动	80
3.8.3	泊松过程	83
3.8.4	奥恩斯坦-乌伦贝克过程	85
3.8.5	随机电报过程	88
4.	伊藤分析和随机微分方程	91
4.1	动机	91
4.2	随机积分	94
4.2.1	随机积分的定义	94
4.2.2	例子 $\int_{t_0}^t W(t') dW(t')$	96
4.2.3	斯特拉托诺维奇积分	97
4.2.4	非可料函数	98
4.2.5	$dW(t)^2 = dt$ 和 $dW(t)^{2+N} = 0$ 的证明	99
4.2.6	伊藤随机积分的性质	101
4.3	随机微分方程(SDE)	105
4.3.1	伊藤随机微分方程: 定义	106
4.3.2	伊藤随机微分方程的解的马尔可夫性质	108
4.3.3	变量代换: 伊藤公式	108
4.3.4	福克-普朗克方程和随机微分方程之间的联系	110
4.3.5	多变量系统	111