

# 地球物理中的反问题

栾文贵 著



科学出版社

介 面

5.611111

# 地球物理中的反问题

栾文贵 著

科学出版社

北京 100070

1989

1989

1989

## 内 容 简 介

本书基于场的理论,紧密结合地球物理问题,比较全面地论述了有关偏微分方程反问题的基本理论和方法。全书共有十章和六个附录。前四章主要阐述为确定方程右端反问题而发展起来的场延拓理论和方法;第五至第八章讨论为确定方程系数反问题而兴起的若干数学理论和方法;最后两章概述与解反问题密切相关的不适定问题的理论和算法。六个附录提供了本书所需的近代数学知识。

本书可供从事地球物理学、应用数学工作的科学工作者、教师和学生参考。

## 地球物理中的反问题

栾文贵 著

责任编辑 石小龙 刘嘉善

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1989年3月第一版 开本:850×1168 1/32

1989年3月第一次印刷 印张:14 1/4

印数:0001—1,000 字数:370,000

ISBN 7-03-000835-9/O·212

定价:17.10 元

# 前 言

近年来,随着生产实践和科学技术的迅猛发展,在数学物理领域内已经逐渐形成了反问题这一独立的学科分支。它的产生和发展,主要源于地球物理学、遥感遥测、无损探伤、诊断成像、核磁共振分层构象、等离子体监测和目标侦察等许多在经济、国防、科技和生活领域中都有重要价值的学科。

一般地讲,反问题是相对于其正问题而言的,任何一个问题都有它相应的反问题。在本书中,我们不去讨论一般问题的反问题,而是只局限于数学物理中的某些反问题。这类问题的一个共同特点是,在隐藏的介质内部不可能进行直接测量。

关于数学物理中的反问题,冯康教授曾在第四届全国数学会上作过综述报告。为了明确和深入起见,本书紧密结合地球物理的反演问题系统论述偏微分方程中的几个反问题。其它方面的问题在原理上是类似的。

反演问题是地球物理方法的最终目标,也是地球物理学的一个最核心的理论问题。基于场的理论,把地球物理反演问题化为偏微分方程的反问题来处理,则是当前最吸引地球物理学家和数学家关注的一个研究方向。

中国科学院学部委员傅承义教授和冯康教授对著者的工作给予了很大的鼓励和支持。中国科学院地球物理研究所李幼铭教授建议我撰写此书,他仔细阅读了手稿,并提出了许多宝贵的改进意见。在此一并向他们表示诚挚的谢意。

本书是国家自然科学基金和地震科学联合基金资助的课题。对这两个基金委员会的热情支持,我也表示谢忱。

栾 文 贵

1988年3月于北京中国科学院计算中心

## 绪 论

众所周知，解释地球物理资料的理论基础是经典场论。其内容是研究某些特定的地球物理场(异常)和与之相关联的介质结构(包含特性)之间的关系。为简便起见，将它们分别称为场和场源。这里所说的场源，是与所探讨的场直接相关的源，它具有一定的相对性。

现在看一些例子。

在重力测量和磁力测量中，其异常场是由地球内部的地质体天然形成的。在激发极化法中，其极化场是通过人工装置发出的电场由地下极化体产生的。在电磁法中，利用人工装置发出谐变的一次场，其感应场(二次场)是由一次场在地下导体内激发的涡流引起的。在遥感遥测中接收到的光波或无线电波，是由天然或人工源放射出电磁波遇到障碍物反射出来的。在地震方法中记录的反射波，是借助人工或天然爆破产生的入射波从地下间断界面(或障碍物)反射上来的。总之，上述地质体、极化体、导体、障碍物和间断面，统称为场源，而相应的重力场、磁场、极化场、感应场、光波、无线电波和地震波，统称为场(异常)。

粗略地讲，根据场源结构算出在其周围空间产生的场，称为场的正演问题。反之，已知地面(或空中)场的值，要求查明地下源的结构，则是场的反演问题。后者是地球物理学中的一个最核心理论问题。

在数学上，场是用函数  $u = u(X)$  来描述，而场源则是用相应的物性参数  $\mu$  和几何参数  $b$  来表征。这里  $X$  代表空间坐标向量， $\mu$  和  $b$  可以是向量、函数或函数向量。根据物理上的一些基本定律，场与场源的关系可以表述如下：

$$u = A(X; \mu, b). \quad (0.1)$$

这样，定量地说，上述场的反演问题是：已知  $u$ ，求  $\mu$  和  $b$ ，即解方

程(0.1)。在一般情形下,  $A$  是  $\mu$  和  $b$  的一个非线性泛函。

但是, 方程(0.1)的解一般是不唯一的。例如, 在某些情形下, 可以将(0.1)分解成

$$u = M(\mu)F(X; b). \quad (0.2)$$

显然, 方程(0.2)有无穷多个解。这样, 退一步要求, 所论反演问题至少应当分成如下两种陈述方式:

(1) 给定场的部分信息和场源的物性参数, 要求反推场源的几何参数;

(2) 给定场的部分信息和场源的几何参数, 要求恢复场源的物性参数。

这是地球物理反演问题最古典的一种直接表述方式。

反演问题现代的一种间接陈述方式是, 将之化为微分方程的反问题。大家知道, 微分方程的中心任务是寻求其定解问题的解, 意即寻找满足特定辅助条件的微分方程的解。相对于这个问题, 微分方程的反问题则是由微分方程解的某种泛函, 来确定方程的系数、右端或解的定义域。根据场的性质, 各种经典场形式上都满足下列偏微分方程(组):

$$Lu = \begin{cases} 0, & \text{在源外,} \\ g(X), & \text{在源内,} \end{cases}$$

其中  $g(X)$  是源函数,  $L$  是刻画场函数在空间变化规律的微分算子,  $L$  通常为二阶微分算子, 其系数取决于源及其周围介质的物理特性, 例如, 对于重力、磁和电场,  $L$  为 Laplace 算子

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \Delta;$$

对于电磁场, 在均匀且各向同性介质下,  $L$  为 Helmholtz 算子

$$L = \Delta + k^2, \quad k^2 = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{c^2} + i \frac{4\pi \omega \mu \gamma}{c^2}, \quad k \text{ 为波数,}$$

其中  $\mu$ ,  $\gamma$  和  $\epsilon$  顺次为介质的导磁率、导电率和介电常数,  $\omega$  为场的角频率,  $c$  为光在真空中的传播速度; 对于弹性波场, 在均匀、各向同性且完全弹性介质下,  $L$  为波动算子

$$L = \Delta - \frac{1}{v'} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad v = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad v \text{ 为纵波速度,}$$

而在地球是由完全弹性介质构成的一个简单球对称模型下,  $L$  为二阶常微分算子

$$L = - \frac{d}{dr} \left( r' \rho v' \frac{d}{dr} \right) + r' \rho [(l+2)(l-1)v' - \omega^2 r^2],$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad v \text{ 为横波速度,}$$

其中  $\lambda, \mu$  为 Lamé 常数,  $\rho$  为介质的体密度,  $l$  为一给定常数,  $\omega$  为地球环型振荡的频率. 由此可见, 地球物理的反演问题可以改用下面两种方式来陈述:

(1) 给定场方程解的部分信息, 要求推算方程的右端或定解域的形状;

(2) 给定场方程解的部分信息, 要求重建方程的系数.

反演问题的后一类提法具有重要的意义. 它不仅比问题的古典提法广泛得多, 而且可以充分利用现代的数学工具, 极大地丰富地球物理资料解释理论的内容.

应当强调指出, 反演问题不论按照上述哪种方式来陈述, 其在数学上常表现为不适定问题. 这是反演问题的固有特性.

本书共分十章, 内容包括三个主题.

在前四章中, 为了反推场源或场方程的右端, 主要论述了位场、电磁场和波场延拓的理论和方法. 然而, 场的延拓归结于相应场方程解的延拓, 而后者等价于一些经典偏微分方程的不适定 Cauchy 问题. 这样, 在表面上问题又化为解相应场方程的正问题. 这类问题与后面解方程的相应反问题有直接联系.

在第五至八章中, 为了确定层状模型下弹性介质的阻抗, 球状模型下地壳-上地幔中介质的密度及莫霍面的位置, 多维模型下干扰介质的波速, 和变化背景值下干扰介质的波速及奇性状况, 我们分别讨论了一类二阶常微分方程的反问题, 具间断的 Sturm-Liouville (S-L) 方程的反问题, Schrödinger 方程的反问题, 以及

线性化反散射问题的若干理论和解法。

第九和第十章，扼要叙述了不适定问题的基本理论及其正则化算法。

另外，为了使本书能够自给自足，特别为了节省读者的时间，我们增写了六个附录，以便随时查找正文中碰到的一些主要数学概念和方法。

本书的重要特点之一是，各章内容相互紧密连成一个整体。但是，每章又具有相对的独立性，可以分别作为一个分支进行考虑。



# 目 录

绪论	vii
<b>第一章 位场反问题的古典理论</b>	<b>1</b>
§1.0. 引言	1
§1.1. 单个异常的解释方法	2
§1.2. 复杂异常的解释方法	12
§1.3. 最优化选择法	21
§1.4. 评注	30
参考文献	31
<b>第二章 位场的解析延拓</b>	<b>32</b>
§2.0. 引言	32
§2.1. 位场反问题的新提法及解析延拓原理	33
§2.2. 调和函数延拓的性质	36
§2.3. 位场延拓的数学表述	39
§2.4. 位场延拓问题解的连续依赖性估计	46
§2.5. 位场延拓问题的稳定化算法	50
§2.6. 位场的二维延拓公式	59
§2.7. 评注	62
参考文献	63
<b>第三章 电磁场的延拓</b>	<b>65</b>
§3.0. 引言	65
§3.1. 电磁场的基本方程	66
§3.2. 上半空间中电磁场的解析表示式	69
§3.3. 均匀介质下电磁场延拓的理论公式	74
§3.4. 电磁场延拓问题解的估计及稳定化算法	78
§3.5. 垂向非均匀介质下电磁场的延拓	85
§3.6. 垂向非均匀介质下电磁场延拓问题解的估计及稳定化算法	92
§3.7. 评注	99
参考文献	100
<b>第四章 弹性波场的延拓</b>	<b>102</b>

§ 4.0.	引言 .....	102
§ 4.1.	弹性波传播的基本方程 .....	103
§ 4.2.	均匀介质下波场的延拓 .....	108
§ 4.3.	垂向非均匀介质下波场的延拓 .....	114
§ 4.4.	均匀介质、小倾角地层下波场延拓的近似算式 .....	121
§ 4.5.	近似算式问题的适定性 .....	127
§ 4.6.	非均匀介质下波场的延拓 .....	132
§ 4.7.	二维波场延拓的近似算式 .....	138
§ 4.8.	评注 .....	144
	参考文献 .....	145
<b>第五章</b>	<b>一维弹性波方程的反问题</b> .....	<b>147</b>
§ 5.0.	引言 .....	147
§ 5.1.	问题的数学陈述 .....	148
§ 5.2.	层状模型下弹性波方程解的性态 .....	153
§ 5.3.	层状模型脉冲激发下方程解的表示式和谱密度公式 .....	161
§ 5.4.	层状模型脉冲激发下介质阻抗的重建 .....	167
§ 5.5.	距激发位置足够远处具传输读出下介质阻抗的重建 .....	174
§ 5.6.	评注 .....	181
	参考文献 .....	182
<b>第六章</b>	<b>地球自由振荡的反问题</b> .....	<b>183</b>
§ 6.0.	引言 .....	183
§ 6.1.	问题的数学陈述 .....	184
§ 6.2.	间断的 S-L 方程初始问题解的性态 .....	189
§ 6.3.	间断的 S-L 问题固有值的分布 .....	196
§ 6.4.	间断的 S-L 问题固有函数的表示式 .....	203
§ 6.5.	两个间断的 S-L 问题位函数差的积分方程 .....	214
§ 6.6.	间断的 S-L 方程反问题解的唯一性 .....	220
§ 6.7.	地壳和上地幔中的密度及其间莫霍面位置的重建 .....	228
§ 6.8.	评注 .....	233
	参考文献 .....	234
<b>第七章</b>	<b>多维弹性波方程的反问题</b> .....	<b>235</b>
§ 7.0.	引言 .....	235
§ 7.1.	Schrödinger 方程反问题的几种提法 .....	236
§ 7.2.	几个辅助命题 .....	243
§ 7.3.	散射球面波与谱函数的关系 .....	249

§ 7.4.	散射球面波与散射平面波的关系 .....	253
§ 7.5.	散射波与散射振幅的关系 .....	260
§ 7.6.	具谱函数反问题的唯一性 .....	266
§ 7.7.	多维模型下介质波速的重建 .....	271
§ 7.8.	评注 .....	277
	参考文献 .....	278
<b>第八章</b>	<b>反散射问题中介质的成象</b> .....	<b>279</b>
§ 8.0.	引言 .....	279
§ 8.1.	反散射问题的线性化 .....	280
§ 8.2.	古典 Radon 变换 .....	285
§ 8.3.	广义 Radon 变换 .....	290
§ 8.4.	线性化反散射问题解的重建 .....	295
§ 8.5.	反散射问题中介质间断性的成象 .....	302
§ 8.6.	反散射问题中介质奇性的成象及偏移格式 .....	309
§ 8.7.	评注 .....	314
	参考文献 .....	316
<b>第九章</b>	<b>不适定问题的稳定性的性态</b> .....	<b>317</b>
§ 9.0.	引言 .....	317
§ 9.1.	数学物理方程定解问题适定与不适定的概念 .....	318
§ 9.2.	数学物理问题适定性的新概念 .....	323
§ 9.3.	映射连续性的性态(1) .....	326
§ 9.4.	映射连续性的性态(2) .....	330
§ 9.5.	位场反问题的稳定性 .....	337
§ 9.6.	场延拓问题的稳定性及其延伸 .....	344
§ 9.7.	评注 .....	351
	参考文献 .....	352
<b>第十章</b>	<b>线性不适定问题的算法</b> .....	<b>354</b>
§ 10.0.	引言 .....	354
§ 10.1.	第 I 类线性积分方程正规化算法的基本思想 .....	355
§ 10.2.	Hilbert 空间中线性不适定问题的正则化算法 .....	361
§ 10.3.	Hilbert 空间中线性不适定问题的适应正则化算法 .....	367
§ 10.4.	Hilbert 空间中一类线性不适定问题适应 ТИХОМОВ 算法的正则性 .....	372
§ 10.5.	场延拓问题的正则化算法 .....	381
§ 10.6.	评注 .....	392



参考文献 .....	393
附录 I 距离空间 .....	394
附录 II 线性赋范空间 .....	400
附录 III 内积空间 .....	410
附录 IV Hilbert 空间中线性算子的谱分析 .....	419
附录 V 广义函数与偏微分算子 .....	427
附录 VI 拟微分算子和 Fourier 积分算子 .....	434
参考文献 .....	441

# 第一章 位场反问题的古典理论

## § 1.0. 引言

大家知道,重力测量和磁力测量是地球物理的两种最老的方法<sup>[1,2]</sup>。因此,在地球物理的反演问题研究中,最早是从研究位场反问题开始的。在初期,由于只需要确定异常的原则性质,而且对计算准确度的要求不高,加上此种研究仅在不受严格生产计划约束的理论工作者之间进行,因而地球物理资料的解释理论自然就按单个异常解释理论的途径建立起来了。

所谓单个异常,就是异常是由一个简单规则几何形状且物性参数均匀分布的场源引起的。由于单个异常可以给出其正问题解的精确解析表示式,因而反问题方法就以下面两个最原始的思想为基础得到了充分的发展:

1. 借助于正问题解的表示式,通过直接解方程而得到反问题的解答;

2. 利用对比观测场与理论计算场的办法,直接解决反问题。

沿着上面两条基本思路,人们提出了多种方法<sup>[1-3]</sup>。按照方法的实质及数学物理特征,归纳之,大致可以划分成五类:解析法、图解法、积分法、选择法和场的空间分布法。这种分类方法并没有严格的标准。一般地说,前两类主要用于单个异常(特别是二维问题)的计算,而后三类可以用于复杂异常的计算。当然,适用于复杂异常解释的方法也一定适用于单个异常的解释。特别,针对具体的地质问题,有时需要交替使用不同的解释方法。

本章是以后各章讨论内容的前导。因此,我们只简单扼要地论述古典理论中几种有代表性的方法。在§ 1.1中,首先陈述单个异常解释的特殊点法和理论曲线对比法。接着在§ 1.2中,论述

复杂异常解释的积分法和选择法。然后在 § 1.3 中,着重介绍最优化选择法中的曲线拟合法。最后是评注,对所述各类方法作概括性的评述。

## § 1.1. 单个异常的解释方法

单个异常的解释,在绝大多数情形下,只讨论二维反问题的解法。为此,我们假设在垂直于场源走向的观测剖面上选定直角坐标系  $oxz$ , 使实轴  $ox$  沿地面观测的方向, 虚轴  $oz$  垂直地面向下 (图 1.1)。用  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  和  $b = (b_1, \dots, b_n)$  分别表示源的物性参数和几何参数, 于是, 在地面  $z = 0$  上场的表示式可以写成

$$u(x) = A(x; \mu_1, \dots, \mu_m; b_1, \dots, b_n). \quad (1.1.1)$$

首先, 当借助 (1.1.1) 式解决反问题时, 不一定需要给出场  $u(x)$  在地面  $z = 0$  上的全部数值。例如, 若已知  $\mu_1, \dots, \mu_m$ , 要求确定  $b_1, \dots, b_n$ 。一般只要给出场在地面上几个点上的值  $u_j = u(x_j)$  ( $1 \leq j \leq n$ ), 则可通过解方程组

$$u_j = A(x_j; \mu_1, \dots, \mu_m; b_1, \dots, b_n), \quad 1 \leq j \leq n \quad (1.1.2)$$

来达到。反之, 当已知  $b_1, \dots, b_n$ , 要求确定  $\mu_1, \dots, \mu_m$  时, 则可

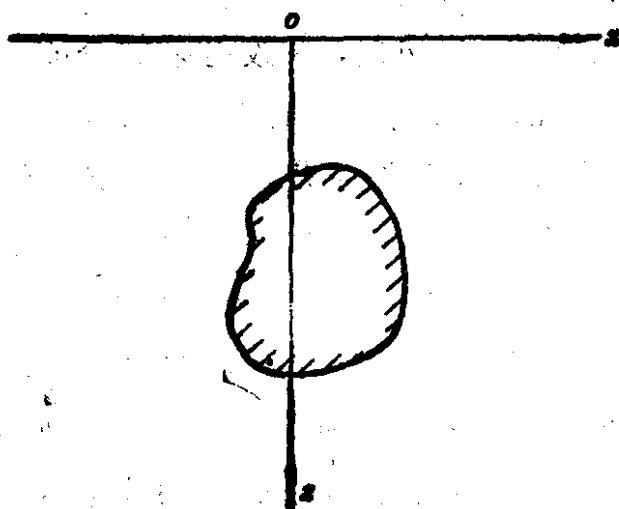


图 1.1

通过解  $m$  个方程的方程组来实现。在一般情形下, (1.1.2) 是一个非线性方程组。但是, 针对不同形状源的场解析式的特征, 若选择它的一些特殊点(如零点、极值点和拐点等等), 则(1.1.2)式右端的函数就退化为较简单的关系; 从而很容易求出所要求的参数。这就是单个异常解释中的特殊点法。

下面举几个磁测中的例子<sup>[2-3]</sup>。为此, 用  $Z$  和  $H$  分别表示磁场的垂直分量和水平分量;  $M = JS$  表示磁矩, 这里  $J$  为强化强度,  $S$  为源的截面积。另外, 假设横坐标  $x$  代表与场源走向垂直的剖面, 而纵坐标代表场的分量  $Z$  或  $H$ , 坐标原点随源的几何形状不同而定。

例 1.1. 无限延深的倾斜薄板状体。

当无限延深的板的厚度  $2b$  与顶部深度  $h$  存在关系  $2b \ll h$  时, 则磁场的解析式为

$$\begin{cases} Z(x) = 4bJ \sin \alpha \frac{h \cos \beta - x \sin \beta}{h^2 + x^2}, \\ H(x) = -4bJ \sin \alpha \frac{x \cos \beta + h \sin \beta}{h^2 + x^2}, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

其中  $\beta = \alpha - \theta$ ,  $\theta$  为剖面内磁化强度的倾角,  $\alpha$  为板的倾角。两个曲线的图形示于图 1.2。

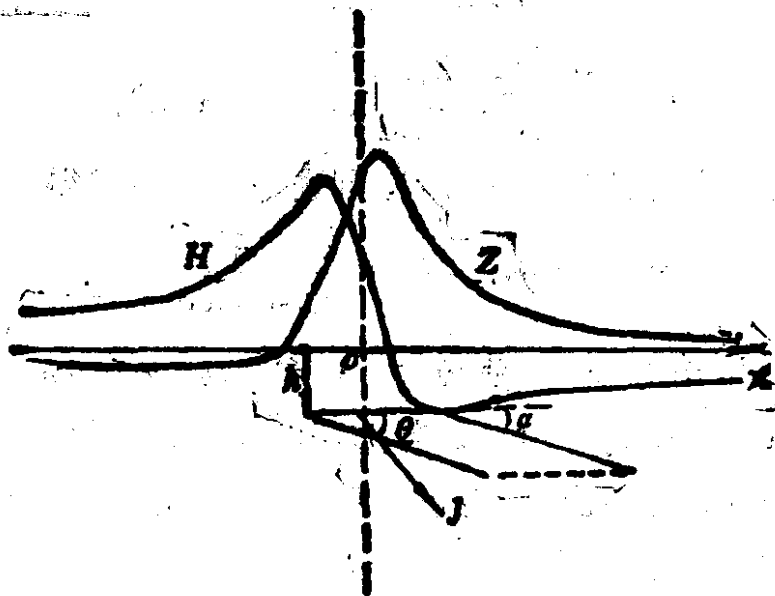


图 1.2

利用曲线  $Z(x)$ ，显然由  $\frac{dZ(x)}{dx} = 0$  得方程

$$x^2 - 2hx \operatorname{ctg} \beta - h^2 = 0.$$

由此求得其两个根分别为  $Z(x)$  的极大值  $Z_{\max}$  点  $x_{\max}$  和极小值  $Z_{\min}$  点  $x_{\min}$ ：

$$x_{\max} = h(\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{csc} \beta), \quad x_{\min} = h(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{csc} \beta). \quad (1.1.4)$$

将其代入 (1.1.3) 中第一式，则得

$$\begin{aligned} Z_{\max} &= 2J \sin \alpha \frac{b(\cos \beta + 1)}{h}, \\ Z_{\min} &= 2J \sin \alpha \frac{b(\cos \beta - 1)}{h}. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

从而立刻推出关系式

$$Z_{\max} + Z_{\min} = Z(0) = \frac{4Jb \sin \alpha \cos \beta}{h}.$$

根据这一关系式，可以定出曲线  $Z(x)$  的坐标原点的位置。

显然，由 (1.1.4) 式可以求得

$$h = \sqrt{|x_{\max} x_{\min}|}, \quad \cos \beta = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}},$$

而由 (1.1.5) 式则可求得

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{Z_{\max} + Z_{\min}}{Z_{\max} - Z_{\min}}, \\ h &= \frac{\sqrt{|Z_{\max} Z_{\min}|}}{Z_{\max} + Z_{\min}} (x_{\min} - x_{\max}). \end{aligned}$$

这样，若再给定磁性参数  $J$  和  $\theta$ ，则进一步可以求得

$$\alpha = \beta + \theta, \quad 2b = \frac{Z_{\max} + Z_{\min}}{2J \sin \alpha \cos \beta} h.$$

总之，应用  $Z(x)$  求薄板的几何参数  $h$ ， $\alpha$  和  $2b$ ，只需要两个特殊点： $x_{\max}$ ， $x_{\min}$ 。但是，若选用任意点，一般不仅需要三个点，而且解相应方程组相对也要复杂些。不过此时可以同时利用  $Z(x)$  和  $H(x)$  两条曲线。这样，也只需取两个点： $x = x_1, x_2$ 。事实上，由 (1.1.3) 式知



$$\sqrt{Z^2(x) + H^2(x)} = \frac{4Jb \sin \alpha}{\sqrt{h^2 + x^2}},$$

$$hZ(x) - xH(x) = 4Jb \sin \alpha \cos \beta.$$

令  $Z_k = Z(x_k)$ ,  $H_k = H(x_k)$  ( $k = 1, 2$ ). 于是, 当  $|x_1| > |x_2|$  时, 容易求得

$$h^2 = \frac{(Z_1^2 + H_1^2)x_1^2 - (Z_2^2 + H_2^2)x_2^2}{(Z_1^2 + H_1^2) - (Z_2^2 + H_2^2)},$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{(Z_1^2 + H_1^2)(Z_2^2 + H_2^2)(x_1^2 - x_2^2)}}{[Z_1 \sqrt{(Z_1^2 + H_1^2)x_1^2 - (Z_2^2 + H_2^2)x_2^2} - x_1 H_1 \sqrt{(Z_2^2 + H_2^2) - (Z_1^2 + H_1^2)}]}.$$

例 1.2. 水平圆柱体.

水平圆柱体磁场分量的表示式为

$$\begin{cases} Z(x) = 2M \frac{(h^2 - x^2) \cos \varphi - 2hx \sin \varphi}{(h^2 + x^2)^2}, \\ H(x) = -2M \frac{(h^2 - x^2) \sin \varphi + 2hx \cos \varphi}{(h^2 + x^2)^2}, \end{cases} \quad (1.1.6)$$

其中  $h$  为圆柱体的中心深度,  $\varphi$  为剖面内磁化强度的倾角. 图 1.3

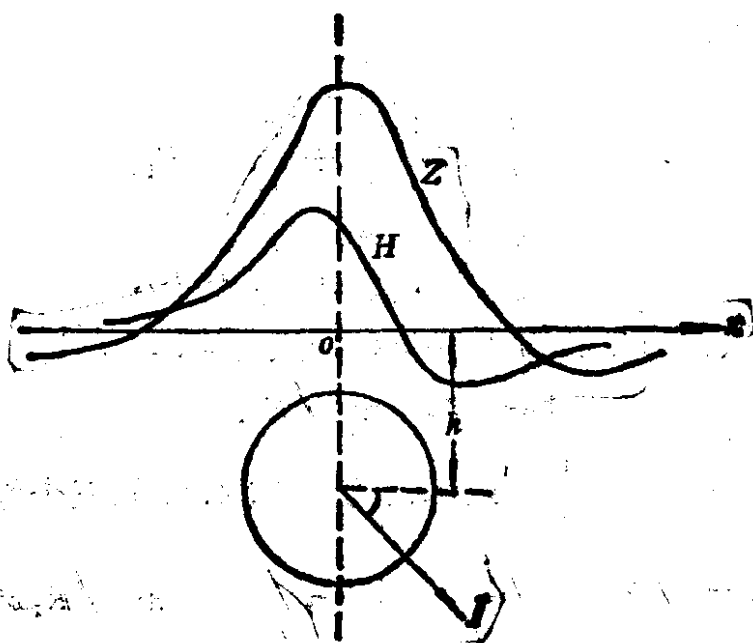


图 1.3