新编高中数理化复习参考书

数　学

习题及解答

（下）

福州市教师进修学院
福　州　市　数　学　会　编

天津科学技术出版社

新编高中数理化复习参考书

数　学

习题及解答

（下）

福州市教师进修学院
福　州　市　数　学　会　编

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷二厂印刷

天津市新华书店发行

*

开本787×1092毫米 1/32 印张 12 字数 258,000

一九八〇年十二月第一版

一九八〇年十二月第一次印刷

印数：1—278,000

统一书号：13212·25　　定价：0.98元

目　录

第十五章 直 线 形

习 题

（一）

1．已知菱形$ADEF$的顶点D、E、F分别在$\triangle ABC$的边AB、BC、CA上，并且$AB=14$厘米，$BC=12$厘米，$AC=10$厘米，求BE和EC的长．

2．把梯形的一腰三等分，从各分点引平行于底的直线．已知这梯形的两底分别为20厘米和50厘米，求各平行线夹在梯形两腰间的线段的长．

3．$\triangle ABC$中，$AB=9$厘米，$AC=6$厘米，它们夹角的平分线分第三边为两部分，其中一部分等于这个三角形的一条边，求这个三角形的周长．

4．直角梯形的两底$AD=17$厘米，$BC=25$厘米，斜腰$AB=10$厘米，AB的垂直平分线EF交AB于E，交DC的延长线于F，求EF的长．

5．已知平行四边形的两邻边上的高为h_1和h_2，并且周长为$2S$，求它的面积．

6．经过直角三角形ABC的斜边AB的中点D作垂线和直角C的平分线交于E点，求证：$CD=DE$．

7．P为$\triangle ABC$内部一点，求证：$\angle BPC>\angle BAC$。

8．求证：任意三角形三边和的一半小于三条中线和的

三分之二.

9.（1）$\triangle ABC$内角A的平分线交BC于D，求证：

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}.$$

（2）$\triangle ABC$内角A的外角平分线交BC的延长线于D，求证：$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$.

10．已知E、F分别是平行四边形$ABCD$中DA、DC的中点，连结BE、BF分别交AC于M、N，求证：$AM=MN=NC$.

11．已知平行四边形$ABCD$中，O是对角线的交点，线段EF过O点，且与AB、CD分别交于F、E，M、N分别是AO与CO的中点，求证：$MFNE$是平行四边形.

12．I是$\triangle ABC$的内心，过I作边BC的平行线分别交AB、AC于D、E，求证：$DE=BD+CE$.

13．在$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$AD\perp BC$，D为垂足，$\angle B$的平分线交AD于F，交AC于E，求证：$DF\cdot EC=AE\cdot AF$.

14．$\triangle ABC$中，$\angle A$的内外角平分线分别交BC和BC的延长线于D、E，O为DE的中点，求证：$OA^2=OB\cdot OC$.

15．C为AB上一点，$\triangle ADC$和$\triangle CEB$为等边三角形，且都在AB的一侧.连AE、BD分别交CD、CE于P、Q，求证：$CP=CQ$.

16．在平行四边形$ABCD$中，E为AB的中点，在AD上截取$AF=\dfrac{1}{3}FD$，连EF交AC于H，求证：

$AH=\frac{1}{6}AC$.

17．在等腰$\triangle ABC$底边BC延长线上任取一点P，过P点分别引AB、AC的垂线，垂足为D、E．求证：$PD-PE$为定值.

18．求证：梯形的中位线长等于两底和的一半.

19．平行四边形$ABCD$中，$AD=2AB$，由AB的两端延长到E、F，使$EA=BF=AB$，求证：$CE\perp DF$.

20．写出下列各命题的逆命题、否命题和逆否命题，并指出哪些命题成立：

（1）等边三角形的三个内角都相等；

（2）正方形的对角线长相等.

21．用圆规、直尺作图并写出作图步骤：

（1）作已知线段的垂直平分线；

（2）作已知角的平分线；

（3）过已知直线外的已知点作已知直线的平行线；

（4）已知三边作三角形；

（5）已知两边一夹角作三角形；

（6）已知两角一对边作三角形；

（7）已知一斜边一锐角作直角三角形；

（8）已知一直角边一锐角作直角三角形；

（9）把一已知线段分成两部分，使它们的比为两条已知线段的比；

（10）作两条已知线段的比例中项.

（二）

1．E、F分别是正方形$ABCD$的边BC、CD上的点，且

$\angle EAF=45^{\circ}$.求证：A到EF的距离等于正方形的边长.

2．AD是直角三角形ABC斜边BC上的高，$\angle B$的平分线分别交AD、AC于E、F，过E作$EG\parallel BC$交AC于G.求证：

（1）$AE=AF$；　　（2）$AF=CG$.

3．分别以锐角$\triangle ABC$的边AB、AC为边向外作正方形$BAED$、$ACFG$，这两个正方形的中心分别为M、N，BC、EG的中点分别为L、K，求证：$KMLN$是正方形.

4．在梯形$ABCD$中，$AB\parallel CD(AB>CD)$，E、F分别为AB、CD的中点，如果$\angle A+\angle B=90^{\circ}$，求证：

$EF=\frac{1}{2}(AB-CD)$.

5．求证：等边三角形内任意一点到三边距离之和为定值.

6．过$\triangle ABC$的顶点A、B、C以及重心G作四条平行线分别交形外某一直线于A'、B'、C'、G'，求证：
$AA'+BB'+CC'=3GG'$.

7．梯形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，对角线AC、BD的中点分别为M、N，求证：$MN=\frac{1}{2}(AB-CD)$.

8．过直角$\triangle ABC$斜边BC的中点D作斜边的垂线交AC于F，交BA的延长线于E，求证：$DE\cdot DF=DA^2$.

9．直角$\triangle ABC$中，斜边BC上的高AD与角B的平分线BE相交于F，求证：$DF\cdot EC=AE^2$.

10．M为直角$\triangle ABC$斜边上高AD的中点，连BM交AC于P，过P作BC的垂线交BC于Q.求证：

$PQ^2 = AP \cdot PC$.

11．过平行四边形$ABCD$的顶点A作一直线交对角线BD于E，交边BC于F，交边DC的延长线于G.求证：$EA^2 = EF \cdot EG$.

12．过$\triangle ABC$边AC上一点D作直线交AB于F，交CB的延长线于E，如果$AD = BE$，求证：

$$\frac{EF}{FD} = \frac{AC}{BC}.$$

13．过四边形$ABCD$（AB、DC不平行）的对角线交点O作AB的平行线分别交AD、BC以及DC的延长线于E、F、G.求证：$GO^2 = GE \cdot GF$.

14．四边形$ABCD$中，对角线AC、BD相交于E，若BD平分$\angle ABC$，且$BD^2 = AB \cdot BC$，求证：

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AD^2}{CD^2}.$$

15．D为$\triangle ABC$边BC上一点，F在BD上，H在DC上，过F、H作AD的平行线分别交AB、AC于E、G，$\frac{DF}{BD} = \frac{CH}{CD}$．求证：$AD = EF + GH$.

16．在$\triangle ABC$中，$AB = AC$.D、E、F分别在边BC、AB、AC上，且$\angle BDE = \angle CDF$，求证：$\triangle BDF$的面积$=\triangle CDE$的面积.

17．E、F分别为四边形$ABCD$的对角线AC、BD的中点，过E作BD的平行线，过F作AC的平行线，两平行线相交于P.AB、BC、CD、DA的中点分别为K、L、M、N，连PK、PL、PM、PN，将四边形$ABCD$分成四部分，求

证这四部分面积相等.

18. 已知M是直角$\triangle ABC$斜边BC的中点，P、Q分别在AB、AC上，且$PM\perp QM$，求证：$PQ^2=PB^2+QC^2$.

19. 已知直角三角形的两直角边为a、b，斜边上高为h，求证：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$.

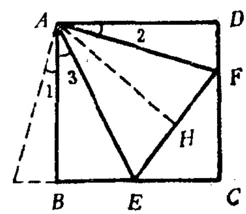
20. 求证：锐角三角形的垂心就是垂足三角形的内心.

21. $\triangle ABC$中，$AB=AC$，BD是$\angle ABC$的平分线．如果$BD+AD=BC$，求证：$\angle A=100^\circ$.

解　　答

1. E、F分别是正方形$ABCD$的边BC、CD上的点，且$\angle EAF=45^\circ$．求证：A到EF的距离等于正方形的边长.

〔证明〕 过A作$AH\perp EF$，垂足为H，则AH为A到EF的距离.



（1题图）

延长CB到G，使$BG=DF$，连AG，则

直角$\triangle AGB\cong$直角$\triangle AFD$.

$\therefore$ $AG=AF$，$\angle 1=\angle 2$.

在$\triangle AGE$与$\triangle AFE$中，

$\because$ $AG=AF$.

$\angle GAE=\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

$=\angle FAE$，而AE为公共边，

$\therefore$ $\triangle AGE\cong\triangle AFE$,

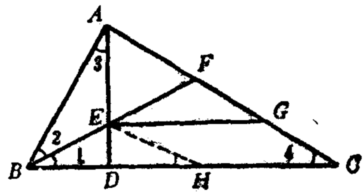
$\therefore$ $AB=AH$.

2. AD是直角三角形ABC斜边BC上的高，$\angle B$的平分

线分别交AD、AC于E、F，过E作$EG /\!/ BC$交AC于G. 求证：

(1) $AE=AF$；

(2) $AF=CG$.



(2题图)

〔证明〕 (1)如图，

$\angle AEF=\angle 2+\angle 3$,

$\angle AFE=\angle 1+\angle 4$.

而$\angle 1=\angle 2$,

$\angle 3=90^\circ-\angle ABC=\angle 4$,

$\therefore \angle AEF=\angle AFE$,

于是$AE=AF$.

(2) 过E作$EH /\!/ AC$交BC于H，则$\angle EHD=\angle 4$.

$\because \quad EG /\!/ BC$,

$\therefore$ 四边形$CGEH$是平行四边形，

$\therefore \quad CG=EH$.

在$\triangle BEH$与$\triangle BEA$中，

$\because \quad \angle 1=\angle 2$，$\angle EHD=\angle 4=\angle 3$，$BE$是公共边，

$\therefore \quad \triangle BEH \cong \triangle BEA$.

$\therefore \quad AE=HE$.

而 $AF=AE$, $CG=HE$,

$\therefore \quad AF=CG$.

3. 分别以锐角$\triangle ABC$的边AB、AC为边向外作正方形$BAED$、$ACFG$，这两个正方形的中心分别为M、N，BC、EG的中点分别为L、K，求证：$KMLN$是正方形.

〔证明〕 连BG、CE交于O.

在$\triangle ABG$与$\triangle AEC$中，

$\because \quad AB = AE,$

$AG = AC,$

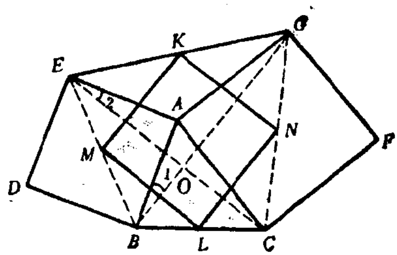
$\angle BAG = \angle BAC + 90^\circ$

$= \angle EAC,$

$\therefore \quad \triangle ABG \cong \triangle AEC.$

于是 $BG = CE,$

$\angle 1 = \angle 2.$



（3题图）

$\therefore$ A、O、B、E四点共圆.

$\therefore$ $\angle BOE = \angle BAE = 90^\circ$； 即 $BG \perp CE$.

因为M、N分别为正方形$BAED$和$ACFG$的中心，所以，连BE、CG必分别过M、N，且被M、N平分.

又$\because$ K、L分别是GE、BC的中点，

$\therefore$ $ML \parallel EC \parallel KN$，且$ML = \frac{1}{2}EC = KN$.

$\therefore$ 四边形$KMLN$是平行四边形.

而 $LN \parallel BG$， $BG \perp CE$， $\therefore$ $LN \perp KN$.

又$\because$ $LN = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}CE = KN$，

$\therefore$ 四边形$KMLN$是正方形.

4. 在梯形$ABCD$中，$AB \parallel CD$($AB > CD$)，E、F分别为AB、CD的中点，如果$\angle A + \angle B = 90^\circ$，求证：

$EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$.

〔证明〕 过F作$FH \parallel BC$，$FG \parallel AD$，则$AGFD$、$HBCF$都是平行四边形.

$\therefore\quad AG=DF,$

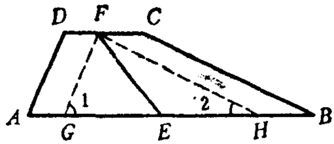
$HB=FC.$

$\therefore\quad AG=HB,$

于是$GE=EH$.

$\because\quad \angle 1=\angle A,$

$\angle 2=\angle B,$



（4题图）

$\therefore\quad \angle 1+\angle 2=\angle A+\angle B=90^\circ.$

于是GHF为直角三角形，FE为斜边GH上的中线．

$$\text{故}\quad EF=\frac{1}{2}GH=\frac{1}{2}[AB-(AG+HB)]$$

$$=\frac{1}{2}[AB-(DF+FC)]=\frac{1}{2}(AB-CD)$$

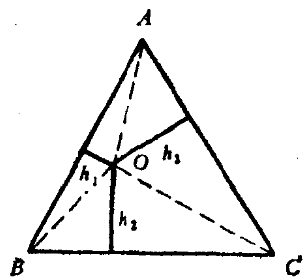
5．求证：等边三角形内任意一点到三边距离之和为定值．

〔证明〕 如图，设等边三角形ABC内任意一点O到三边AB、BC、CA的距离分别为h_1、h_2、h_3，等边三角形ABC的高为h．连OA、OB、OC，则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COA},$$

即 $\frac{1}{2}h\cdot AB$

$=\frac{1}{2}h_1\cdot AB+\frac{1}{2}h_2\cdot BC+\frac{1}{2}h_3\cdot CA.$



（5题图）

$\because\quad AB=BC=CA,$

$\therefore\quad h_1+h_2+h_3=h$（定值）.

6．过$\triangle ABC$的顶点A、B、C以及重心G作四条平行线分别交某一直线于A'、B'、C'、G'，求证：$AA'+BB'+CC'=3GG'$.

〔证明〕 连CG交AB于D.过D作$DD'\parallel AA'$，交直线$A'B'$于D'.

$\because$ G为重心，$\therefore D$为AB中点，于是DD'为梯形$AA'B'B$的中位线.

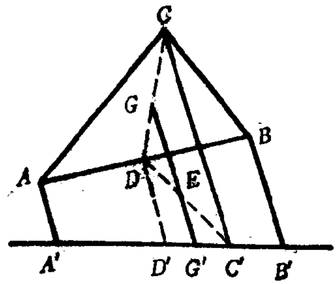
$\therefore$ $DD'=\frac{1}{2}(AA'+BB')$.

连DC'，交GG'于E.

$\because$ $DG:DC=1:3$,

$\therefore$ $GE:CC'=1:3$,

即 $GE=\frac{1}{3}CC'$.



(6题图)

而 $G'E:DD'=C'E:C'D=2:3$,

$\therefore$ $G'E=\frac{2}{3}DD'$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad 3GG' &= 3(GE+G'E)\\ &= CC'+2DD'\\ &= CC'+BB'+AA'.\end{aligned}$$

7．梯形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，对角线AC、BD的中点分别为M、N，求证$MN=\frac{1}{2}(AB-CD)$.

〔证明〕 连DM交AB于E

则 $\triangle AEM\cong\triangle CDM$.

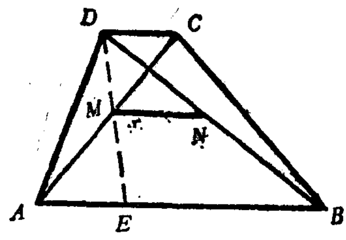
$\therefore\quad AE = CD.$

在$\triangle DEB$中，M、N是DE、DB的中点，

$\therefore\quad MN = \frac{1}{2}BE$

$= \frac{1}{2}(AB - AE)$

$= \frac{1}{2}(AB - CD).$



(7题图)

8. 过直角$\triangle ABC$斜边BC的中点D作斜边的垂线交AC于F，交BA的延长线于E，求证：$DE \cdot DF = DA^2$.

〔证明〕 $\because$ AD是直角三角形ABC斜边上的中线，

$\therefore\quad \angle 2 = \angle 3.$

而$\angle 3$、$\angle 4$都是$\angle B$的余角，

$\therefore\quad \angle 3 = \angle 4.$

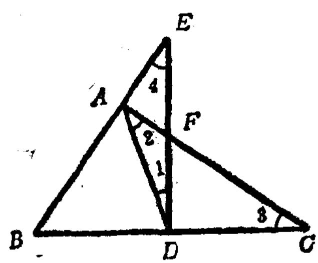
$\therefore\quad \angle 2 = \angle 4.$

又$\because$ $\angle 1$是$\triangle DAF$与$\triangle DEA$的公共角，

$\therefore\quad \triangle DAF \backsim \triangle DEA,$

$\therefore\quad \frac{DA}{DF} = \frac{DE}{DA},$

即 $\quad DA^2 = DE \cdot DF.$



(8题图)

9. 直角$\triangle ABC$中，斜边BC上的高AD与角B的平分线BE相交于F，求证：$DF \cdot EC = AE^2$.

〔证明〕 $\because$ BE是$\angle ABD$的平分线，

$\therefore\quad \angle 1 = \angle 2.$

又 ∵ $\angle BAD$、$\angle C$都是$\angle DAC$的余角，

∴ $\angle BAD=\angle C$.

∴ $\angle 3=\angle 1+\angle BAD$

$=\angle 2+\angle C=\angle 4$.

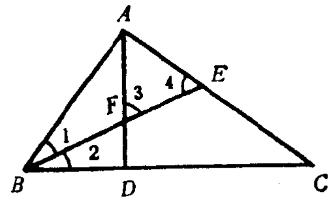
∴ $AF=AE$.

在$\triangle ABD$、$\triangle ABC$中，

∵ BE平分$\angle ABC$，

∴ $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AF}{FD}$, (1)

$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AE}{EC}$, (2)



（9题图）

(1)×(2)得 $\dfrac{AB^2}{BD\cdot BC}=\dfrac{AF\cdot AE}{FD\cdot EC}=\dfrac{AE^2}{DF\cdot EC}$.

∵ 直角$\triangle ABC$中， $AD\perp BC$，

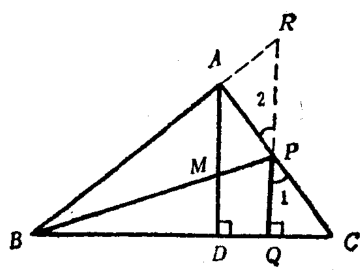
∴ $AB^2=BD\cdot BC$，

∴ $\dfrac{AE^2}{DF\cdot EC}=1$，

即 $DF\cdot EC=AE^2$.

10. M为直角$\triangle ABC$斜边上高AD的中点，连BM交AC于P，过P作BC的垂线交BC于Q，求证：$PQ^2=AP\cdot PC$.

〔证明〕 延长QP交BA的延长线于R.



（10题图）

∵ $AD\parallel RQ$，且M是

AD的中点，

$\therefore \quad PQ = PR$.

$\because \quad \angle 1 = \angle 2$, （对顶角）

$\therefore$ 直角$\triangle QPC \backsim$直角$\triangle APR$.

$$\therefore \quad \frac{PQ}{PA} = \frac{PC}{PR}.$$

即 $$PQ \cdot PR = PA \cdot PC.$$

而 $PQ = PR$, $\quad \therefore \quad PQ^2 = AP \cdot PC$.

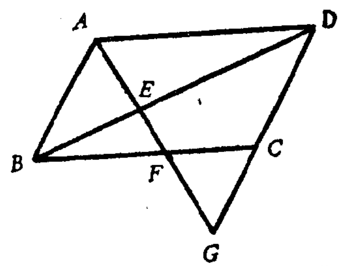
11．过平行四边形$ABCD$的顶点A作一直线交对角线BD于E，交边BC于F，交边DC的延长线于G．求证：$EA^2 = EF \cdot EG$.

〔证明〕 $\because AD \parallel BF$,

$\therefore \quad \triangle ADE \backsim \triangle FBE$,

$\therefore \quad \dfrac{AE}{EF} = \dfrac{DE}{EB}$. （1）

同理 $\dfrac{AE}{EG} = \dfrac{BE}{ED}$ （2）



（1）×（2）得 $\dfrac{AE^2}{EF \cdot EG} = 1$, （11题图）

$$\therefore \quad AE^2 = EF \cdot EG.$$

12．过$\triangle ABC$边AC上一点D作直线交AB于F，交CB的延长线于E，如果$AD = BE$，求证：$\dfrac{EF}{FD} = \dfrac{AC}{BC}$.

〔证明〕 过D作$DG \parallel AB$交BC于G.

在$\triangle ABC$中，$\because \quad DG \parallel AB$,

$$\therefore \quad \frac{AD}{BG} = \frac{AC}{BC}. \qquad (1)$$