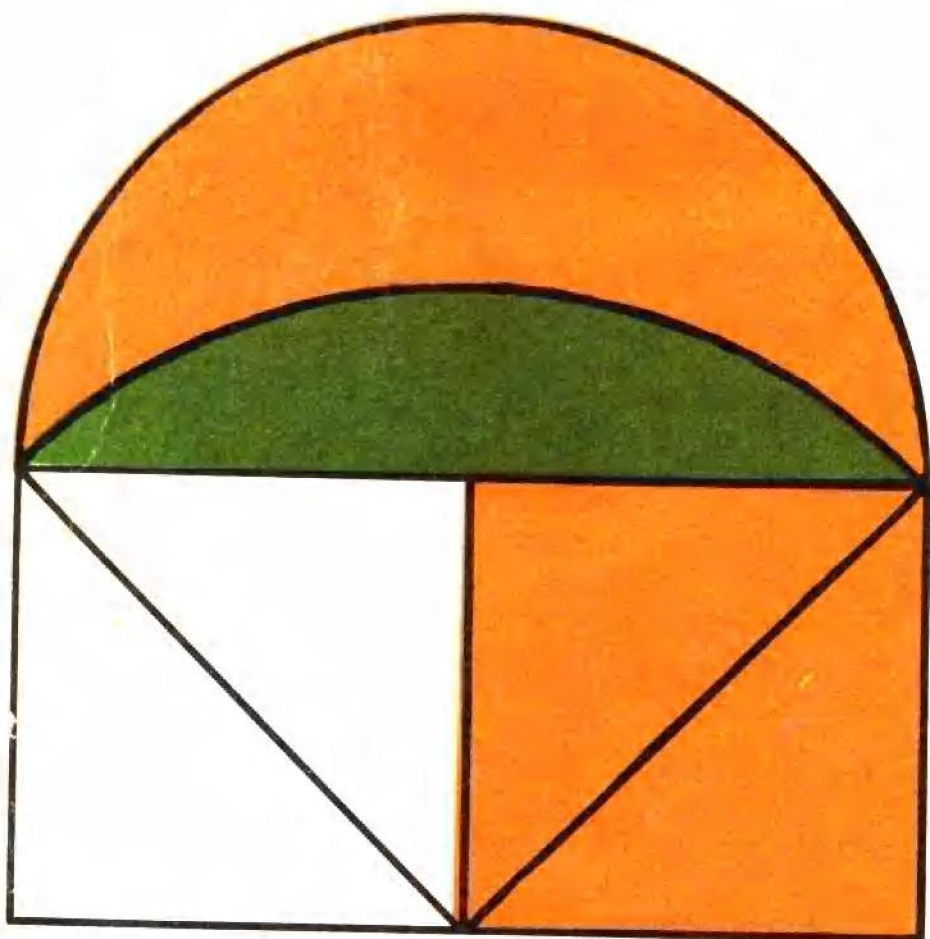


大 數 論

譯者 王 昌 銳



徐氏基金會出版

論 數 大

譯者 王 昌 銳

徐氏基金會出版

內政部登記證內版台業字第1374號

大 數 論

中華民國五十九年二月 日初版

版 權 所 有

不 准 翻 印

出 版 者 徐 氏 基 金 會 出 版 部

台 北 市 郵 政 信 箱 3 2 6 1 號

香 港 郵 政 信 箱 1 2 8 4 號

發 行 人 鄧 普 賢

台 北 市 郵 政 信 箱 3 2 6 1 號

譯 者 王 昌 銳

台 灣 省 立 高 雄 工 業 專 科 學 校 教 授

印 刷 者 大興圖書印製有限公司

地址：三重市三和路四段一五一號

電話：九 七 一 五 四 〇 五

定 價 新 台 幣 二 十 五 元

港 幣 四 元

2011-4-123

譯 序

人類文化發達，數的觀念與應用，即應運而生。洎乎今日，已蔚為數的世界。日常起居作息，科學思維研究，工程設計，機械製造，……等，幾無時無刻，可離開數目。

日常生活，所遭遇之數目，小而一，二，大至萬，千，徒為小數而已。至於科學上、數學上、天文研究上……，所遇及之數目，則又何止千萬？均為「恒河沙數」之「天文」數字，大至無可形容！

大數為奇妙之源，許多問題，均由之而起。一萬萬不是個小數目，可是一萬萬後，有十億。十億以後，又是何數？當然還有更大的百億，千億，萬億，十萬億，百萬億，甚而至於億萬億。億萬億以上呢？自然還有更大的數。

今天的人類，其大小恰在原子和太陽之中途。一個原子和一個人的相對大小，與一個人和太陽的相對大小，其比較彷彿近似。本書將以現代數學知識，深入淺出的使用大數算術與用途，以求證之。

數學歷史上，很早便有 π 之出現，後來又有 e 之出現。此 π 與 e ，一前一後，成為人力及機械能力計算之對象，計算所得之值，有達一萬以上，甚而至於十萬位小數者，其演進經過，本書均有扼要說明。最獨特之論，為“數之人格化”，認為數目為一生物，與人類一樣，有世世代代之生長，衰微，與變化，甚而至於進化等現象。他如表示大數之指數，乘冪，以及計算，數目理論，序列生長速度……等，均有透闢之論，令人一覽為快。書末附錄物理宇宙之有趣而有用之數值表，尤具參考價值，以廣見聞。

書中大數譯名，悉遷就國人習慣，小數目單位，由個（unit），十（ten），百（hundred），千（thousand），萬（ten thousand）至大數目十萬（one hundred thousand），百萬（one million），千萬（ten million），萬萬（億）（one hundred million），十億（one Billion = $10^9 = 1,000,000,000$ ），百億（ten billion = $10^{10} = 10,000,000,000$ ），千億（one hundred billion = $10^{11} = 100,000,000,000$ ），萬億（one trillion = $10^{12} = 1,000,000,000,000$ ），十萬億（ten trillion = 10^{13} ），百萬億（one hundred trillion = 10^{14} ），千萬億（one quadrillion = 10^{15} ，……如此類推，萬萬億 = 10^{16} ，十萬萬億 = 10^{17} ，百萬萬億 = 10^{18} （quintillion）

VI

，千萬萬億 = 10^{19} ，億萬億 = 10^{20} ，十億萬億 = 10^{21} ，稱為 sextillion ………。最後達 1 vigintillion = 10^{63} 。尙無合適中譯之名，暫缺以有俟於明達，其實，誠如本書著者所云，名稱並無足輕重，其重要在數之本身也。

本書著者菲力浦 J. 台維斯，於 1923 年，生於美國麻州勞倫斯。1950 年獲哈佛大學數學博士，對理論數學、航空物理及液流力學等頗為見長，歷任哈佛大學，M. I. T. 馬利蘭大學，美國大學，天主教大學等教席，頗值介紹。

譯稿多勞吾妻蔣君英女士，代為整理，深為感激，承徐氏基金會出版部諸先生賜予協助，致得早日付梓，尤深銘感。

中華民國五十八年十月六日

花石 王昌銳序於高雄工專

致 讀 者

本書為數學專家，所撰一系列書刊之一，其目的，在確立大多數高中學生，及社會人士，易懂而有興味之某些重要數學觀念，新數學文庫之大部份內容，包含中學課程中所不包括之課題；難易各別，而，即使於單一書內，某些部份，即較其餘，需要較大程度之集中心力，由是，如讀者欲以少量技能，知識，以求瞭解多數之此類書籍，勢須作明智之努力。

如讀者，已往僅於教室中接觸數學，則應牢記於心，數學書籍，不能快速閱讀，亦不應期望乍覽之餘，即瞭解全書內容，應對複雜部份，很自然的越過，稍後，再回來讀，因後續之敘述，常能澄清一種理論也。反之，包含完全熟悉資料之部份，則可快速閱讀。

學習數學之最佳途徑，為“做”數學，各書均包含習題。某些習題，尚需縝密思考。奉勸讀者，養成手持紙筆，從事研讀之習慣；於此方式，數學將對之變為意義倍增。

對著者與編者而言，此為一新的嘗試，而願對許多中學師生，協助此等專書之籌劃，表示由衷感謝。編者對本文庫諸書之反應意見，頗具興趣，希望讀者書面提供，寄予：紐約城，3，紐約大學，數學科學會，新數學文庫編輯委員會。

原書 編者

前 言

數目常為奇妙之源，而無窮盡整數序列之違背人類有限經驗者，確為遠大想像所累積之數學，首先出現之處。兒童一如成人，常提出許多有關大數之問題。遂形成作者答覆此等問題之觀念。同時，亦藉此類問題，解釋一些現代數學問題。

曾以大數觀念，作本書中心內容，且僅運用極簡單題材，試圖產生數目之量與生長的感覺。依概略計算及估計方法，乃知數目處理，有如與至友懇談，輕鬆愉快，毫無敵視爭鬥情況。於稍後之各節中，將於抽象代數及分析，與數目分析等發展方式中，陳述大（及小）數之於數學及科學中者。余曾試圖公開宣示——亦為主要目的——數學為一生物，世世代代，生長，變化。

習題為本書之一主要部份。此非謂可於同一方式，予以作業或處理。有些值得研讀，因其於一點駛向歸途，或含附帶討論也。有些值得解決，有些需要證明，一言以蔽之，應予彈性解釋，有些需要另外資料，應由讀者，自行尋求。多數問題，單用算術，即可作業，但本書原非教材，無標示方法，以作周密指導。每一種書，應包含對讀者有所增益之內容；因此，於第二部，包括比較高深之內容，但不容其阻礙敘述流路。

對某種限度而言，本書為一家庭讀物。此肇因於吾兒詢問“百萬以後之數為何？”之日。而開始於問題變為“十億以後之數為何？”以後。願與之俱，正如與為本書吸引，先則沉浸於內，繼而有所增長者然，藉以臻於數學思想之肥美園地。

對學校數學研究小組，將本書納入新數學文庫之中，及編輯委員之許多寶貴意見，深表謝意。開始撰寫時，與戈登伯格博士（Dr. Karl Goldberg）之數度討論，獲益良多。對霍夫納夫人（Mrs. Molly F. Hevenor）之協助秘書業務，願致謝忱。新數學文庫編輯諸君之協助，及賈桂林流未司夫人（Mrs. Tacqueline Lewis）之特別提供“習題答案選輯”，亦深感激。

菲力浦 J. 台維斯

1961 年 4 月

目 錄

第一部	大數及其算術.....	1
1.	世界上之數目.....	1
2.	數目之主要用途.....	1
3.	數目世界.....	3
4.	書寫數目.....	5
5.	乘冪與指數.....	13
6.	實在大數之名稱.....	15
7.	指數定律.....	20
8.	科學的標誌.....	21
9.	大為何大？.....	23
10.	近似數及量之順序.....	24
11.	近似計算.....	26
12.	估計之粗略藝術.....	29
13.	小的數目.....	32
14.	為何有負指數？.....	35
15.	大與小.....	37
16.	爲零所除：矛盾之路.....	41
第二部	作業中之大數.....	45
17.	π 之冗長試驗.....	45
18.	長期嚐試(續)：計算機遭遇正常數目.....	54
19.	回頭嚐試.....	62
20.	數之人格.....	68
21.	捨去九：殘餘之數目理論.....	78
22.	最難之簡單問題.....	85
23.	無窮外之無窮：序列之生長.....	95
24.	原子數，天文數而人在何處？.....	105
附 錄		
I.	科學數量選輯.....	109

II. 重量，量度，及等義量 116

III. 量度公式 122

問題答案選輯 123

參考書目 143

圖 表 一 覽

圖

1.	世界上之數目.....	1
2.	數目之主要用途.....	2
3.	$\pi = 3.14159265389793$	4
4.	量中之量，二矩陣.....	4
5.	二進數表.....	8
6.	二進數目加法及乘法表.....	9
7.	數字之發展.....	10
8.	2之首20次冪.....	14
9.	10之首14乘冪.....	15
10.	具簡單名稱之10的特別乘冪表.....	17
11.	$10^{63} = 1 \text{ Vigintillion}$	19
12.	大倍數之標準字首.....	19
13.	浮數.....	22
14.	數目之簡約.....	25
15.	此處多少方形？.....	32
16.	10之負冪表.....	33
17.	小倍數標準字首.....	34
18.	大與小.....	39
19.	小，大，及未定乘法表.....	39
20.	小，大，及未定除法表.....	40
21.	16邊正之多邊形求近似圓.....	46
22.	π 之典型輝煌時代(200B.C.).....	47
23.	於微積分早期(1600 S)之 π	48
24.	旋轉數目.....	49
25.	幾種 π 之無窮級數.....	50
26.	“關於數目 π ”(F. Lindemann 著) 摘自數學文獻第一頁.....	52
27.	第一部數字計算機.....	54
28.	電子數字計算機(IBM 7090).....	56

29.	π 之 4000 位小數 (摘自 π 之 10,000 位小數表) 表	60
30.	圓及其外接與內接正方形。	62
1		
32.		62
33.	希頗克累茲新月形	64
34.	科克司基圓之近似象限, π 約為 $\sqrt{(40/3)} - \sqrt{12}$	68
35.	數之人格	69
36.	幾何展示數目之幾種特性	71
37.	對應於 9 為除數之殘餘分類	80
38.	風和雨, 科學家曾企圖解氣象方程式, 預測天氣	86
39.	數學物理之邊界值問題	88
40.	計算近似溫度法	89
41.	求較佳近似值之較佳方法	90
42.	平方之生長	97
43.	生長之乘幂等級	98
44.	2 之乘幂	99
45.	生長之指數等級	102
46.	$2^{8217} - 1$, 已知最大質數之一	115
47.	已知之最大質數, $2^{4423} - 1$	115
48.	已知最大雙質數 (1963)	115

第一部

大數及其算術

1. 世界上之數目

今日世界，爲一數目世界，由凌晨至午夜，男，女及兒童，均被各種數目所包圍，格林（Green）先生於晨七時醒來，即向樓下其妻嚷着，他要吃個3分蛋，於早餐時，讀着報紙，得知於福洛里達賽馬中，得獎的富來，跑了個第二，賠上三塊三毛，及氣溫下降至 -30° 的威尼匹格。格林先生，令22路公車駛過，而跳上44路車進城，於上午十時之會議中，其同僚一致贊成叫價675,000元，以承辦一項建築業務。散會以後，格林先生告知其秘書，預定月之28,29及30日之芝加哥居留旅社。於回家的路上，閱悉ABC基金會，將於明年，花上25,000,000元，以改良學校，並知生活費用指數，較一年以前，升高.2%。彼想起其妻，曾於4點，電話通知，於回家途中，停車於麵食店，購捲餅一打，蛋糕一磅。店裡很擠，彼領得之輪購卡，編號爲71，當其打開家門，其女兒告知，伊於拼音測驗中，得85分。

如此下去；數目，處處都是數目，大而又大之數目浪費，已覺難於一時考慮及之。格林先生爲一律師，而其一天，却充滿數目。如果，他是一位工程師，一科學家，一數學家，一財政家，其一天所遭遇之數目，當然更多，其所具意義爲何？彼等服務之目的爲何？

——圖1 世界上之數目：

習題 1

1. 翻開日報第一版，觀看能發現多少數目。
2. 想想今天所作爲何，列出一表，表示曾用一法或他法，處理之各種數字，不必計算任何算術或數學研究中，所發生之數目。

2. 數目之主要用途

如檢查日常生活中出現之數目，並仔細觀察其如何使用，立將發現，有

三種主要用途，有用於表示量之數目者：如 25,000,000 元，拼音測驗 85 分，此種數目稱為基數 (Cardinal numbers)。有用於回答問題之數目者：多少量？多少個？基數之一，常被另數加，減，乘，及除。

有用於表示一序列物品順序之數目，得獎之富來，於一系列之馬中，跑第二，格林先生於一系列麵食店顧客中，為第 71 位，如此之數目，稱為序數 (ordinal numbers)。回答問題：沿一直綫多遠？以前或以後？序數僅用於相互比較，以決定二者之中，何者在他者之前或後。

最後，尚有一如人名之數目，僅用於識別相殊之事物，44 號公車，行駛 44 號路線，而 22 號公車，行駛 22 路。如斯之數目，稱為標數 (tag numbers) 或識別數目 (identification numbers)。標數回答問題：多數中之一為孰？兩標數僅用於相互比較，以觀其是否相同或相殊，不用作與基數或序數相同之用途。44 號公車，並非較昂，較快，較遲，或 22 號公車大小之二倍。而為行駛於，不同於 22 號公車路線之一公車。

有時，同一數目，可運用於幾種不同方式。當格林先生，於麵食店抽出 71 號卡片時，此乃表示其通常之順序，而告知彼應候至其號碼呼出之時，但對計數器後之女士來說，此數目可用為基數。伊可對其助理員說：“今天真忙，你知，自 4 點以來，本店已有 71 位顧客否？”

基數，序數及標數；乃數目之三種用途，檢查一數目如何與他數混合，將發現其置於何種用途。如其為加，減，乘或除，即係用作基數。如其為比較，即係用作序數。如其為識別者，乃為標數。

種 類	回 答 問 題	運 用 之 作 業	符 號
基 數	多 少 量 ？	加，減，乘，除	$+$ ， $-$ ， $\times$ ， $\div$
序 數	沿一序列多遠？	大 於 ， 小 於	$>$ $<$
標 數	多數中之那個？	等 於 ， 不等於	$=$ ， $\neq$

圖 2 數目之主要用途

習 題 2

1. 以下說明，對汝有任何意義否？“於某天中，南極站之溫度為 -15° 。一週以後，溫度加倍”汝想及之華氏溫度，為何種數目？
2. 匹卡的里托鉢人 (piccadilly panhandle)。多年以前，一殘廢之軍人

，於倫敦著名之匹卡的里馬戲團乞討。顯然，因有許多人前往圍觀其所持之哀告牌，而極為成功，圍觀者，笑而給錢。此即牌上所云：

求助！	戰 爭	3
	作 戰	6
	受 傷	8
	勳 章	3
	妻	第 2
	兒 女	8
	總 數	3 0

此和所生之意義為何？

3. 於稱為 **Bita- Crix** 之早餐食品，包裝盒上說明，1 兩提供成人逐日需要之以下百分比：

25 %	的	Thiamine
4 %	的	Riboflavin
4 %	的	Niacin
6 %	的	Calcium
12 %	的	Phosphorus
12 %	的	Iron

此等物質之總數 63 %，由此，能斷言 1 兩之比他一克立克司，能滿足一個成人，營養需要之 63 % 否？

3. 數目世界

自然世界，滿是驚奇，澳洲鴨獺，為孵蛋之哺乳動物，有些鳥類和魚類，具罕為人知之奇妙漂泊習慣。數的世界，亦同樣充滿驚奇，而求出其究竟為何，乃研究數學樂趣之一。

一，二，三，四，五，……等，為計數之序數，數學家稱之為正整數（**positive integers**），整數（**integer**）為一拉丁字，即全（**whole**）之意，整數為全數，本書大部份，將討論此種數目。

但是，數的世界，尚有其他者在，數非均全，有如： $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{2}{13}$ ， $\frac{278}{451}$ 之分數（**fractions**）。有如：3.2，44.8，.06 之小數（**decimals**）。小數實無所有，但係對分母為 10，100，或 1000…… 之分數方便寫法而已。數非均正，論及負數（**Negative numbers**），常頗有用：威尼匹格之溫

度，爲 -30° ，100 元之債務，可書爲 -100 元，紀元前 44 年，可認爲 -44 年。

數非均正或負分數，於平面幾何中，習知方形邊長 1 呎，其對角綫，乃長 $\sqrt{2}$ 呎，此數稱爲 2 之平方根 (square root)，而爲本身自乘，得 2 之數。生於 -500 年 (此在若干年前?) 之希臘數學家，畢達哥拉司 (Pythagoras) 認爲， $\sqrt{2}$ 不能用全數，除一全數之分數表示，傳說當畢達哥拉司與其門生，發現此驚天動地之事實時，曾向上帝貢獻極隆重之犧牲。數之能以兩全數比率表示者，稱爲有理 (rational) 數，而不能如此表示者，曰無理 (irrational) 數 [見本文庫，I. Niven 所著之“有理數及無理數”]。

幾何學亦產生有名的第二無理數，如人知一圓之直徑，如何計算其圓週長度？圓週對直徑之比例，爲常相同，而不問圓之大與小如何，此爲由希臘字母 π ，所代表之數目，而爲一無理數，於本書稍後之部份，將有許多關於 π 之說明。

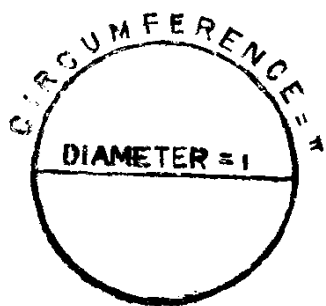


圖 3 $\pi = 3.141592653589793\cdots$

而後，數目之數學世界，有全的正，負數目；正，負分數，正，負無理數，各有其特性與識別性質，但仍有更多型類。

有如 $2 + 4\sqrt{-1}$ 或 $\frac{6}{7} + 2\sqrt{-1}$ 之複數 (complex numbers)。複數能表示量與向二者，如其有兩難謂孰爲較大之複數，則有奇異之性質。

有一種名爲矩陣 (matrix) 之量 (quantity)，於今日科學之許多方面，極爲重要，矩陣實爲數目之矩形排列；且能根據高等代數中，研究之特

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

圖 4 量中之量。二矩陣

別規則，相互加，減，及乘。偶或，但非經常，能除。彼等有兩者相乘，可造成因乘法實行順序，而生差異之令人厭煩 (而頗重要) 的性質。當序數相

乘時，無論取 4×7 或 7×4 ，毫無分別，對矩陣則不如此，順序極為重要。

整數，分數，無理數，複數，矩陣，此處，於增加之複數順序，為出現於今日數學中之主要數類，而不常為人所稔悉。整數出現於有史以前，分數出現於埃及數學工作之最早期（200 B.C.）。無理數，如前所見，為期約在 500 B.C.，複數為期却在 1500 年代，矩陣差不多出現於 100 多年以前。名數學家腦奈卡（Leopold kronecker），生於 1800 年代中葉，總結而言曰：“整數為上帝所創，而其餘數目，乃人所為”，由於數學與科學，齊頭併進，其他類型數目，確將發明，而頗重要。

習題 3

1. 取大型圓狀物，如菓汁罐或燈罩，以皮尺量圓之直徑，而後，以皮尺環繞其圓，以量圓週，以第一數除第二數。所得答數，為 π 之實驗值。其對數學值之接近度如何？
2. 醉水手，水手向北步行三排街房，向東 2 排，向南 4 排，向西 5 排，南 2，東 7，北 8，及最後西 4，描繪經此步行後，其止於何處，看看，能否發明解此問題之一快捷方法，〔東，西分別相加，東，西相減得零；南，北分別相加，北和，減南和，得 5，水手在原出發點以北，五排房處。譯者註。〕
3. 自乘 1.414。所得答案接近 2 之程度如何？以 1.4142 試之，

4. 書寫數目

數目使用於各種目的，有些非常簡單，有些又極複雜。數目書寫形式與其置於何處之用途相關，對極簡單之使用，實作上可隨便行之，但對複雜用途，書寫方式，應仔細為之，以使數目易於處理。

西部一農場主人，希望用一特殊標誌於其牛群，以區別其他農場者，毫無問題，只要點數烙印之牛，或置於一定順序即可，因此，任何不同於其他此種標誌之標誌，便可使用。

某州希望發出一種車牌，給予車主，以使車輛，能夠識別，某些州使用序數，其他州，有一混合數目及字母之系統，如所有由 1 至 99,999 之數目，均予使用，而對較高數目，於極左端，加一字母，由 P 69,328 或 X 16,253。有時，字母可用為代表某型車輛，某位置，某型駕駛如醫生之特殊標誌，此等數目，實為標數，無需算術作為，故而，字母亦不產生困難。

今天，對一般算術使用，數目書為小數系，即基於 10 進數系，此為幾

多世紀以來，許多人使用數目之許多經驗頂點古巴比倫人，生於公元前6與7世紀內，為優秀計算家，有基於60之數系。羅馬人，於許多年後，有其自有之奇妙方式，以字母來書寫數目，此種羅馬陳述，仍可於鐘面，及公共建築物正面，書之章首，見之；而於分級小學校中學習之，茲舉範例如下：

$$\begin{aligned}1 &= I \\2 &= II \\4 &= IV \\1955 &= MCMLV\end{aligned}$$

數目陣容之規則，非常令人手忙腳亂，當以之遂行算術作業時，實屬困難，（見節4之9與10題。）羅馬人曾用之從事算術，但助以算盤於字母代表數字之情況。

另一古代數系之殘存者，為英國之貨幣體系，英國貨幣以鎊（£），先令（S），及辨士（d）等名計之；20先令為一鎊，12辨士為一先令，英國學生應學習處理錢幣算術之特別規則。

西方共同使用，約達800年之小數體系，因有許多引人入勝之特質，遂得其普遍性。於此系中，基本數量已予命名，並提供特別符號及標誌，其量為零，一，二，三，四，五，六，七，八，與九，其特別符號為0，1，2，3，4，5，6，7，8，與9。此等符號，稱為數字（digits），而所有其他數目，均結合此等基本數字書成。例如：

$$1,955 = 1 \text{ 千 } 9 \text{ 百及 } 55$$

$$6,039,241 = \text{陸佰萬零叁萬玖仟，二百四十一。}$$

$$8,629,798,478,111 = \text{八萬六千二百九十七億，九千八百四十七萬，八千一百一十一}$$

注意，如以文字書寫大數，為如何麻煩。計算逗點，為保持直截之重要方法，末數以文字書出，使用符號太多（原用英文印出，為127個），如用數字書寫，則僅17個符號，約節省7倍以上！科學應作諸事之一，為凝合其觀念與發明，吾人之數系，為此凝合首例之一。

略為精確的說，如6,039,241之數，其意義為何？為求明其意義，應對數學以外之某名數，予以注意，即一，十，一百，一千，一萬……等是，此等數目，均十之連續乘幂，次節，將詳細解釋乘幂觀念，此際，僅明示