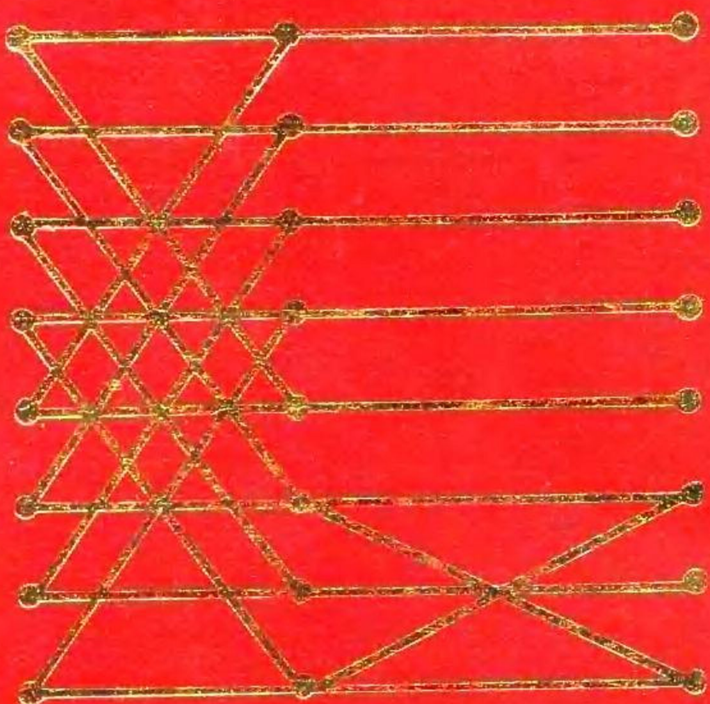
数字谱方法的理论与应用

张公礼　潘曼玲　著



国防工业出版社

数字谱方法的理论与应用

张公礼　潘爱玲　著

国防工业出版社

（京）新登字106号

内容简介

数字谱方法又称数字傅里叶谐波分析，它是傅里叶变换理论与应用的推广和发展。本书总结和概括了作者近几年来从事谱方法研究的主要成果，它内容丰富，富有创新，基本理论阐述清楚，数学运算严谨简炼，其中包括了称之为张-哈特莱变换及尚属首次发表的关于正弦类变换和哈尔型变换等的重要论述，并系统地介绍了各种类型的各种变换形式及其快速算法等，具有广阔的应用领域。

全书共五章，分别是：第一章正弦类变换与哈特莱变换；第二章随机信号处理中的正交变换技术；第三章沃尔什类型的变换与序率理论；第四章哈尔类型变换与离散变换的代数基础；第五章数字逻辑中的谱方法。

本书对于从事通信、雷达、计算机和信息传输、信号处理及应用数学、应用物理等领域工作的科技人员，以及高等院校师生是一本很有裨益的重要参考书。

数字谱方法的理论与应用

张公礼　潘爱玲　著

责任编辑　林秀权

*

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码 100044）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168毫米　32开本　印张$10^1/_8$　插页2　260千字

1992年12月第一版　1992年12月第一次印刷　印数：0001—1,500册

ISBN 7-118-01003-0/TN·167　定价：11.20元

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，国防科工委于1988年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是：

1. 学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖，内容明确、具体、有突出创见，对国防科技发展具有较大推动作用的专著；密切结合科学技术现代化和国防现代化需要的高科技内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合科学技术现代化和国防现代化需要的新技术、新工艺内容的科技图书。

4. 填补目前我国科学技术领域空白的薄弱学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展评审工作，职责是：负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下，国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技

图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版，随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金
评审委员会

序　言

自从 1822 年 J．B．J．傅里叶提出傅里叶变换以来，傅里叶变换的理论与应用一直不断地丰富和发展着，谱方法就是近年来傅里叶变换推广与发展的新领域。早期，人们主要应用连续傅里叶变换分析和综合模拟信号与系统。60 年代中期发现了快速傅里叶变换（FFT）算法，使离散傅里叶变换（DFT）成为分析、综合离散信号与系统的主要工具，这导致了数字信号处理作为一门专门学科迅速地成熟起来。60 年代后期和 70 年代初期，沃尔什-傅里叶变换的理论研究取得了明显的进展。由于沃尔什变换也具有同 FFT 相类似的快速算法，沃尔什函数在通信、图象处理、语声处理、雷达等领域中的应用受到人们的重视。沃尔什变换的应用，启发人们去寻找具有快速算法的其他变换形式，这就构成了傅里叶变换发展的一个新方向。这方面比较成功的例子是 1975 年发现的离散余弦变换（DCT）和 1942 年提出、80 年代初期又重新受到人们重视的哈特莱变换。研究结果表明，余弦变换的性能比 DFT 更接近一阶马尔可夫过程的最佳变换（K-L 变换），而离散哈特莱变换是实值变换，它比 FFT 的计算速度更快。

随着其他正交变换形式的提出与发展，正交变换的应用领域也逐步扩展到传统上与正交变换无缘的领域，其中最重要的是数字逻辑电路的分析与综合。长期以来，布尔代数（或多值逻辑代数）是数字逻辑电路分析设计的主要工具。大家知道，逻辑函数系统的最小化、时序自动机的状态赋值和逻辑网络检测集的产生是计算机硬件设计中的基本问题，这三个问题都属于 NP 完全问题。而代数优化方法的工作量通常以指数形式随变量的个数增加而增加。随着电路集成度的增加，特别对于超大规模集成电路

(VLSI)，这些问题的解决将变得更加困难。

70 年代初期，人们注意到谱方法是解决这类问题的另外一种途径，其基本思想是：首先对逻辑函数进行正交变换，然后在谱域（即变换域）研究逻辑网络的分析、综合和检测等问题。事实证明，许多问题在原来的逻辑域直接解决很困难，但在谱域解决却非常容易。同布尔代数方法相比，谱方法不需要穷举各种可能面后进行选择，它是解析的，便于使用计算机处理。这一新途径称为数字逻辑中的谱方法。

对于正交变换和正交函数的研究，导致了一种正交函数的新的分类方法，即将所有的正交函数系分为二类：一类为取值连续的正交函数系，这类函数包括三角函数系、指数函数系、拉格朗日多项式和切比雪夫多项式等；另一类为二值或多值正交函数系，简称 p 值（$p>1$，整数）正交函数系，它们的函数值只能是 p 个离散值之一，如沃尔什函数、哈尔函数、奎斯特恩逊函数等。所有的有限离散正交变换，包括 DFT、DCT 等，它们的变换核函数都属于 p 值正交函数系。我们把研究 p 值正交函数系、p 值正交变换及其在随机信号处理、数字逻辑、故障检测等领域中应用的课题称为数字傅里叶谐波分析，或简称数字谱方法。

谱方法不是一种简单的正交变换的数学处理方法，它强调谱的工程意义。例如，在信号处理与信息传输中，谱系数反映了信号的序率（与傅里叶分析中的频率相对应）分布特性；在数字逻辑中，谱系数反映了逻辑函数同线性函数的相关特性。因此，在谱方法的研究中，谱系数的物理意义、谱系数提供的关于函数本身的信息是工程人员最感兴趣的问题，因为正是这些信息为分析和解决某些问题提供了方便。

谱方法的主要研究方向有：寻找新的变换或推广已知的变换，以便使变换更适合于解决所关心领域的问题；研究更为有效的快速算法，以便将变换方法应用于工程实际；研究如何运用谱系数解决实际问题；开拓正交变换应用的新领域；研究 p 值正交函数的逻辑导数及其应用；研究新变换或广义变换在信号处理、通信

和自动控制中的应用，尽管在这些领域，傅里叶、拉普拉斯和 z 变换是传统的变换工具。

近年来，我们一直从事谱方法的研究工作，其主要工作归纳如下：

1．正弦类变换的研究。离散余弦变换、正弦变换已在图象处理、数据压缩等领域得到广泛的应用。但是，这些变换是如何导出的？是否还有其他类似的变换？它们的关系如何？这些问题都需要在理论上进一步研究。我们首先构造了一种有限离散三角级数，它具有类似于傅里叶三角级数的性质。利用离散三角级数和函数的对称性，导出了包括余弦变换、正弦变换等已知的变换形式在内的 28 种正弦类变换，其中 14 种是新的变换形式。我们研究了这些变换的快速算法，分析了它们的性能。结果表明，每一种正弦类变换在一定条件下都显示出某种优势。我们相信，离散三角级数、正弦类变换以及它们的快速算法和应用的研究将丰富和发展离散傅里叶变换理论。

2．哈特莱型变换的研究。利用奎斯特恩逊函数和沃特利函数导出了两种实多值完备正交函数系，其中一种函数系构成的正交变换，目前在国外一些文献中称为“张-哈特莱变换”。利用张-哈特莱变换可以方便地计算一个实函数的奎斯特恩逊功率谱，以及两个实函数的并元卷积和并元相关。这两种函数还可以用于 p 并元序率滤波和多值逻辑网络综合。我们高兴地看到，国际上已发表了一些关于张-哈特莱变换的快速算法和应用的论文。

3．序率理论基础的研究。序率是沃尔什分析中的基本概念，它与傅里叶分析中的频率概念相对应。但是，以“零交点数之半”定义的序率不适合于奎斯特恩逊函数系，而沃尔什函数是奎斯特恩逊函数的特例。因此，对序率本身的含义作进一步研究是必要的。我们首先提出了序率的一种物理解释，然后根据这种解释给出了 p-Ary 序率的定义。以此为基础，解决了奎斯特恩逊函数系以及其他一些 p 值正交函数系的排序问题。

4．多值逻辑谱方法的研究。国际上，二值逻辑谱方法的研

究工作已经取得了明显的进展（参见本书第五章参考文献〔2.3〕）。但是，在多值逻辑系统，过去的文献主要采用奎斯特恩逊变换。由于奎斯特恩逊函数是复数，多值逻辑函数的奎斯特恩逊变换必须在复数域中进行，得到的谱也是复数。我们知道，逻辑函数本身的数值非常简单，但是变换的计算和得到的谱却很复杂。另外，二值逻辑函数的沃尔什谱反映了逻辑函数同线性函数的相关程度，而多值逻辑函数的奎斯特恩逊谱不具有这种明确的含义。为此，我们提出了一种 p 值逻辑域中的奎斯特恩逊变换和一种并元多项式变换。这两种变换计算简单，避开了复数运算，而且得到的逻辑函数的矢量谱具有明确的含义。以此为基础，我们导出了 7 种谱域基本运算性质，讨论了如何利用矢量谱解决多值逻辑函数分类、阈门逻辑，以及多值逻辑网络分析与综合问题。

5. 离散正交变换的代数基础的研究。利用近世代数和群论中的基本概念，研究了定义在有限阿贝尔群上值域为含单位元交换环的函数空间中的正交变换问题。根据定义域和值域的代数结构，函数空间可分为 12 种类型。根据正交函数本身的结构形式，正交变换可分为正弦类型、沃尔什类型、哈尔类型以及哈特莱类型等。研究了各种类型正交变换的基本性质和构造方式，给出了一个完整的正交变换系统表。这个表不仅清楚地揭示了各种正交变换之间的相互关系，而且预示了一些新变换形式的存在，以及它们的某些应用领域。我们提出的 p 并元多项式变换就是根据这个系统表构造出来的。

6. 我们在哈尔型变换及其应用、多进制代码、广义变换以及逻辑导数等领域的研究也取得了某些进展。

本书主要概括和总结了作者近年来从事谱方法研究的工作。第一章讨论了离散三角级数、正弦类变换与哈特莱变换的基本形式及其快速算法。第二章着重分析了正弦类变换在随机信号处理中的性能。第三、四章论述了定义在并元加群上的正交变换，以及序率理论和离散变换代数基础。第五章主要讨论了多值逻辑中的谱方法。由于二值逻辑是多值逻辑的特殊情况，本章的结果完

全适合于二值逻辑系统。本书中的某些内容，如正弦类变换、哈尔型变换的新形式等是第一次发表。限于篇幅，我们没有更多地介绍国内外有关专家的重要贡献，有兴趣的读者可参阅每章后的参考文献。

在谱方法领域还有更多的课题有待研究和探讨，我们的工作是初步的，错误之处也在所难免。如果读者读了本书，产生了许多问题，并研究这些问题取得某些结果，那么，本书就达到了它的目的——抛砖引玉。

我们的研究工作是在国家自然科学基金资助下进行的，我们也得到了德国研究联合会(DFG)、大众汽车公司基金(Volskwagen Foundation）的部分资助。

我们特别感谢德国多特蒙德大学的莫拉格（C. Moraga）教授，他同我们多年来的合作，有力地促进了谱方法的研究工作。本书关于正弦类变换的主要研究结果就是作者1989年到德国同莫拉格教授合作研究时取得的。我们还要感谢西安电子科技大学的樊昌信教授、北京航空航天大学的张其善教授、北京联合大学的刘心平教授等对我们研究工作的支持，感谢国家教委外事局欧洲处以及作者所在单位杭州电子工业学院对我们国际合作的支持。本书得以顺利出版，特别要感谢国防科技图书出版基金评审委员会有关专家及国防工业出版社的大力支持。

著　者

1991年7月

目　录

第一章　正弦类变换与哈特莱变换

正弦类变换与哈特莱（Hartley）变换都属于正交变换类型。要讨论正交变换，应首先明确是在哪一个函数（或矢量）空间中的正交变换。不同的函数空间就有不同类型的正交变换，当然，同一个函数空间可以有各种形式的正交变换。

一个实数或复数序列 $f(n)$，$n=0, 1, \cdots, N-1$，可以看成是定义在集合 $J_N=\{0, 1, \cdots, N-1\}$ 上的函数。所有定义在 J_N 上的复值函数对于普通的加法和乘法（数乘）构成了一个 N 维矢量空间，它的内积定义为

$$(f_1, f_2)=\sum_{n=0}^{N-1} f_1(n)\overline{f_2(n)} \tag{1.1}$$

其中 $\overline{f_2(n)}$ 为 $f_2(n)$ 的复共轭函数。我们知道，离散傅里叶变换（DFT）、哈特莱变换（DHT）以及余弦变换（DCT）、正弦变换（DST）都是这个函数空间中的正交变换。本章将要讨论的正弦类变换也属于这个函数空间，DCT 和 DST 是正弦类变换各种形式中的两种。我们知道，J_N 对于模 N 加法构成一个有限阿贝尔群，称为剩余类加群，记为 Z_N。显然，Z_N 也是一个有限循环群。这样，上面所说的函数空间就是由定义在剩余类加群 Z_N 上的值域为复数域的函数构成的空间。定义在 Z_N 上的函数，如果它们的值域为模 M 整数剩余类环 Z_M，则相应的函数集合对于模 M 加法和乘法构成了另外一个 N 维矢量空间。数论变换(NT)就是这个矢量空间中的正交变换。同样，定义在 Z_N 上而值域为模 $M(z)$ 多项式环的函数集合，对于模 $M(z)$ 多项式加法和乘法也构成一个 N 维矢量空间。在这个空间中的一个重要正交变换类型是多项式变换（PT）。现在，将定义在 Z_N 上的几种正交变换列入表 1-1 中。

表1-1 定义在Z_N上的函数空间中的正交变换

函数值域 / 变换类型 / 函数定义域	复数域	模M整数剩余类环Z_M	模$M(Z)$多项式环
$J_N=Z_N$	DFT DHT DCT DST	NT	PT

本章主要讨论定义在剩余类加群 Z_N 上的函数空间中的正交变换。由于许多信号处理教科书[1]已经详细讨论了 DFT 的理论，关于 NT 和 PT 的专著[2,3]也已有出版，本章的重点在于导出正弦类变换系的各种变换形式，并对 DHT 的变换形式作进一步讨论。

§1.1 离散三角级数

在模拟信号的傅里叶分析理论中，任一周期为 1 的实平方可积函数 $f(t)$ 都可展开为傅里叶级数形式

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2\pi kt+b_k\sin 2\pi kt) \tag{1.2}$$

其中

$$a_k=2\int_0^1 f(t)\cos 2\pi kt\,\mathrm{d}t$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$$b_k=2\int_0^1 f(t)\sin 2\pi kt\,\mathrm{d}t$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots$$

(1.2) 式又称为 $f(t)$ 的三角级数展开式，它的复数形式为

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{j2\pi kt} \tag{1.3}$$

其中

$$c_k = \int_0^1 f(t) e^{-j2\pi kt} dt$$

$$j = \sqrt{-1}$$

同样，一个实的有限长序列 $f(n)$，$n = 0, 1, \cdots, N-1$，可以展开为离散傅里叶级数

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j2\pi kn/N} \tag{1.4}$$

其中

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

容易看出，(1.4) 式和 (1.3) 式具有一种相类似的关系，那么，$f(n)$ 是否也存在着一种离散三角级数展开式，它与 (1.2) 式相类似，它的复数形式是 (1.4) 式？这就是本节要解决的问题。

§1.1.1 定义域的划分

一个复数或实数序列 $f(n)$，$n = 0, 1, \cdots, N-1$，可以看成是定义在剩余类加群 Z_N 上的函数。我们用 $\oplus$ 表示 Z_N 中的模 N 加法，n' 表示 Z_N 中元素 n 的负元，即

$$n' \oplus n = 0$$

现在将 Z_N 中的 N 个元素分为三类

$$D = \{n \mid n = n', \ n \in Z_N\} \tag{1.5}$$

$$D^+ = \{n \mid n < n', \ n \in Z_N\} \tag{1.6}$$

$$D^- = \{n \mid n > n', \ n \in Z_N\} \tag{1.7}$$

根据上面的分类，当 N 为奇数时，$D = \{0\}$，$D^+ = \{1, 2, \cdots, (N-1)/2\}$，$D^- = \{[(N-1)/2]+1, [(N-1)/2]+2, \cdots, N-1\}$，如果用 $|D|$ 表示集合 D 中元素的个数，则 $|D| = 1$，$|D^+| = |D^-| = (N-1)/2$；当 N 为偶数时，$D = \{0, N/2\}$，$D^+ = \{1, 2, \cdots, N/2-1\}$，$D^- = \{N/2+1, N/2+2, \cdots, N-1\}$，且 $|D| = 2$，