高等学校教学用书

常微分方程

高素志　马遵路　编
曾昭著　陈平尚

图书馆惠存

作者 一九八九.六.

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

常 微 分 方 程

高素志 马遵路 编
曾昭著 陈平尚

*

北京师范大学出版社出版发行
全 国 新 华 书 店 经 销
北 京 通 县 燕 山 印 刷 厂 印 刷

开本：850×1168 1/32 印张：9.75 字数：237千
1988年7月第1版 1988年7月第1次印刷
印数：1—6 000

ISBN 7-303-00060-7/O·5
定价：2.15 元

出 版 说 明

北京师范大学是一所具有八十多年历史的老学校，在学科建设和教学实践中积累了一定的经验，将它贯彻到教材中去无疑是有益的。为了加强教材建设。加强与兄弟院校的交流，我社约请北京师范大学数学和数学教育研究所所长严士健教授等组成教材编委会，研究编写出版一套教材。编委会在研究当前教学改革的新情况和过去的教学经验的基础上，同时参照原教育部1984年颁发的中学教师进修大纲，对教材的编写宗旨和要求进行认真地讨论。组织数学系有教学经验的教师进行编写，并且由编委等分工负责对书稿进行审订。

这套教材包括数学分析、解析几何、高等代数、概率论与数理统计、常微分方程、复变函数论、抽象代数基础、高等几何、微分几何、实变函数论与泛函分析、计算方法、理论力学以及高等数学（物理、天文、无线电等专业用）等。

这套教材文字通俗易懂、内容由浅入深、循序渐进，便于自学，科学系统性较强。每章有小结，每节（或几节）后配有习题。每章有总复习题，习题安排由易而难，层次清楚。书后附有习题答案或提示，以利于读者自学时检查自己的作业。

为了适应不同层次学校和人员的需要，书中有些内容加了“*”，它相对独立，如因学时较少，可以删去。

这套教材可供高等师范院校本科生（或专科）、教育学院数学系、函授（数学专业）、在职中学教师进修等使用。

编 委 会

前　言

本书是在近几年本系讲授常微分方程的基础上，参照“中学教师进修高等师范本科数学专业常微分方程教学大纲”修改而成，并于1986年夏秋之际为本系业余大学、函授大学学员讲课时使用过。

全书共分七章，第一、二章是基本概念与初等解法，第三章是基本理论，第四、五章为线性方程与线性方程组的基本理论与有关解法。这五章构成本书最主要的内容，五十六学时可以讲授完毕。第六、七章是基本理论的深入和发展，是在教学中可以机动的部分。

每节都配备了必要的习题。从实际教学中发现，配备一些综合题很有好处，这可以进一步提高学生判定方程的类型、选择解法、综合论证的能力。因而是必不可少的。鉴于此，我们在重点的各章都配备了综合题。

在编写过程中，赵慈庚教授给了我们热情的鼓励与帮助，薛宗慈付教授试用过初稿，提出了许多宝贵意见。特别是北京大学丁同仁教授曾多次对本书的内容和写法给以具体指导，初稿写出后又提出了许多指导性意见，在此向他们表示衷心的感谢。

在编写过程中主要参考了下列各书：

1. 丁同仁：《常微分方程基础》。
2. 叶彦谦：《常微分方程讲义》。
3. 王柔怀、伍卓群：《常微分方程讲义》。
4. 张芷芬等：《常微分方程定性理论》。

由于作者水平有限，难免有疏漏之处，尚望同志们批判指正。

编　者

于北京师范大学数学系

1986年10月

目　录

第一章 引 论

§1 引言与例子

从学习代数开始，我们就见过了代数方程与方程组。后来，在解析几何、数学分析等课程中，又遇见过函数方程。例如：

$$x^2+y^2=1$$

$$y=x-\varepsilon\sin x \qquad (0<\varepsilon<1)$$

也见过函数方程组，例如

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

等等。

微分方程是另一类函数方程，顾名思义，在方程中必含有"微分"或导数，如：

1) $\dfrac{dy}{dx}+x=0$

2) $r^2\dfrac{d^2u}{dr^2}+r\dfrac{du}{dr}+(r^2-1)u=0$

3) $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$

等等。都是微分方程。所谓微分方程，就是含有一个或几个自变量，未知函数以及未知函数的导数（或微分）的方程。只含有一个自变量的微分方程，称为常微分方程。自变量多于一个的微分方程，称为偏微分方程。上面所列的三个微分方程中，1)、2)是常微分方程，3)则是偏微分方程。

微分方程是与微积分同时产生的。许多实际问题的解决，导致求解微分方程，而微分方程的研究又促进实际问题的解决，同

时也促进了其他学科的发展。比如，根据探照灯把点光源发出的光，反射成平行光束的要求，列出微分方程，求出它的“解”，从而确定出反射镜面所应有的形状；又如在天文学上，一般的天体都是观察到的，而海王星的发现，却是一个罕见的特例。它是Leverrier根据微分方程的研究结果，预见到有个行星存在，还算出了它在天空中的位置，按照他所算出的结果而找到的。在近代，微分方程不仅在物理、力学、工程等方面继续发挥作用，还渗透进了生物学、生态学、经济学、医学等各学科，因而也还是比较活跃的数学分支。它所施展作用的程序是：分析问题的因素，提炼成数学模型（即导出微分方程），求解或作定性分析，作为确定合理方针的依据使问题得到解决。

下面介绍几个实例，这些问题的解决有赖于微分方程的求解。

例1 自由落体运动。一个物体自高处落下，若只计重力作用，忽略空气阻力及其他因素，并设物体离地面不远，即可认为重力加速度为常数g。

解：建立坐标系，选定物体降落的铅直线为坐标轴，以它和地面的交点为原点，方向以向上为正。设落体B的质量为m，它在时刻t的位置坐标为$s(t)$，则$\dot{s}=\dot{s}(t)=\frac{ds(t)}{dt}$代表$B$在时刻$t$的瞬时速度$v=v(t)$，而$\ddot{s}=\ddot{s}(t)=\frac{d^2s(t)}{dt^2}$代表$B$在时刻$t$的瞬时加速度$a=a(t)$，根据牛顿第二定律有

图 1－1

$$m\ddot{s}=-mg$$

即

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g \qquad (1.1)$$

这是通常的不定积分问题$\left(\frac{dy}{dx}=f(x)\right.$，则$\left.y=\int f(x)dx+c\right)$，将

(1.1)式写为$\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=-g$，令$\frac{ds}{dt}=v$，得$\frac{dv}{dt}=-g$，积分之得

$$v(t)=-gt+c_1 \tag{1.2}$$

再积分之得

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2 \tag{1.3}$$

这就是自由落体的一般规律，但其中含有两个任意常数，具体的运动规律尚未确定下来。若再给出"定解条件"（此处指"初始条件"）则可把它们确定下来：设当$t=0$（初始时刻）时，B的高度为s_0（初始位置），又设给它以初速v_0，即

$$当t=0时，s=s_0，\frac{ds}{dt}=v_0 \tag{1.4}$$

将它代入（1.2）中，得$v_0=c_1$，即$c_1=v_0$，又将它代入（1.3）中，得到$s_0=c_2$，即$c_2=s_0$，从而（1.3）化为

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0 \tag{1.5}$$

这就是从高度为s_0的位置处自由下落，具有初速v_0的物体的运动规律。它叫做初值问题（哥西问题）

$$\begin{cases}\dfrac{d^2s}{dt^2}=-g\\ s(0)=s_0,\ v(0)=v_0\end{cases}$$

的解

例2 弹簧振动 设质量为m的振子沿水平轴在有阻力的介质中运动，试研究它的运动规律。

解： 设弹簧两端固定于A、B，如图1-2（a）

图1-2（a）

$\frac{ds}{dt}=g$ $s=gt+c$ $\frac{1}{2}gt^2$

图 1－2（b）

建立坐标系，以静止点为原点O。给弹簧以初始位移后，然后放开，由于弹性恢复力的作用，弹簧开始振动．以$x(t)$代表位移，则$\frac{dx(t)}{dt}$为运动的速度，$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$为惯性力，此时外力有两个：其一为弹簧的恢复力f_1，按虎克定律，其大小与振子偏离平衡位置的距离成正比，即

$$f_1=-kx \quad (k>0)$$

负号表示力的方向与振子位移的方向相反；其二为介质的阻力f_2，设它与速度成正比，即

$$f_2=-r\frac{dx}{dt} \qquad (r>0)$$

由牛顿第二定律，得到运动的微分方程（弹簧振动的数学模型）

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-r\frac{dx}{dt}$$

或

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0 \tag{1.6}$$

与例1相同，除具有初始位移之外，还有初速度，即弹簧振子的初始条件为

$$当t=t_0时，x(t)=x_0,\ \frac{dx}{dt}=x'_0 \tag{1.7}$$

由此可见，欲了解弹簧的振动情况，我们需要求初值问题

$$\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0\\ x(t_0)=x_0,\ x'(t_0)=x'_0\end{cases}$$

的解．

例 3　R-L-C电路。

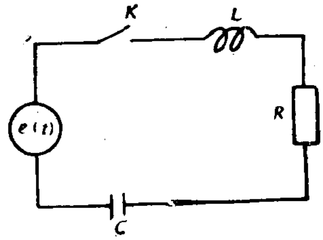

图 1-3

如图1-3所示的电路，其中包括电阻R、电感L、电容C，设它们都是常数，又设电原$e(t)$为已知函数，当合上开关K后，电流i在回路中流动，试研究它的规律。

解　合上开关K之后，就组成了闭合回路，各元件上的电压降分别是Ri，$L\dfrac{di}{dt}$，$\dfrac{Q}{C}$，其中Q为电量，由基尔霍夫第二定律得

$$e(t)=L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}$$

又因$i=\dfrac{dQ}{dt}$，将上式求导得

$$\frac{de(t)}{dt}=L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}$$

$$=L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i$$

特别，当$e(t)$为常数时，则有

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=0 \tag{1.8}$$

这是电流i所应满足的微分方程。

（基尔霍夫第二定律是：绕闭合回路一周，电压降为零）。

例 4　镭的衰变。镭是一种放射性物质，它的质量$R=R(t)$，随着时间的增加而减少即$\dfrac{dR}{dt}<0$，称为镭的衰变。由实验知，镭的衰变率与镭的存余量成正比，设比例系数为k，则有

$$\frac{dR}{dt}=-kR \qquad (k>0)$$

这就是镭的衰变的数学模型。设在初始时刻，镭的数量为R_0，则

需要解初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dR}{dt}=-kR \\ R(t_0)=R_0\end{cases} \tag{1.9}$$

例 5 生物总数的数学模型

说明：我们讨论一个孤立的生物种群，即假设在一个地区内没有迁移，也没有和其他种群形成捕食与被捕食的关系。再者，生物数量的增减是一个一个地进行的，它是时间的函数，但不是连续函数，然而，当数量很大，变化一、二个对整体的影响甚小时，可以近似地看成时间t的连续函数。

以$p=p(t)$表示种群数量，其增长率$r(t,p)$是出生率与死亡率之差，在最简单的情况设其为常数a，于是有

$$\frac{dp}{dt}=ap(t)$$

这就是有名的马尔萨斯（Malthus）方程，设初始时的总数为$p(t_0)=p_0$，于是构成初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dp}{dt}=ap \\ p(t_0)=p_0\end{cases} \tag{1.10}$$

例 6 捕食—被捕食者的数学模型。

本世纪二十年代，意大利生物学家U·棣安考纳（D′Ancona）研究相互制约的鱼类总数的变化情况时，从统计数字发现，第一次世界大战期间，掠肉鱼的捕获量所占的比例增加了。他请数学家V·沃特拉（Volterra）研究这个问题。沃特拉将鱼分成两类：掠肉鱼（如鲨鱼等）作为捕食者，总数以$y(t)$表示，食用鱼作为被捕食者，总数以$x(t)$表示。他假设被捕食者本身的食物是充足的，即它们内部竞争不激烈。当不存在掠肉鱼时，（食用鱼的增长率遵循马尔萨斯方程：$\dfrac{dx}{dt}=ax(a>0)$），当它与掠肉鱼相遇时，便被吃掉。两类鱼相遇的次数与它们的总量乘积成正比，故

单位时间内相遇次数为bxy（$b>0$），故得方程$\frac{dx}{dt}=ax-bxy$.
类似地，掠肉鱼的自然减少率与现有数量成正比，即为$-cy$（$c>0$）当它和食用鱼相遇时，便促进它的增长，增长率与xy成正比，设为exy（$e>0$），于是得到方程$\frac{dy}{dt}=-cy+exy$. 将两个方程联立，得到"微分方程组"：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=ax-bxy \\ \frac{dy}{dt}=-cy+exy \end{cases} \tag{1.11}$$

（1.11）是当不存在人类的渔业活动时，掠肉鱼与食用鱼相互影响所遵循的微分方程组. 在此基础上，考虑捕鱼活动的影响，得到

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=(a-\varepsilon)x-bxy \\ \frac{dy}{dt}=-(c+\varepsilon)y+exy \end{cases} \tag{1.12}$$

对（1.12）的分析表明，降低捕鱼量对掠肉鱼有利.

例7 人造地球卫星的轨道.

从三体问题谈起：设空间有三个质点，它们之间以万有引力相互作用，已知它们在t_0时刻的位置和速度，求它们在任何时刻t的位置和速度. 二体问题则是同一问题，但少了一个质点. 人造地球卫星是一个特殊的二体问题：以地球和卫星各为一个质点，忽略其他星体（行星、卫星等）的影响. 当然，由于地球的质量比卫星大的多，可以认为地球是静止的. 设卫星发射后在一个平面内运动.

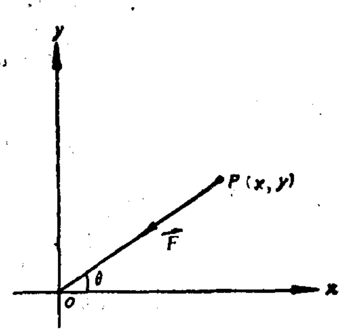

图1-4

建立坐标系，以地球中心为坐标原点（设地球的质量集中于地心），卫星位于点$P(x,y)$，这时，引力的方向指向地心，而其

大小为

$$\left|\vec{F}\right|=\frac{kmM}{x^2+y^2}$$

其中m为卫星的质量，M为地球的质量。如图1—4，设θ为$\vec{F}$和x轴之间的夹角，则$\vec{F}$在两个坐标轴上的分量分别是（注意$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$）

$$-\frac{kmM}{r^2}\cos\theta=-\frac{kmM}{r^3}x$$

$$-\frac{kmM}{r^2}\sin\theta=-\frac{kmM}{r^3}y$$

于是得到卫星运动的微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{kM}{r^3}x\\[2ex]\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{kM}{r^3}y\end{cases}\tag{1.13}$$

我们将在第五章讨论这个方程组的解法。

例 8 （消去任意常数得到曲线族的微分方程）。求曲线族

$$(x-a)^2+y^2=a^2\tag{1.14}$$

所满足的微分方程，其中a是参数。

解：在（1.14）中，把y看成x的函数，求导得

$$2(x-a)+2y\frac{dy}{dx}=0$$

由此有

$$a=x+y\frac{dy}{dx}$$

代入（1.14）得

$$\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)^2\tag{1.15}$$

由这个例子可见，对含有参数的方程（比如曲线族），求导后，将所得结果与原方程联立，消去参数，就得到微分方程。当原方程有两个参数时，还要再求导一次，这时从三个方程中消去两个参数，得到一个微分方程，这时，方程中含有二阶导数（二阶

微分方程）。读者可由此想象多个参数的情况。

由这些例子发现

1° 许多领域里的问题，都可归结为求解微分方程，换句话说，微分方程有广阔的实际背景。

2° 不同领域里的某些问题，提法不同，方程中出现的度量的含义各异，但如果只从数学上看，却是同一个问题：如例 2 与例 3，一个是力学问题，未知函数$x(t)$代表位移，另一个是电学问题，未知函数 $i(t)$代表电流，但它们所服从的微分方程却是一样的：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by=0 \tag{1.16}$$

都是"二阶常系数线性微分方程"。又如例 4 和例 5，也是同样的方程：

$$\frac{dy}{dt}=ky \tag{1.17}$$

因此，我们将某类微分方程研究清楚之后，可以用来解释许多领域里的问题，这就避免了大量重复性劳动，这也正是数学抽象化的优点。

以上分析，从一个侧面说明了设置常微分方程课的必要性。

习 题 1.1

kV

以下各题，只要列出微分方程即可.

一、求以初速度 v_0 在空气中铅直上抛的物体的运动方程，设该物体的质量为 m，物体所受阻力与速度的平方成正比例.

二、一个质量为 m 的物体，在倾角为30° 的斜面上，由静止开始下滑，若不计摩擦力，试建立运动的微分方程.

三、已知一平面曲线经过某定点M_0，且曲线上每一点M（但M_0除外）的切线与直线M_0M的交角恒等于定数a，求曲线所满足的微分方程.

四、求下列曲线所满足的微分方程：

1 $y=cx^2+c^2$; 2．$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{c^2-1}=1$.

五、一容器内盛有200升的盐水，含盐S_0斤，设从$t=0$开始以4升/分的速度向容器内注入含盐0.5斤/升的盐水，经充分搅拌后又以同样的速度流出容器，试求任何时刻$t>0$容器内盐的浓度所应满足的微分方程.

六、摩托艇以5米/秒的速度在静水中运动，全速时停止了发动机，过了20秒钟后艇的速度减至$v_1=3$米/秒.设水的阻力与艇的速度成正比，确定发动机停止2分钟后艇的速度.

§2 基本概念

定义1 联系自变量x，未知函数y和它的导数$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$，…，$\frac{d^ny}{dx^n}$的关系式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \qquad (1.18)$$

叫做常微分方程，其中F是$n+2$个变量的已知函数，它在某区域G上有定义，出现在方程中的未知函数的最高阶导数的阶数，称为该常微分方程的阶.

注：多于一个自变量的函数，当求导时出现了偏导数，如果在所给的关系式中出现了多元函数及其偏导数，称该关系式为偏微分方程.

§1的例1、例2和例3中出现的方程都是常微分方程，且为二阶的；例4和例5都是一阶常微分方程.又如：

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+x^3=0，\text{一阶常微分方程.}$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}=0 \quad \text{偏微分方程.}$$

本书只研究常微分方程，在不致引起混淆的情况下，常常只说方程二字.

定义2 设函数$y=\varphi(x)$在区间I上连续，且有直到n阶的导