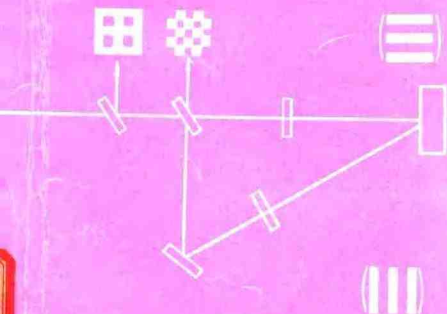


光折变非线性光学

刘思敏 郭 儒 凌振芳 编著
张光寅 审



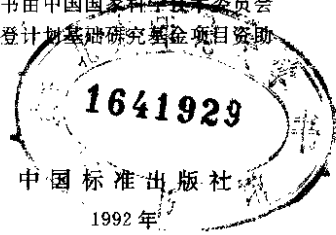
中国标准出版社

光折变非线性光学

刘思敏 郭儒 凌振芳 编著
张光寅 审

111165.116

本书由中国国家科学技术委员会
攀登计划基础研究基金项目资助



中国标准出版社

1992年

内 容 简 介

光折变材料在光辐照下，引起光波的振幅、位相、偏振甚至频率的变化，这为相干光处理提供了全方位的可能性，特别是光折变效应允许人们在低功率激光辐照下方便地观察各种非线性受激效应。目前它已成为实时光学信息处理的基本手段，并应用于光放大、光振荡，光学记忆，图象复原，空间调制器，全光学时间微分器，图象相减、相加、反演，图象相关和卷积等多种领域。

本书系统地介绍了近年来在非线性光学领域新出现的分支——光折变非线性光学的理论、效应及其应用，可供光学专业的大学生和研究生作为教学参考书，也可供有关科学工作者和工程技术人员参考。

光折变非线性光学

刘思敏 郭 儒 凌振芳 编著

张光寅 审

责任编辑 周俞斌

*

中国标准出版社出版

(北京复外三里河)

中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

版权专有 不得翻印

开本 787×1092 1/32 印张 8.875 字数 202 000

1992年12月第一版 1992年12月第一次印刷

*

ISBN 7 - 5066 - 0489 - 2/O · 001

印数 1—1800 定价 9.70 元

*

科目 279 - 064

序 言

激光的问世开创了许多新的光学研究领域，并给不少老学科带来了新的生机。由于激光的高强度、单色性和相干性，介质在强激光光场的作用下，其响应不再是线性的，而是与场强的高次项有关，从而出现了各种非线性光学效应，并形成了一门崭新的学科——非线性光学。

自从1966年贝尔实验室发现在铁电晶体中存在“光损伤”现象（即光折变效应 photorefractive effect）以来，在这20多年中，光折变非线性光学以意想不到的速度已发展成为当今非线性光学中的一个重要分支。它起初被认为只是一种不利的效应，现在却被利用来作为实时光学信息处理的基本手段，在此基础上的光放大、光学记忆、图象复原、空间光调制器、光学时间微分器、光偏转器等等，多种应用及激光器件已象雨后春笋般地发展起来，并广泛应用于许多领域。由于光折变非线性光学不同于通常的非线性光学，它允许在低功率激光的作用下，用方便的时间尺度来观察各种非线性光学效应，因而引起了人们极大的兴趣并为非线性光学开辟了更为广阔的研究领域。系统介绍有关光折变非线性光学的理论及应用方面的书籍目前国内尚未见到，本书正是为弥补此不足而编著的。书中系统介绍了国内外学者在此领域内所做的主要工作及目前所达到的水平，其中也包括作者所进行的有关工作及主要观点，以达到抛砖引玉之目的。

本书是作为研究生教材编写的。因而注意到既要有一定的理论深度，又具有丰富的实验资料，而且涉足到一些前沿课题。

全书共分八章，第二、三章是介绍有关理论；第四章介绍光折变材料；第五章讲光感应光散射；第六至八章讲主要器件及其应用。其中一至四章由郭儒、凌振芳执笔；五至八章由刘思敏编著。全书由张光寅教授进行了认真审阅。

本书是在较短的时间内匆促完成的，加之作者水平所限，难免有不妥及错误之处，敬请读者批评、指正。

作者 1991. 6.

目 录

第一章	绪论	1
第二章	光折变效应动力学	7
§ 2.1	带输运模型, 光折变效应动力学方程	7
§ 2.2	光致空间电荷场和相位栅	10
§ 2.3	空间电荷场的时间演化	19
§ 2.4	相位栅的非静态记录	33
§ 2.5	光生伏打效应对光折变效应的贡献	38
§ 2.6	电荷跳跃模型	46
第三章	光折变晶体内的非线性光耦合	53
§ 3.1	波耦合理论——简并二波混频	54
§ 3.2	近简并二波混频	66
§ 3.3	立方晶体内的光折变二波混频	68
§ 3.4	光折变简并四波混频	78
§ 3.5	晶体的线性电光系数和有效电光系数	91
第四章	光折变材料	104
§ 4.1	光折变晶体的特性参量	105
§ 4.2	氧八面体铁电晶体	113
§ 4.3	铋硅族氧化物	125
§ 4.4	半导体材料	128
§ 4.5	电光陶瓷	131
第五章	光感应光散射	135
§ 5.1	光感应光栅引起的布喇格衍射	136
§ 5.2	光折变晶体中各向同性与各向异性光散射理论	140
§ 5.3	光感应光散射的辐照光斑尺寸效应	144
§ 5.4	扇形效应	146
§ 5.5	散射光锥——环形散射光放大	154

§ 5.6	双光子简并受激参量散射	160
§ 5.7	由运动光栅引起的背向准周期振荡光锥	162
§ 5.8	光爬行效应	165
§ 5.9	各向异性光散射对喇曼光谱的影响	168
§ 5.10	光感应光散射与远场波面自卷褶相干效应的竞争	170
第六章	自泵浦相位共轭器	178
§ 6.1	相位共轭的概念和产生相位共轭波的方法	180
§ 6.2	自泵浦相位共轭器的结构设计	183
§ 6.3	SPPCM 主要参数的测量	186
§ 6.4	自泵浦相位共轭器的物理机制	188
§ 6.5	自泵浦相位共轭波的频移	193
§ 6.6	自泵浦相位共轭器的应用	197
第七章	光折变振荡器	206
§ 7.1	单向环型振荡器	208
§ 7.2	扩散型振荡器	211
§ 7.3	频率自扫描的染料激光器	214
§ 7.4	基于圆光生伏特电流的振荡器	216
§ 7.5	双相位共轭镜(DPCM)和双泵浦振荡器(DCPO)	218
§ 7.6	光折变振荡器中的光栅动力学和频率失谐	231
第八章	光折变效应的应用	246
§ 8.1	象放大	246
§ 8.2	光折变晶体中的相位共轭——实时全息术	248
§ 8.3	激光束偏转	252
§ 8.4	象相减和并行光学逻辑	258
§ 8.5	光学逻辑门和并行算法状态机	260
§ 8.6	新奇滤波器——全光学时间微分器	263
§ 8.7	象卷积和象相关	265
§ 8.8	光学存贮	267
§ 8.9	空间光调制器	269
作者论文目录		274

第一章 绪 论

光折变效应 (photorefractive effect) 是光致折射率变化效应 (photo-induced refractive index change effect) 的缩称。这一术语的含义是电光材料在光辐照下, 折射率随光强的空间分布而变化。折射率的这种变化与通常在强光场作用下所引起的非线性折射率变化的机制完全不同, 后者起因于光致瞬态非线性电极化。光折变效应是发生在电光材料中的一种复杂光电过程。这个过程可概括如下: 电光晶体内的杂质、空位或缺陷充当电荷的施主或受主。当晶体在光辐照下, 光激发电荷进入邻近的能带。光激发载流子在带中或因浓度梯度扩散, 或在电场作用下漂移, 或由光生伏打效应而运动。迁移的电荷可以被重新俘获。经过再激发, 再迁移, 再俘获, 最后离去了光照区而定居于暗光区。这样形成了与光强空间分布相对应的空间电荷分布 (图 1.1(c))。这些光致分离的空间电荷按照泊松方程产生相应的空间电荷场 (图 1.1(d))。尽管光致空间电荷密度并不算大, 典型的量级在百万分之一左右, 但由它们所产生的空间电荷场可显著地引起晶格的畸变。如果晶体不存在反演对称性, 空间电荷场将通过线性电光效应 (泡克耳斯效应) 在晶体内形成折射率在空间的调制变化, 或者说在晶体内写入体相位栅 (volume phase grating)。并且, 光束在写入相位栅同时, 又受到自写入相位栅的衍射作用进行读出, 因此光束的读写过程在光折变晶体内是同时进行的。这样记录的相位栅是一种动态光栅, 实时全息体光栅。这种动态光栅对写入光束的自衍射, 将引起光波的振幅、

位相、偏振甚至频率的变化。从这个意义上讲，动态光栅的自衍射为相干光的处理提供了全方位的可能性。以上所述就是光折变效应的全过程，也是光折变效应的物理含义。

光折变效应首先是由贝尔实验室工作的 Ashkin^[1]等人于 60 年代发现的。他们当初用 LiNbO_3 和 LiTaO_3 晶体进行光倍频实验时，意外发现强光照射会引起折射率的变化，从而严重地破坏了相位匹配条件。正因为如此，当初把这种不期望的效应称为“光损伤”。

这种“光损伤”还相当顽固，在暗处可保留相当长的时间。正是这一性质，首次被 Chen 等人^[2]认识到“光损伤”材料是一种优质的光数据存贮材料。从此引起人们对它的普遍重视和极大兴趣。Chen 等人还对“光损伤”的微观机制进行了探讨，提出了光激发载流子的迁移模型。人们又发现，通过均匀光照或加热等办法，这种光损伤的痕迹可以被擦洗掉。从而使晶体恢复初态。为了避免与永久性的破坏损伤相区别，后来人们普遍地把这一效应称为光致折射率变化或光折变效应。

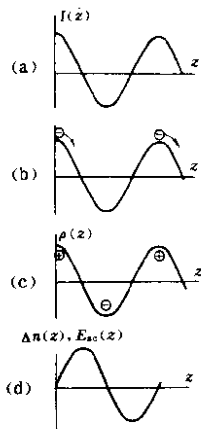


图 1.1 光折变过程

随后人们发现电光晶体都具有这种光折变效应。例如人们先后在铁电晶体 LiNbO_3 , BaTiO_3 , LiTaO_3 , KNbO_3 , $\text{Sr}_2\text{Ba}_1-x\text{Nb}_2\text{O}_6$ (SBN) 等铁电氧化物和顺电相晶体 $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO), $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO) 等立方硅族氧

化物以及半导体材料 GaAs, InP, CdTe 等都观察到光折变现象。这些光折变材料除具有较大的电光系数外,与一般在高功率激光场作用下的非线性光学材料相比有两个显著的特点。第一个特点是光折变材料的非线性光学效应与光强无关。这也就是说用弱激光束照射晶体,同样会显示出可观的非线性效应。光强的大小仅影响光折变过程进行的速度。若用毫瓦量级功率的激光照射光折变晶体,只需足够长的时间,也会产生明显的光致折射率变化。众所周知,在通常的受激布里渊散射和受激喇曼散射实验中,需要相当高光强的激光照射。然而在光折变晶体中进行双光束耦合,仅用低功率激光入射就可以产生显著的光能不可逆转移。这是由于在通常的光学非线性材料(原子,分子或凝聚态体系)中,价键电子云在光场的作用下发生形变,电子云的畸变只引起激发态的能级或跃迁矩阵的微扰变化,后者又对光的传递与转换产生影响。由于原子核对价键电子的束缚作用一般远大于光场的扰动作用,因此只有在极高功率的光场作用下才显示出明显的非线性光学效应。而在光折变材料中,杂质在带隙中形成施主、受主能级,在光场作用下,产生光生载流子(电子或空穴)。这些载流子迁移并复合形成分离的空间电荷,从而产生很强的晶体内电场,通过线性电光效应引起折射率变化,这种光折变效应起因于光强的空间调制,而不是绝对光强。低功率光致折射率变化无疑为非线性光学研究开创了更加广阔的研究领域,并方便地提供了用低功率激光观察各种受激光现象的机会。例如在毫瓦量级功率的激光作用下,人们用 BSO 晶体制作了各种相位共轭器。一些材料在毫瓦级可见和近红外激光作用下显示的光折变行为,无疑对光通信、光学信息处理和光学计算技术具有潜在的应用意义。光折变材料的另一个特点是它的非局域响应。通过光折变效应建立折射率相位栅

是需要时间的,相位栅的建立不仅在时间响应上显示出惯性,而且在空间分布上也是非局域响应的。即折射率改变的最大处并不对应光辐照最强处。也就是说,动态相位栅在光栅波矢 K 方向相对干涉条纹有一定的空间相移($\phi \neq 0$)。由波耦合理论知,增益系数 Γ 正比于 $\sin\phi$, 因此相移 $\phi = \pi/2$ 时,将发生最大的光能不可逆转移。 $\phi = \pi/2$ 的相位栅又称相移型光栅。相移型光栅允许将泵浦光能向信号光或相位共轭波进行转移,从而为通过非线性作用放大信号光提供了一种新途径。实验和理论都指出,由光折变晶体进行光耦合,其增益系数可高达 $10 \sim 100 \text{cm}^{-1}$ 量级,这远大于激光活性物质如红宝石、钕玻璃等的增益系数。基于光折变效应的这种高增益性,仅仅用几毫米厚的光折变材料制作的放大器,就可将信号光成百上千倍地进行放大。在这种光放大器上再加上适当的正反馈,还可以在光折变晶体内形成光学振荡。显然这是一种新型的相干光放大。它不同于以往的量子放大器,后者是通过活性介质的粒子数反转和受激辐射过程进行的相干光放大。由上所述,在光折变晶体内,由动态相位栅的耦合作用进行的相干光放大完全是基于经典光学的干涉,衍射和电光效应实现的。

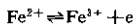
由于光折变效应具有上述的特性,光折变效应的应用从一开始就处于雨后春笋般地发展中。不仅应用十分广泛,其发展速度也是空前的。目前已用光折变材料制做成各种用途的非线性光学器件。例如体全息实时存储器、光象放大器和振荡器,相位共轭器、空间光调制器以及在光学信息处理和光学计算技术方面的各种实用器件。

随着对光折变效应应用的不断发展,人们在探索光折变效应的微观机制方面也同时进行了大量深入的研究工作。在分析光生载流子的迁移过程时,Chen^[2]等人提出载流子在外场或晶

体内极化电场作用下的漂移机制。随后 Amode^[3]又提出了光激发载流子按光强梯度分布引起的扩散迁移机制,并指出在低电导材料,光栅间距较小的情况下,载流子的扩散是最主要的迁移过程。他们从理论上给出了光生载流子因浓度梯度扩散和在电场作用下漂移这两种迁移机制下的空间电荷场的分布,进而给出折射率相位栅的分布,由此说明了光折变效应的许多现象。与此同时人们还认识了一种新型的载流子迁移机制——光生伏打效应^[4]。它不同于通常意义下的光生伏打效应,它是均匀铁电体材料(如 LiNbO_3 晶体)在均匀光照下产生的一种沿自发极化方向的光生伏打电流,因而它是不同于扩散和外场作用下漂移运动的又一种光生载流子的迁移过程,对光折变效应是又一种新贡献。在这些理论研究工作的基础上, Kukhtarev^[5]等人于 1979 年给出了描述光折变效应的一组动力学方程。人们又把这个理论模型称为带运输模型 (band transport model)。在该理论模型中,同时考虑了光激发载流子在晶体内的三种可能的迁移过程,即光电流包括扩散、漂移和光生伏打电流三个部分,因此较全面地分析了光折变效应的微观过程。由于该理论曾对稳态光折变现象给出了令人信服的结论,被人们普遍接受为描述光折变效应的理论。该理论还可描述光折变效应的瞬态和随时间演化过程以及非静态记录的各种情况,从而说明许多动态现象。与此同时, Feinberg^[6]也提出了另一个十分清晰物理图象——跳跃模型 (hopping model)。该模型以直观和概括的方式描述了光激发电荷的迁移运动,即将电荷的迁移过程看作从一个陷阱位置到另一个近邻陷阱位置上的跳跃过程。其跳跃的几率正比于辐照的光强和电场强度。该理论对稳态光折变现象给予了同样好的说明。因此也是一种可接受的模型。

同时人们对光折变过程中光生载流子(电子和空穴)的来

源进行大量的研究工作。认识到晶体中的杂质、缺陷和空位是光激发载流子的主要来源。它们形成的能级位于晶体的禁带中，充当施主和受主心的角色。因此晶体的非纯度、掺杂浓度对光折变效应至关重要。例如在铌酸锂 (LiNbO_3) 晶体内掺入少量的可变价态的铁 (Fe) 杂质，它们以 Fe^{2+} 和 Fe^{3+} 的形式进入晶体点阵。在光辐照下， Fe^{2+} 被光电离形成 Fe^{3+} ，激发至导带中的光电子迁移到暗区被 Fe^{3+} 陷阱俘获形成 Fe^{2+} ，从而导致了空间电荷分离，在晶体内产生出空间电荷场因而相位栅。从这个意义上讲，在 $\text{LiNbO}_3 : \text{Fe}$ 晶体内所发生的光折变过程，可以看作是在光子协助下发生的



转化过程。光折变效应是 Fe^{2+} 和 Fe^{3+} 杂质按光强重新分布的结果。

参 考 文 献

- [1] A. Ashkin et al., *Appl. Phys. Lett.*, **8**, 72 (1966)
- [2] F. S. Chen et al., *Appl. Phys. Lett.*, **13**, 223 (1968)
- [3] D. L. Steabier and J. J. Amodoi, *J. Appl. Phys.*, **43**, 1042 (1972)
- [4] A. M. Glass et al., *Appl. Phys. Lett.*, **25**, 233 (1974)
- [5] N. V. Kukhtarev et al., *Ferroelectrics*, **22**, 949 (1979)
- [6] J. Feinberg et al., *J. Appl. Phys.*, **51**, 1297 (1980)

第二章 光折变效应动力学

如前所述,在光折变晶体内动态相位栅的记录可描述如下:相干光束的干涉强度分布引起电子或空穴的不均匀产生,它们迁移至别处被陷阱所俘获,形成空间电荷分布,进而导致相应的空间电荷场。调制的空间电荷场又通过线性电光效应引起折射率的调制变化,也即形成折射率相位光栅。本章给出相位栅建立的定量描述,并讨论相位栅的性质。

§ 2.1 带输运模型,光折变效应动力学方程

带输运模型认为,晶体内的施主(受主)心在光照下被电离并释放出电子(空穴)。如果光强是调制的,电子和电离的施主(空穴和俘获的受主)的密度分布也是调制的,如图 1.1(c)所示。被激发的电子(空穴)在导带(价带)内可以自由运动。特别是由浓度梯度将会引起扩散运动,因外加电场导致漂移运动以及光生伏打效应形成光生伏打电流。由于上述的载流子迁移运动,最后在暗光区被陷阱所俘获,形成空间电荷分布。这些空间分离的电荷又产生出空间调制的空间电荷场,如图 1.1(d)所示。基于这种观点 Kukhtarev^[1]等人定量地给出一组描述上述光折变过程的基本方程式,并称为带输运模型。

为了简单起见,假定光激发载流子仅含有电子。设电子在导带中的数密度为 ρ ,晶体内的施主数密度为 N_D ,电离的施主(受

主)数密度为 N_D^+ 。在光强 I 辐照下,电子从施主心被激发至导带,其产生率为(见图 2.1):

$$(N_D - N_D^+)(sI + \beta) \quad (2.1)$$

式中, sI 是光激发几率; I 是光强; s 是光激发常数; β 是热激发几率,也为一常数。电子的俘获率为:

$$\gamma_R N_D^+ \rho \quad (2.2)$$

其中 γ_R 为复合常数。不动的电离施主随时间的变化率为:

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = (N_D - N_D^+)(sI + \beta) - \gamma_R N_D^+ \rho \quad (2.3)$$

导带中运动的电子应满足连续性方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial N_D^+}{\partial t} + \frac{1}{q} \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (2.4)$$

其中 q 为电子电量; \mathbf{J} 是电流密度,一般它由三部分,即由扩散、漂移和光生伏打电流组成。所以,

$$\mathbf{J} = qD\nabla\rho + q\mu\rho\mathbf{E} + \mathbf{J}_{ph} \quad (2.5)$$

其中 D 为扩散系数; μ 为迁移率; \mathbf{E} 为电场,包括外场 \mathbf{E}_0 和空间电荷场 \mathbf{E}_{sc} ; \mathbf{J}_{ph} 是光生伏打电流密度。空间电荷分布形成局域电场,满足高斯定理:

$$\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = q(N_D^+ - N_A - \rho) \quad (2.6)$$

其中 ϵ 为晶体的介电常数; N_A 为负电荷数密度,它保证在无光照下至少有 N_A 个被电离的施主心 $N_D^+(I=0) = N_A$,以保持电中性。最后一个方程是描述光在光折变晶体内传播的波方程:

$$\nabla^2 E_{opt} + \frac{1}{c^2} n^2 \frac{d^2 E_{opt}}{dt^2} = 0 \quad (2.7)$$

其中

$$n^2 = n_0^2 (1 - n_0^2 r_{eff} E_{sc}) \quad (2.8)$$

式中, n_0 为晶体的折射率; r_{eff} 为有效电光系数, E_{opt} 是光场振幅。(2.3~2.8)式就是描述光折变效应的基本动力学方程。

现小结如下^[1-3];

自由电子的连续性方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial N_D^+}{\partial t} + \frac{1}{q} \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (2.9)$$

不动的电离施主心变化率方程:

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = (N_D - N_D^+)(sI + \beta) - \gamma_R N_D^+ \rho \quad (2.10)$$

电流方程:

$$\mathbf{J} = qD\nabla\rho + q\mu\rho\mathbf{E} + \mathbf{J}_{pc} \quad (2.11)$$

泊松方程:

$$\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = q(N_D^+ - N_A - \rho) \quad (2.12)$$

光波方程:

$$\nabla^2 E_{opt} + \frac{1}{c^2} n^2 \frac{d^2 E_{opt}}{dt^2} = 0 \quad (2.13)$$

折射率方程:

$$n^2 = n_0^2 (1 - n_0^2 \epsilon_{eff} E_{ac})$$

或近似为:

$$n = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 \epsilon_{eff} E_{ac} \quad (2.14)$$

为了简化,取式中的 D, μ 和 ϵ 为标量, N_D 和 N_A 也为常数。不难看出(2.9~2.12)式是一组非线性耦合方程,直接求解是困难的。为了对实验结果给出定量说明,还须对上述方程组作进一步的简化和假设。这组方程又称 Kukhtarrev 方程^[7],我们还可以进一步缩

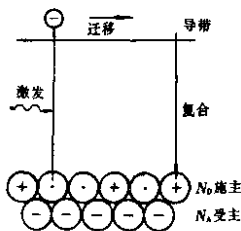


图 2.1 光电子激发和复合过程

写,特别是对于一维情况。将(2.9~2.11)式合并,给出:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial N_D^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial z} + \mu \rho E + \frac{J_{ph}}{q} \right) \quad (2.15)$$

将(2.12)式对时间求导,注意到 N_A 为常数和(2.11)式,有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon E) \right] &= q \frac{\partial}{\partial t} (N_D^+ - \rho) = - \frac{\partial}{\partial z} \left(qD \frac{\partial \rho}{\partial z} + \mu q \rho E + J_{ph} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon E) + qD \frac{\partial \rho}{\partial z} + \mu q \rho E + J_{ph} \right] &= 0 \end{aligned}$$

所以有

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon E) + qD \frac{\partial \rho}{\partial z} + \mu q \rho E + J_{ph} = J_c \quad (2.16)$$

式中 J_c 为积分常数,可由给定的边界条件确定。方程(2.16)描述了光致空间电荷场随时间的演化过程。

§ 2.2 光致空间电荷场和相位栅

如上所述,描述光折变效应的基本方程是一组非线性耦合方程,方程中包含有许多参数,这使问题更加复杂化。为了求解需作近似简化。下面就一些简单情况,讨论基本方程解的性质^[2],从而说明光致空间电荷场和光致相位栅的形成。

一、均匀光照和光清洗

如果光强是空间均匀分布的,预料经过辐照一段时间后, ρ , J 和 N_D^+ 将为常量。假定导带中的电子密度 ρ 很小,即 $\rho \ll N_A$, $N_D - N_A$, 因而有 $N_D^+ \approx N_{D0} = N_A$ 。在这个近似条件下,(2.3)式右边可化简为:

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = (N_D - N_A)(sI + \beta) - \gamma_R N_A \rho = g(I) - \rho/\tau_R \quad (2.17)$$