

现代数学基础丛书

组合论

下册

魏万迪 著

科学出版社

现代数学基础丛书

组合论

下册

魏万迪 著



科学出版社

1987

内 容 简 介

本书是《组合论》一书的下册。上册侧重于组合论课题中的计数方面，下册论述组合论的重要分支，即组合设计的理论和方法。本书以一般理论的叙述为主，结合介绍历史上一些著名问题的研究和解决情况，力求用统一的观点来处理所论述内容，把纷繁的材料系统化，且力求反映这一学科的主要方向和近期发展状况。

本书可作为组合数学方面的教学用书，也可供数字通讯、试验设计、数论的应用、代数学的应用、有限几何学的应用以及组合数学等方面的工作者参考。

现代数学基础丛书

组 合 论

下 册

魏 万 迪 著

责任编辑 杜小杨

科 学 · 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 12 月 第 一 版 开本：850×1168 1/32

1987 年 12 月 第一次印刷 印张：15 1/2

印数：0,000—8,600 字数：406,000

ISBN 7-03-000032-3/O · 5

统一书号：13031 · 3938

定 价 4.40 元

《现代数学基础丛书》编委会

主 编：程民德

副主编：夏道行 龚 昇 王梓坤 齐民友

编 委：（以姓氏笔划为序）

万哲先 王世强 王柔怀 叶彦谦 孙永生

庄圻泰 江泽坚 江泽培 李大潜 陈希孺

张禾瑞 张恭庆 严志达 胡和生 姜伯驹

聂灵沼 莫绍揆 曹锡华 蒲保明 潘承洞

140/03

前 言

本书共分为上、下两册。上册侧重于组合论课题的计数方面，下册专门讨论组合设计。载于本书上册的前言的第一部分是对全书而言的，对本册自然适用。除了以下数语需要重提外，其余不再赘述。这数语是：“本书从组合论的基础部分开始，讲述较详，并力求使处理问题的方法多种多样。但是，当需用其他数学学科，如数论、代数、数学分析的知识时，则假定读者对它们已经熟知，不再细论”。本册用到初等数论、不定方程、二次型的算术理论、代数数论等数论方面，以及有限域、有限群、有限几何等其他方面较多且有时还较专门的知识，但未能对它们详述，只是作些简单的介绍和指出基本的参考文献。

本册的任务是专门介绍组合设计的理论、方法和一些有关的著名问题。这里所介绍的组合设计的主要类型有：(1) 完全区组设计(第十八章)，(2) 平衡不完全区组设计(第十二章)及其重要特款——对称设计(第十三章)，三连系(第十二、十九章)，几何设计(第十七章)，可分解的平衡不完全区组设计(第十九章)等，作为对称设计的重要内容，还有循环设计(第十四、十五章)，Hadamard 设计(第十六章)，(3) 部分平衡不完全区组设计(第二十章)，(4) 正交设计(第十八章)和横截设计(第十九章)，(5) 按对平衡设计(第十八、十九章)，(6) t -设计，Youden 设计，Room 设计，称重设计，幻方，覆盖和填充等(第十一章)。在本书中，研究组合设计课题的方法是结合各种类型的设计来介绍的，因而散见于各章。主要的方法有：矩阵方法(见第十二、十三、十六、二十等章)，数论方法(见第十四、十五等章)，二次型论方法(见第十二、十三等章)，有限域方法(见第十五、十六、十七、二十等章)，有限几何方法(见第十五、十七、二十等章)，以及组合方法等。在本书中，对于组合

设计历史上的一些著名问题的研究和解决情况，是作为一般理论和方法的组成部分来介绍的，因而也散布在不同的地方。例如，关于正交拉丁方的 Euler 猜想的完整结果可在第十八章和第十九章中找到；关于三连系存在的充要条件问题的解决安排在第十九章中； v 充分大且 $\lambda = 1$ 的可分解平衡不完全区组设计存在的充要条件问题的解决也在第十九章中；关于 $4n$ 阶 Hadamard 矩阵的存在性问题的主要结果安排在第十六章中；关于 Steiner 三连系大集问题的简单介绍见第十二章，等等。为了使读者在讨论各类具体的设计之前对整个组合设计理论的概貌以及各类设计之间的联系有所了解，故以本册的首章来介绍该领域产生的实际背景，有关它的应用，它的主要类型，这些类型之间的联系，以及组合设计理论的内容，等等。

本册的目的之一是为从事数字通讯、试验设计、数论的应用、代数学的应用、有限几何学的应用以及组合数学等方面工作的研究人员提供一份有关组合设计方面内容较新且较全面系统的参考资料。所以，书中常常介绍一些课题的新近成果，使得对之有兴趣的读者可以查阅所引的文献，开展研究。本册的另一目的是为攻读组合数学的研究生和指导他们的老师提供一份教学用书。因此，基础部分讲述得较为详细，有时还辅以具体例子，使得所论内容尽可能易于理解和掌握。

组合设计理论的内容很丰富，涉及面很广，近年来发展很快。本书力求反映这一学科的主要方面和近期的发展状况，力求反映我国数学工作者对这一领域的贡献。此外，本书还力求用较为统一的观点来处理所论内容，尽可能地把纷繁的材料系统化。但是，由于这方面的专著所见不多，更限于作者的水平，因而缺点和错误在所难免。在介绍我国数学工作者的贡献或列出其论著时，因篇幅限制，也因囿于所知，很可能挂一漏万。所有这些，都诚望同志们批评指正。鉴于未见有同类书籍出版，故今抛出此砖，以期引出美玉。

在撰写本册的过程中，柯召教授表示因忙于其他工作故不能

参与。他尽管很忙,却一直都对作者的撰写工作给予极大的关心、鼓励和支持。在此,作者谨向柯召教授表示最衷心最诚挚的谢意。万哲先教授、徐利治教授对该书的撰写颇多鼓励;刘炯朗教授 (C. L. Liu, University of Illinois, USA)、孙述寰教授 (H. S. Sun, California State University, USA)、萧文强博士 (M. K. Siu, 香港大学)对作者的撰写工作颇多关切,或惠寄参考资料,或同作者进行讨论,使作者得益匪浅。朱烈教授对本册初稿全面地提出了很宝贵的意见和建议。沈灏、邵嘉裕、康庆德、罗家洪、钱福林等几位同志都对初稿提出过不少宝贵的意见和建议。作者衷心地向上述各位表示最诚挚的谢意。在作者撰写和讲授初稿的过程中,几位硕士研究生曾给予作者多方面的帮助,他们是(依姓氏的汉语拼音为序):陈永川、高绪洪、沈国祥、王小戟、吴晓红;此外,广大同行对撰写本册的工作一直都给予关切和鼓励,作者由衷地感谢他们。

作 者

1985年3月初稿

1986年2月二稿

目 录

第十一章	组合设计概论	1
§ 11.1	问题的提出	1
§ 11.2	完全区组设计	9
§ 11.3	平衡不完全区组设计	10
§ 11.4	一些特殊类型的平衡不完全区组设计	13
§ 11.5	部分平衡不完全区组设计	18
§ 11.6	t -设计和按对平衡设计	20
§ 11.7	其他设计简介	23
§ 11.8	组合设计理论的内容	31
第十二章	平衡不完全区组设计的一般理论	33
§ 12.1	关联矩阵	33
§ 12.2	完备化问题	38
§ 12.3	一种构造方法	45
§ 12.4	三连系	65
第十三章	对称设计	76
§ 13.1	关联矩阵	76
§ 13.2	由对称设计引出的一些设计	81
§ 13.3	存在性	91
§ 13.4	关联方程	113
第十四章	循环设计的性质、变体和推广	121
§ 14.1	循环设计与循环差集的关系以及对二者的刻划	121
§ 14.2	存在性	134
§ 14.3	乘数	142
§ 14.4	循环拟差集	155
§ 14.5	m -(v ; $k_1, k_2, \dots, k_m$; λ)-循环差集	156
§ 14.6	循环相对差集	159
§ 14.7	循环加集	160

§ 14.8	群差集和正则设计	154
第十五章	循环设计和正则设计的构造方法	170
§ 15.1	循环设计的构造方法一	170
§ 15.2	循环设计的构造方法二	177
§ 15.3	循环设计的构造方法三	187
§ 15.4	循环设计的构造方法四	194
§ 15.5	循环设计的构造方法五	208
§ 15.6	一类正则设计的构造方法	219
第十六章	Hadamard 设计	225
§ 16.1	Hadamard 设计和 Hadamard 矩阵	225
§ 16.2	Hadamard 矩阵的一些特殊类型	233
§ 16.3	同 Hadamard 矩阵相关的一些矩阵	236
§ 16.4	一般 Hadamard 矩阵的构造方法之一	246
§ 16.5	Hadamard 矩阵陪偶的构造法	247
§ 16.6	反型 Hadamard 矩阵的构造法	256
§ 16.7	对称 Hadamard 矩阵的构造法	259
§ 16.8	一般 Hadamard 矩阵的构造方法之二	262
§ 16.9	Williamson 型 Hadamard 矩阵	265
§ 16.10	小阶数的 Hadamard 矩阵	274
§ 16.11	关于定理 13.4.4 的讨论	275
第十七章	几何设计	277
§ 17.1	有限平面	277
§ 17.2	平面设计	283
§ 17.3	平面设计与正交拉丁方	292
§ 17.4	有限射影空间与区组设计	298
§ 17.5	有限向量空间与区组设计	302
第十八章	完全设计和正交设计	311
§ 18.1	拉丁方	311
§ 18.2	完备拉丁方	316
§ 18.3	正交侣	320
§ 18.4	正交拉丁方的构造	330
§ 18.5	$N(m)$	341
§ 18.6	Euler 猜想 (一): 阶大于 6 的情形	352

第十九章	横截设计、按对平衡设计及其应用	357
§ 19.1	横截设计	357
§ 19.2	按对平衡设计(一)	363
§ 19.3	三连系存在的充要条件	369
§ 19.4	同可分解的 (b, v, r, k, λ) -设计有关的一些结果	377
§ 19.5	可分解的 (b, v, r, k, λ) -设计	387
§ 19.6	Euler 猜想(二): 阶等于 6 的情形	391
§ 19.7	按对平衡设计(二)	398
第二十章	部分平衡不完全区组设计	400
§ 20.1	结合矩阵和关联矩阵	400
§ 20.2	可分组设计	411
§ 20.3	三角形设计	419
§ 20.4	拉丁方型设计	425
§ 20.5	利用有限向量空间构造结合方案	434
§ 20.6	利用有限向量空间构造 PBIB 设计	453
参考资料		460
符号表		476
名词索引		478

第十一章 组合设计概论

组合设计理论是现代组合论的一个非常重要的分支.本章介绍这一分支的概貌,而把详细的讨论留在本书的以后各章.在介绍概貌时,着重三个方面:一、这个分支的实际背景,附带介绍历史上的两个著名组合学课题 (§ 11.1);二、组合设计的主要类型,即可分解设计 (§11.1),完全设计和正交设计 (§11.2),平衡不完全区组设计 (§11.2),对称设计,循环设计,几何设计和 Hadamard 设计 (§11.4),部分平衡不完全区组设计 (§ 11.5), t -设计和按对平衡区组设计 (§11.6), Youden 设计, Room 设计,称重设计,幻方,覆盖和填装等 (§11.7);三、组合设计理论的内容 (§11.8).

§ 11.1 问题的提出

在组合设计这一分支中,也象在组合论的其他分支中一样,许多课题的原始形态是智力游戏,因而人们对它们的研究最初也总是纯数学的.然而,当这种研究深入到一定阶段,特别是当生产发展和其他学科发展过程中产生相同或相近的问题时,这些课题就同实际紧密结合起来.一当它们的意义明朗之后,对它们的研究就有了强大的天然动力,因而就会吸引人们更多的注意,成果也就更加丰富.下面首先看两个例子,一个是所谓“三十六名军官问题”,另一个是“Kirkman 女生问题”.

1782 年, Euler^[1] 提出的一个问题以下面的“三十六名军官问题”为其特例.

问题 11.1.1. 有三十六名军官,他们来自六个不同的团队,每个团队六名且分属于六种不同的军阶.能否把他们排成一个方形阵列,使得每行、每列的六名军官正好来自不同的团队且属于不同的军阶?

这就是著名的“三十六名军官问题”。如果在这个问题中把 6 换为 v , 把 36 换为 v^2 , 则问题就普遍化了。为了描述和研究普遍化后的问题, 需要引进一些术语和记号。

设 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_v\}$ 是一个 v 元集, 如果 S 上的一个 v 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2v} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vv} \end{pmatrix} \quad (11.1.1)$$

满足条件:

$$a_{ij_1} \neq a_{ij_2} \quad (1 \leq i \leq v; 1 \leq j_1 \neq j_2 \leq v), \quad (11.1.2)$$

$$a_{i_1j} \neq a_{i_2j} \quad (1 \leq i_1 \neq i_2 \leq v; 1 \leq j \leq v), \quad (11.1.3)$$

则称 A 是集 S 上的一个 v 阶拉丁方。条件(11.1.2)即: (11.1.1)的每一行都是 S 的一个无重全排列; 条件(11.1.3)即: (11.1.1)的每一列都是 S 的一个无重全排列。

设 $B = (b_{ij})$ 是 S 上的另一个 v 阶拉丁方, 且符合条件: 在以 S 的元素偶为元的矩阵

$$((a_{ij}, b_{ij})) \quad (1 \leq i, j \leq v) \quad (11.1.4)$$

中, $S \times S$ 中的全部 v^2 个元没有不出现的, 则称拉丁方 A 和 B 是集 S 上的一对 v 阶正交拉丁方, 或说 A 和 B 正交。

在问题 11.1.1 中, 如果把六个团队和六种军阶都各用 $[1, 6]$ 中的数码来编号, 而且以 (i, j) 表示来自第 i 个团队且属于第 j 种军阶的军官, 那么问题 11.1.1 就可重述为: 是否存在集 $[1, 6]$ 上的一对六阶正交拉丁方?

这个问题可以普遍化为

问题 11.1.2. 对任意正整数 v , 是否存在一对 v 阶正交拉丁方?

关于问题 11.1.2 以及正交拉丁方这一课题的详细讨论将在第十八章中进行。现在来看看这一问题的实际意义。

今把某试验田分成纵横的九小块且欲在其上试种三个不同品种的小麦 A, B 和 C , 以便得出在 A, B 和 C 中哪一个品种最适

宜在该地区种植的有关结论。比较一下下面几种划分试验场地的方式：

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>

(1)

<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>

(2)

<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
<i>C</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
<i>B</i>	<i>A</i>	<i>C</i>

(3)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>

(4)

(11.1.5)

在(11.1.5)的(1)和(2)中，品种 *A*, *B* 和 *C* 安排得比较集中。这样，三横条或三竖条地上的土质的好坏对三个品种的小麦的长势和收成的影响很不均衡。(3)比(1)和(2)都好，特别是每一纵条上三个品种的小麦都有，因而三纵条上的土质对这三个品种的小麦的影响比较均衡；但是，在三个横条上，三个品种的小麦却分布得很不均衡，因而三横条上的土质对这三个品种的小麦的影响就不均衡了。(4)就避免了上述缺点，使得三横条和三纵条上的土质对三个品种的小麦的影响都是均衡的。这表明了方法(4)比其他三种方法都要好些，而(4)正好是三个文字的集 $\{A, B, C\}$ 上的一个三阶拉丁方。

今欲生产一种饮料，其主要原料有 *A*, *B*, *C*, *D* 四种。希望通过试验来找到一个恰当的配方，使得饮料的质量最好。

如果对每种原料都选择三种不同的剂量，分别记为 A_i, B_i, C_i, D_i ($1 \leq i \leq 3$)，来做试验，就得做 $3^4=81$ 次。能否通过作较少次数的试验而得出比较可靠的结论呢？

粗略地说，如果能设计出一个做 n 次试验的方案，使得四种原料的任二种（暂记为甲、乙）的三个剂量的组合 α_i ($1 \leq i \leq 3$)， β_j ($1 \leq j \leq 3$) 都能在这个方案中出现，则可望由此得出较可靠的结论。如果每一对 α_i, β_j 恰好相遇一次，那么，各种原料的各

种剂量就可认为搭配得很合理，且在保证此合理搭配的条件下试验次数可达到最小，因而是比较理想的试验方案。

现在来计算这样的试验次数 n 。一次试验可以用下面的方法来表示：

$A_i B_j C_k D_l$ ： A 的剂量为 A_i ， B 的剂量为 B_j ， C

的剂量为 C_k ， D 的剂量为 D_l 。

于是，一次试验中有诸原料的 $\binom{4}{2} = 6$ 对剂量相遇，故 n 次试验中诸原料的两种剂量相遇的总次数为 $6n$ 。另一方面，由 A_i 分别与 B, C, D 的全部可能的剂量各相遇一次，就得相遇 9 次，故 A 的三种剂量分别与 B, C, D 的全部可能的剂量各相遇一次时，其相遇的总次数为 $3 \cdot 9$ 次。类似地， B 的三种剂量分别与 C, D 的全部可能的剂量各相遇一次时，其相遇的总次数为 $3 \cdot 6$ 次； C 的三种剂量与 D 的三种剂量各相遇一次时，其相遇的总次数为 $3 \cdot 3$ 次。总起来，每二种剂量恰好相遇一次时，诸剂量相遇的总次数是

$$3(9 + 6 + 3) = 54.$$

由 $6n = 54$ 得出 $n = 9$ 。这就是说，符合要求的方案如果存在的话，它包含九次试验。

为了配出这九个方案，可列出一张表，除了表头的行以外，它的每一行表示一次试验，而第 1, 2, 3, 4 列分别是 A, B, C, D 的三种剂量。由于 A_i 与 B_1, B_2, B_3 都要相遇，故 A_1, A_2, A_3 各要出现在三行上，而且在 A_i 出现的三行上， B_1, B_2, B_3 各出现一次。这样一来，经过行的换序，这个表的头二列可以写为

A	B	C	D
A_1	B_1		
A_1	B_2		
A_1	B_3		
A_2	B_1		
A_2	B_2		
A_2	B_3		
A_3	B_1		
A_3	B_2		
A_3	B_3		

(11.1.6)

为了得出符合要求的第 i 列, 把(11.1.6)改写为下面的形式更为有益:

A \ B	(A, B), C		
	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	(A ₁ , B ₁),	(A ₁ , B ₂),	(A ₁ , B ₃),
A ₂	(A ₂ , B ₁),	(A ₂ , B ₂),	(A ₂ , B ₃),
A ₃	(A ₃ , B ₁),	(A ₃ , B ₂),	(A ₃ , B ₃)

(11.1.7)

其中第 i 行与第 j 列交口处的元素为 “(A_i, B_j),”, 这里 A_i, B_j 外的括号表示 A_i 和 B_j 组成一个元素对. 这可以略去不写, 因为由表的行头和列头已经表明了这一点. (A_i, B_j) 后的逗号表明将要添上适当的 C_k. 由于元素对 (A_i, C_k) (1 ≤ i, k ≤ 3) 和 (B_j, C_k) (1 ≤ j, k ≤ 3) 在全部表中恰好各出现一次, 所以 C₁, C₂, C₃ 在 (11.1.7) 除表头以外的各行和各列中皆各出现一次. 因此, 略去 (11.1.7) 中的诸 (A_i, B_j) 且添上符合要求的各 C_i 所形成的阵列正好是集 {C₁, C₂, C₃} 上的一个三阶拉丁方. 而且反之亦然.

例如, 可以用三阶拉丁方

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_2 & C_3 & C_1 \\ C_3 & C_1 & C_2 \end{pmatrix}. \quad (11.1.8)$$

把表(11.1.7)扩充为:

A \ B	(A, B), C		
	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	(A ₁ , B ₁), C ₁	(A ₁ , B ₂), C ₂	(A ₁ , B ₃), C ₃
A ₂	(A ₂ , B ₁), C ₂	(A ₂ , B ₂), C ₃	(A ₂ , B ₃), C ₁
A ₃	(A ₃ , B ₁), C ₃	(A ₃ , B ₂), C ₁	(A ₃ , B ₃), C ₂

(11.1.9)

现在还需在(11.1.9)中添入适当的 D_l. 与添 C_k 的情形类似地, 要添入的诸 D_l 组成集 {D₁, D₂, D₃} 上的一个三阶拉丁方. 此外, 诸 D_l 的足标与诸 C_k 的足标各相遇一次, 这就是说, 足标对 (k, l) 恰

好出现一次，亦即 D_i 的诸足标所组成的拉丁方与诸 C_k 的足标所组成的拉丁方这二者正交。而且，反过来的推理也是对的。例如，因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

正交，故可把(11.1.9)扩充成符合要求的表：

A \ (A,B),C,D	B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	$(A_1, B_1), C_1, D_1$	$(A_1, B_2), C_2, D_2$	$(A_1, B_3), C_3, D_3$
A_2	$(A_2, B_1), C_2, D_3$	$(A_2, B_2), C_3, D_1$	$(A_2, B_3), C_1, D_2$
A_3	$(A_3, B_1), C_3, D_2$	$(A_3, B_2), C_1, D_3$	$(A_3, B_3), C_2, D_1$

(11.1.10)

在表(11.1.10)的“(A, B), C, D”栏中的九个组合就是符合要求的试验安排。

下面转而讨论 Kirkman 于 1847 年提出的一个问题。

问题 11.1.3 (Kirkman^[1] 女生问题)。 某教员打算这样安排她班上的十五名女生散步：散步时三名女生成一组，共五组。问能否在一周内每日安排一次散步，使得每两名女生在这周内一道散步恰好一次？

下面就是符合要求的分组方法。

第一日：{1, 2, 5}, {3, 14, 15}, {4, 6, 12},
{7, 8, 11}, {9, 10, 13};

第二日：{1, 3, 9}, {2, 8, 15}, {4, 11, 13},
{5, 12, 14}, {6, 7, 10};

第三日：{1, 4, 15}, {2, 9, 11}, {3, 10, 12},
{5, 7, 13}, {6, 8, 14};

第四日：{1, 6, 11}, {2, 7, 12}, {3, 8, 13}, (11.1.11)
{4, 9, 14}, {5, 10, 15};

第五日: $\{1, 8, 10\}, \{2, 13, 14\}, \{3, 4, 7\},$
 $\{5, 6, 9\}, \{11, 12, 15\};$
 第六日: $\{1, 7, 14\}, \{2, 4, 10\}, \{3, 5, 8\},$
 $\{6, 13, 15\}, \{8, 9, 12\};$
 第七日: $\{1, 12, 13\}, \{2, 3, 6\}, \{4, 5, 8\},$
 $\{7, 9, 15\}, \{10, 11, 14\}.$

问题 11.1.3 表面上看起来也纯属数学游戏, 然而它的解 (11.1.11) 却有其实应用. 下面是一个说明性的例子. 今欲用 15 种饲料对某种动物作试验. 试验分五个阶段进行, 每个阶段以三种饲料的混合物来喂养用作试验的七只同类动物, 假定需要按以下条件来安排试验: (1) 每种饲料对每只用作试验的动物在五个阶段所用的混合饲料中恰好用一次, (2) 每两种不同的饲料对全体用作试验的动物在五个阶段所用的混合饲料中都恰好同时用过一次. 那么, 根据 (11.1.11), 可以得到一个符合要求的安排, 有如 (11.1.12) 所示.

动物 \ 阶段 饲料	阶段				
	1	2	3	4	5
第一只	1, 2, 5	3, 14, 15	4, 6, 12	7, 8, 11	9, 10, 13
第二只	1, 3, 9	2, 8, 15	4, 11, 13	5, 12, 14	6, 7, 10
第三只	1, 4, 15	2, 9, 11	3, 10, 12	5, 7, 13	6, 8, 14
第四只	1, 6, 11	2, 7, 12	3, 8, 13	4, 9, 14	5, 10, 15
第五只	1, 8, 10	2, 13, 14	3, 4, 7	5, 6, 9	11, 12, 15
第六只	1, 7, 14	2, 4, 10	3, 5, 11	6, 13, 15	8, 9, 12
第七只	1, 12, 13	2, 3, 6	4, 5, 8	7, 9, 15	10, 11, 14

(11.1.12)

关于 Kirkman 女生问题以及与其有关的一些问题, 在第十九章还将详细地讨论.

不管是用拉丁方在试验地上安排农作物的播种, 或用正交拉丁方安排几种原料的配方, 还是用 Kirkman 女生问题的解作出的一个饲程内饲料的安排, 都涉及一些科学试验的安排问题. 上面