統計導論問題詳解

赫尔·波特等　原著
谢　叔　容　　译著

曉　園　出　版　社
世界图书出版公司

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則激底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

统计导论问题详解
赫尔，波特等　原著
谢叔容　译著
*
晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司重印
北京朝阳门内大街 137 号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1995 年 6 月第　一　版　　开本：850×1168　1/32
1995 年 6 月第一次印刷　　印张：5.5
印数：0001—450　　字数：14万字
ISBN：7-5062-1769-4/O·120
定价：7.50 元　(WB9312/4)

Hoel 統計導論問題詳解

（目　　錄）

第一章　基本原理

1.　已知$f(x\mid\theta)=\dfrac{e^{-(1/2)(x-\theta)^2}}{\sqrt{2\pi}}$，且$\mathcal{L}(\theta,a)=(a-\theta)^2$，並設已取一$x$的單一觀察值。若取$d$爲函數$d(x)=cx$，$c$爲常數，求$\mathcal{R}(\theta,d)$之值。

解　$$R(\theta,d)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(x-\theta)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}(cx-\theta)^2dx \qquad x\sim N(\theta,1)$$
$$=E[(cx-\theta)^2] \qquad E(x-\theta)=0$$
$$=c^2E(x^2)-2c\theta E(x)+\theta^2 \qquad E(x-\theta)^2=1$$
$$=c^2(1+\theta^2)-2c\theta^2+\theta^2$$
$$=(c^2-2c+1)\theta^2+c^2$$
$$=(c-1)^2\theta^2+c^2$$

2.　對習題1，在函數$d(x)=cx$群中是否有一最大最小決策函數？

解　由上題

$R(\theta,d)=c^2+(c-1)^2\cdot\theta^2$

若　$c=1$

$R(\theta,d)=1$

若　$c\neq1$

$R(\theta,d)$爲θ之二次函數

$R'(\theta,d)=2(c-1)^2\cdot\theta$

當　$\theta>0$

$R'(\theta,d)>0$

$\Rightarrow$　$\theta\to\infty$

$R(\theta,d)\to\infty$

$\therefore$　$c=1$

即　$d(x)=x$

爲一最大最小決策函數

3. 已知$f(x\mid\theta)=\binom{2}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{2-x}$，$x=0$，$1$，$2$，$0<\theta<1$，且

$\mathcal{L}(\theta, a)=(a-\theta)^2$。

(a)對 $d(x)=\dfrac{x}{2}$，求$\mathcal{R}(\theta, d)$

(b)對 $d(x)=\dfrac{(x+1)}{4}$，求$\mathcal{R}(\theta, d)$

(c)對上述二函數，何者爲最大最小函數？

(d)是否一決策函數優於另一函數？

解 (a) 由定義 1

$$\mathcal{R}(\theta, d)=E_\theta[\mathcal{L}(\theta, d)]=E\left(\frac{x}{2}-\theta\right)^2$$

$x=0$, $f(0)=(1-\theta)^2$

$x=1$, $f(1)=2\theta(1-\theta)$

$x=2$, $f(2)=\theta^2$

$$E\left(\frac{x}{2}-\theta\right)^2$$

$$=\theta^2(1-\theta)^2+\left(\frac{1}{2}-\theta\right)^2[2\theta(1-\theta)]+(1-\theta)^2\theta^2$$

$$=[\theta^2-2\theta^3+\theta^4]+\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^2}{2}-2\theta^2+2\theta^3+2\theta^3-2\theta^4\right]$$

$$+[\theta^2-2\theta^3+\theta^4]$$

$$=\frac{\theta}{2}(1-\theta)$$

(b) $\mathcal{R}(\theta, d)$

$$=E_\theta\left(\frac{x+1}{4}-\theta\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\theta\right)^2(1-\theta)^2+\left(\frac{1}{2}-\theta\right)^2[2\theta(1-\theta)]+\left(\frac{3}{4}-\theta\right)^2\theta^2$$

$$=\left(\frac{1}{16}-\frac{\theta}{8}+\frac{\theta^2}{16}-\frac{\theta}{2}+\theta^2-\frac{\theta^3}{2}+\theta^2\quad 2\theta^3+\theta^4\right)$$

$$+\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^2}{2}-2\theta^2+4\theta^3-2\theta^4\right)+\left(\frac{9}{16}\theta^2-\frac{3}{2}\theta^3+\theta^4\right)$$

$$=\frac{1}{16}(2\theta^2-2\theta+1)$$

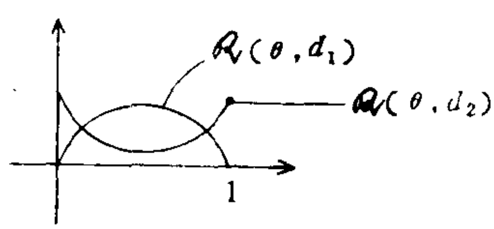
(c) $\max\limits_{0<\theta<1}\left\{\frac{\theta}{2}(1-\theta)\right\}=\frac{1}{8}$

$\max\limits_{0<\theta<1}\left\{\frac{1}{16}(2\theta^2-2\theta+1)\right\}=\frac{1}{16}$

所以由定義 2 可得　$d(x)=\dfrac{x+1}{4}$

爲最大最小決策函數

(d)



並沒有一個決策函數會優於另一個

4. 已知事前密度 $\pi(\theta)=\frac{1}{2}$，$-1<\theta<1$

(a)求習題 1 之平均風險。

(b)對此一事前分配，求得一貝氏解的 c 值。

解 (a) $r(\pi, d)=\int R(\theta, d)\pi(\theta)d\theta$

$$=\int_{-1}^{1}[c^2+(c-1)^2\theta^2]\cdot\frac{1}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[c^2\cdot\theta\Big|_{-1}^{1}+(c-1)^2\left(\frac{\theta^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2c^2+(c-1)^2\frac{2}{3}\right]$$

$$=\frac{(4c^2-2c+1)}{3}$$

(b) $r'(\pi, d)=\frac{8}{3}c-\frac{2}{3}=0$

$\therefore \quad c=\frac{1}{4}$

5. 已知 $f(x\mid\theta)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$，$x=0, 1, \cdots\cdots, n$，$0<\theta<1$，且 $\mathcal{L}(\theta, a)=(a-\theta)^2$。

(a)對 $d(x)=\frac{x}{n}$，求 $\mathcal{R}(\theta, d)$。

(b)已知 $\pi(\theta)=1$，$0<\theta<1$，對 $d(x)=\frac{x}{n}$，求 $r(\pi, d)$。

解 (a) $X\sim B(n, \theta)$

$\Rightarrow \quad Ex=n\theta$

$\quad V(x)=n\theta(1-\theta)$

$$\mathcal{R}(\theta, d)=E_\theta[(\frac{x}{n}-\theta)^2]$$

$$=E_\theta(\frac{x^2}{n^2}-\frac{2\theta}{n}x+\theta^2)$$

$$=E_\theta[\frac{1}{n^2}(x-n\theta)^2]$$

$$=\frac{1}{n^2}E[(x-n\theta)^2]$$

$$=\frac{1}{n^2}V(x)$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\theta(1-\theta)$$

$$=\frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

(b) $r(\pi, d)=E[\mathcal{R}(\theta, d)]$

$$=\int_0^1 R(\theta, d)\cdot 1\cdot d\theta$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1 \theta(1-\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{6n}$$

6. 若$\mathcal{L}(\theta, a)=\dfrac{(a-\theta)^2}{\theta(1-\theta)}$，求習題5。

解 (a) $\mathcal{R}(\theta, d)$

$$=\sum_{x=0}^{n}\mathcal{L}(\theta, d(x))\cdot f(x\mid\theta)$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\frac{(\frac{x}{n}-\theta)^2}{\theta(1-\theta)}\cdot\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}\qquad,\qquad 0<\theta<1$$

$$=\frac{1}{\theta(1-\theta)}\cdot\sum_{x=0}^{n}\left(\frac{x^2}{n^2}-2\cdot\frac{x}{n}\cdot\theta+\theta^2\right)\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$$

$$=\frac{1}{\theta(1-\theta)}E\left(\frac{x^2}{n^2}-\frac{2\theta}{n}x+\theta^2\right)$$

$$=\frac{1}{\theta(1-\theta)}\left[\theta^2+\frac{\theta(1-\theta)}{n}-2\theta^2+\theta^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}$$

$\because\quad X\sim B(n, \theta)$

$\therefore\quad E(X)=n\theta$

$\qquad E(X^2)=n^2\theta^2+n\theta(1-\theta)$

(b) $r(\pi, d)$

$$=\int\mathcal{R}(\theta, d)\cdot\pi(\theta)d\theta\qquad\qquad \pi(\theta)=1\ ,\ 0<\theta<1$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{n}\cdot 1\,d\theta$$

$$=\frac{1}{n}$$

7. 已知$f(x\mid\theta)=\dfrac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!}$，$x=0,1,\cdots$，$\theta>0$，且$\mathcal{L}(\theta,a)=(a-\theta)^2$。

(a)對$d(x)=x$，求$\mathcal{R}(\theta,d)$。

(b)已知伽瑪密度$\pi(\theta)=\dfrac{\lambda^{\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta}}{\Gamma(\alpha)}$，$\alpha>0$，$\lambda>0$，$\theta>0$，對$d(x)=x$，求$r(\pi,d)$。

解 $X\sim$參數θ的卜松分配

$\Rightarrow$ $EX=\theta$

$V(X)=\theta$

(a) $\mathcal{R}(\theta,d)=E_\theta[\mathcal{L}(\theta,d)]=E_\theta(x-\theta)^2=V(x)=\theta$

(b) $r(\pi,d)=E[\mathcal{R}(\theta,d)]$

$$=E(\theta)$$

$$=\int_0^\infty \theta\pi(\theta)d\theta$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^\infty \theta^{(\alpha+1)-1}e^{-\lambda\theta}d\theta\right)$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}\right]$$

$$=\frac{\alpha}{\lambda}$$

8. 已知一硬幣有偏，其正面出現的機率p不是$\dfrac{1}{4}$就是$\dfrac{3}{4}$。現在欲以此硬幣試行的二個出象爲基礎來對上述p之二值做決策。已知$\mathcal{L}(\theta,a)=(a-p)^2$。

(a)試就下列三個決策函數求$\mathcal{R}(\theta, d)$值，在此$d(X)$對每一X的可能值必須爲值$\frac{1}{4}$或$\frac{3}{4}$，而X爲此二次試行中所得之正面數。

X	$d_1(X)$	$d_1(X)$	$d_3(X)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(b)對此三個函數，何者爲最大最小決策函數？

解　(a)　$\mathcal{R}(\theta; d_i)=\mathcal{R}(p, d_i)$

$$=\sum_{x=0}^{2}[d_i(X)-p]^2\cdot\binom{3}{x}\cdot p^x(1-p)^{3-x}$$

$$\therefore\quad \mathcal{R}\left(\frac{1}{4}, d_1\right)=0$$

同理　$\mathcal{R}\left(\frac{3}{4}, d_1\right)=\frac{1}{4}$

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{4}, d_2\right)=\frac{1}{4}$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{3}{4}, d_2\right)=0$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{4}, d_3\right)=\frac{9}{64}$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{3}{4}, d_3\right)=\frac{15}{64}$$

(b)　d_3

$$\because\quad \max_{\theta}\mathcal{R}(\theta, d_1)=\max_{\theta}\mathcal{R}(\theta, d_2)=\frac{1}{4}$$

$$\max_{\theta} R(\theta，d_3)=\frac{15}{16}<\frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad d_3=\min_{d\in D}\ \max_{\theta}\mathcal{R}(\theta，d)$$

其中　$D=\{\ d_1\ ，d_2\ ，d_3\ \}$

9.　令$\theta=0$或1，且令$f(x\mid 0)=2^{-x}$，$x=1，2，\cdots$，$f(x\mid 1)=2^{-(x+1)}$，$x=0，1，\cdots$，而$\mathcal{L}(0，0)=\mathcal{L}(1，1)=0$，$\mathcal{L}(1，0)=\mathcal{L}(0，1)=1$。考慮下列二決策函數。

$$d_1(x)=\left\{\begin{matrix}1，x=0\\0，x\neq 0\end{matrix}\right\}\text{和}\quad d_2(x)=\left\{\begin{matrix}0，x\leq 1\\1，x>1\end{matrix}\right\}$$

對此二函數求$\mathcal{R}(\theta，d)$，並決定此二函數中，何者爲最大最小決策函數。

解　(a)　$\mathcal{R}(0，d_1(x))=E[\mathcal{L}(0，d_1(x))]$

$$=\alpha(0，0)-f(0\mid 0)+\mathcal{L}(0，1)f(1\mid 0)=0$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(1，d_1(x))\\&=E[\mathcal{L}(1，d_1(x))]\\&=\mathcal{L}(1，d_1(0))f(0\mid 1)+\mathcal{L}(1，d_1(1))f(1\mid 1)\\&\quad+\mathcal{L}(1，d_1(2))f(2\mid 1)+\cdots\cdots\cdots\\&=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}(0，d_2(x))=E[\mathcal{L}(0，d_2(x))]=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{R}(1，d_2(x))=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$$

(b)　由上知

$d_1(x)$　爲最大最小決策函數

第二章 推　　定

1. 已知$f(x\mid\theta)=\dfrac{e^{-x^2/2\theta}}{\sqrt{2\pi\theta}}$，證明$d(X)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$爲$\theta$之不偏推定量，在此$X_1$，……，$X_n$爲取自$f(x\mid\theta)$的一隨機樣本。

解　由定義1

$$E[d(X)]=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-0)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V(x_i)$$

$$=\frac{n\theta}{n}$$

$$=\theta$$

∴　$d(X)$爲θ的一個不偏推定量

且　$f\sim N(0,\theta)$

　X_1，X_2，……，X_n　爲隨機樣本

2. 已知$f(x\mid\theta)=\dfrac{1}{\theta}$，$0\leq x\leq\theta$，求$c$，使$d(X)=cX$爲$\theta$之一不偏推定量。

解　$E[d(X)]=\int_0^{\theta}d(x)\cdot f(x\mid\theta)dx$

$$=\int_0^{\theta}cx\cdot\frac{1}{\theta}dx$$

$$= \frac{c}{\theta} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^\theta$$

$$= \frac{c}{2}\theta$$

$$\frac{c}{2}\theta = \theta$$

$$\therefore \quad c = 2$$

3. 已知 $f(x \mid \theta) = \dfrac{x^{\theta-1} e^{-x}}{\Gamma(\theta)}$，$x > 0$，$\theta > 0$

(a)求 c 值，使 $d(X) = cX$ 爲 θ 之一不偏推定量。

(b)是否可能求一 c 值，使 $d(X) = cX^2$ 爲 θ 之一不偏推定量。

解 (a) $E[d(X)] = E(cX)$

$$= cEX$$

$$= c\int_0^\infty x \cdot \frac{x^{\theta-1} e^{-x}}{\Gamma(\theta)} dx \qquad x > 0, \theta > 0$$

$$= c\int_0^\infty \frac{x^{(\theta+1)-1} \cdot e^{-x}}{\Gamma(\theta)} d\theta$$

$$= \frac{c}{\Gamma(\theta)} \Gamma(\theta+1)$$

$$= \frac{c\,\theta\,\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta)}$$

$$= c\,\theta$$

依據定義 1

令 $c = 1$

則 $d(X)$ 爲 θ 的不偏推定量

(b) 事實上

$E[d(X)] = E(cX^2)$

$$= cEX^2$$

$$= \frac{c}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty x^{(\theta+2)-1} e^{-x} dx$$

$$=\frac{c}{\Gamma(\theta)}\cdot\Gamma(\theta+2)$$

$$=\frac{c(\theta+1)\theta\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta)}$$

$$=c\theta(1+\theta)$$

$\because\quad c\theta(1+\theta)=\theta$

θ 無解

$\therefore$ 不可能找到一數 c 使 $d(x)=cx^2$ 爲 θ 的不偏推定量

4. X_1，……，X_n 表X的一隨機樣本，試定a的條件，使$Z=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ 爲 EX的一個不偏推定量。

解 $E(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i)=EX$

$\because\quad E(X_i)=EX\qquad\qquad i=1,2,\cdots\cdots n$

$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot[E(X_i)]$

$=EX\cdot(\sum_{i=1}^{n}a_i)$

$=EX$

$\therefore\quad\sum_{i=1}^{n}a_i=1$

5. 若一推定量的偏量以 $b(\theta)$ 表示，且該推定量由關係 $Ed(X)=\theta+b(\theta)$ 所定義，試求最大最小推定量 $d'(X)=(X+\frac{\sqrt{n}}{2})(n+\sqrt{n})$ 的偏量（如圖１），在此X爲母數 n 和 p 的二項變數。

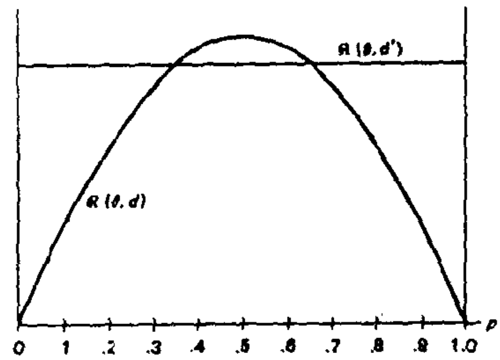


圖 1

解 $$Ed'(X)=E\left[\frac{\left(X+\frac{\sqrt{n}}{2}\right)}{(n+\sqrt{n})}\right]$$

$$=\frac{1}{n+\sqrt{n}}EX+\frac{\frac{\sqrt{n}}{2}}{n+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{np}{n+\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{2(n+\sqrt{n})}$$

$(\because\ X\sim B(n,p)\qquad \therefore\ EX=np)$

$$=p+\left[\frac{\sqrt{n}\,p}{1+\sqrt{n}}+\frac{1}{2(1+\sqrt{n})}-p\right]$$

$$=p+\frac{\left(\frac{1}{2}-p\right)}{(1+\sqrt{n})}$$

$$=p+b(p)$$

$$\therefore\quad b(p)=\frac{\left(\frac{1}{2}-p\right)}{(\sqrt{n}+1)}$$

6. 證明 $R(p,d')=E(d'-p)^2$ 的値爲 $\dfrac{1}{[4(\sqrt{n}+1)^2]}$，在此 d' 爲習題 5 之最大最小推定量。

解 $\mathcal{R}(p, d')=E(d'-p)^2$

$$=E(d'^2)-2pE(d')+p^2$$

$$d'^2(X)=\frac{1}{n(\sqrt{n}+1)^2}(X+\frac{\sqrt{n}}{2})^2$$

$$E(d'^2)=\frac{1}{n(\sqrt{n}+1)^2}E[X^2+\sqrt{n}X+\frac{n}{4}]$$

$$\left[\text{其中}\begin{matrix}E(X)=np\\E(X^2)=n^2p^2+np(1-p)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{n(\sqrt{n}+1)^2}[E(X^2)+\sqrt{n}E(X)+\frac{n}{4}]$$

$$=\frac{1}{n(\sqrt{n}+1)^2}[n^2p^2+np(1-p)+\sqrt{n}\cdot np+\frac{n}{4}]$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2}[(n-1)p^2+(\sqrt{n}+1)p+\frac{1}{4}]$$

由上題 $E(d')=p+\dfrac{\frac{1}{2}-p}{\sqrt{n}+1}$

$\therefore\ \mathcal{R}(p, d')$

$$=\frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2}[(n-1)p^2+(\sqrt{n}+1)p+\frac{1}{4}]$$

$$-2p(p+\frac{\frac{1}{2}-p}{\sqrt{n}+1})+p^2$$

$$=(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}-1+\frac{2}{\sqrt{n}+1})p^2+\frac{p}{\sqrt{n}+1}-\frac{p}{\sqrt{n}+1}$$

$$+\frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}$$

7. 於一湖中釣魚，直到某種魚釣到 n 尾方止。令 X 表在該點時所釣到之魚