FANHANFENXILILUNXITIJIEDA

泛函分析理论·习题·解答

〔苏〕А.А.克里洛夫 А.Д.格维沙尼 著

辽宁大学出版社

泛 函 分 析

理论 习题 解答

〔苏〕 A.A.克里洛夫 A.Д.格维沙尼 著

陈广荣 刘吉善 孟伯秦 乔祖诒 译

冷生明 校

辽宁大学出版社

一九八七年·沈阳

责任编辑　张春光
封面设计　赵宏光
责任校对　陈　冰

泛函分析

理论　习题　解答

〔苏〕A·A·克里洛夫　A·Д·格维沙尼　著

陈广荣　刘吉善　孟伯秦　乔祖诒　译

※

辽宁大学出版社出版（沈阳市崇山西路3段4号）
辽宁省新华书店发行　六〇一所印刷厂印刷

※

开本：850×1168　1/32　印张：13.75
字数：300千　印数：1—5,000
1987年7月第1版　1987年7月第1次印刷

※

统一书号：13429·022　定价：3.70元
ISBN 7-5610-0018-9/O·3

序

实际客观现象的最简单的数学抽象——直线，已用不同的观点在各种数学学科中加以研究。例如研究这个客体的代数方法是把直线作为一种集（其中元素可以施行“运算”）来描述它的性质，根据这些性质得到它的代数模型，同时得出抽象的拓扑性质。另一方面，拓扑学从客体的代数结构抽象地建立直线的形式模型，而以直线的“连续性”作为模型的基础。分析学则研究直线与直线上的函数，把它们的代数性质与拓扑性质作为一个系统从整体上进行研究，利用代数结构与拓扑结构相互联系的方法得出分析学本身的基本结论。

在这些基本情况之上就出现了更高一级的抽象，代数学研究线性空间、群、环、加法群等等。拓扑学研究任意集上具有极限、连续性、邻域等等概念的数学意义的各类结构。泛函分析研究线性拓扑空间、拓扑群、赋范环、线性拓扑空间中拓扑群的表示式的加法群等等。因此泛函分析研究的基本对象就应认为是被赋予了适当的代数与拓扑结构的客体。

A.H. 柯尔莫哥洛夫（Колмогоров）首次在国立莫斯科大学数学力学系讲完的泛函分析教程依照惯例包括测度论与勒贝格积分理论，而主要是讲泛函分析的经典章节。本书是作者在国立莫斯科大学数学力学系讲授这门课中尝试综合与系统化的结果。本书力求下列目的：

在大学数学系大纲的范围内按照分析Ⅲ的教程讲述必要的理

论知识。

对于按照分析Ⅲ(或泛函分析)讲授课程与指导习题的教师，对于进行泛函分析研究的大学生，同样提供一部这样的教材，它把课本与习题通过充分详尽的解答提示有机地联系在一起。

同时给读者一些可用于解决现代泛函分析问题的基本工具的概念（范畴、函子、上同调空间、群的特征等等）。

同时还给读者一本对于独立研究泛函分析的经典篇章及掌握解决相关习题的方法都适用的教材。

全书分成彼此紧密联系着的三个部分——理论、习题、解答提示。三部分中相对应的章节用相同的标题来联系，章分为节，节又分为段（第一章除外）。书中所分各段的体系遵循研究班课程材料的大致分布图式。其中每段都给出1—3个分别与教程的方向、学生的准备、学生的兴趣相关的课题。每段选入23个难易程度不同的习题，并且把其中最简单的用“°”标记，复杂的用“*”标记。另外还有不多几个特别困难的问题记成“**”，这些问题的解答可由教师讲述，或者供大学生作为单独报告题目。另一方面，带“°”号的习题可适当选择作为书面作业。

作者感谢 С.М.Агаян，А.В.Зелевинский，А.В.Трусов，他们协助作出习题提示。

A.A.克里洛夫

A.Д.格维沙尼

前　　言

这本书旨在阐明泛函分析的基本训练，为读者提供一条扎实地掌握这门学科的高效率的途径。它不是通常的习题集。它以近一半的篇幅阐述理论，全面系统，但是精要明快。在观点阐述与理论分析中为读者准备着概念上的训练，在许多习题甚至一些解答中，随着训练的进程新增理论内容。在作解答的过程中，往往借机继续阐述理论，新添概念，以便读者温故知新，提高观点；又常常仅以一句话作答，指出解题的基本观点或技巧关键，以便读者自开思路，自测所学。这一切都旨在训练读者，运用所学，分析所见，抽出观点，确定方法，通过训练的积累，提高观点上的自觉，巩固技巧上的熟练。这样，整本书便通过基本知识的阐述及其典型问题的分析与解答，结合成为一体，展示着要扎实地掌握这门学科的基本训练。这种训练方法，对于学习一门综合性较强与抽象性的基础学科，是一种富于针对性的，因而应是高效率的学习方法。

所以这本书，对于初学泛函分析的读者可供精读细练的教材，对于密切联系着这门学科的工作者可供参考性的简介。

冷　生　明

1986年9月8日

内 容 提 要

本书由两部分组成：第一部分阐述国立莫斯科大学数学力学系讲授泛函分析理论课程的内容；第二部分包括相应于这课程的习题与解答，许多是在研究班课程中提出的。

本书适用于大学生与研究生在学习泛函分析时阅读，也可供教师准备各种分析课程时参考。

目　　录

	理论	习题	解答
第一章　集论与拓扑引论			
§1　关系，选择公理与仓恩引理	1	174	297
§2　完备化	4	178	302
§3　范畴与函子	6	182	307
第二章　测度论与积分			
§1　测度论	12	188	311
1．集合代数			
2．测度的延拓			
3．测度的结构			
§2　可测函数	25	196	321
1．可测函数的性质			
2．可测函数序列的收敛性			
§3　积分	29	201	327
1．勒贝格积分			
2．有界变差函数与勒贝格——斯蒂吉斯积分			
3．勒贝格积分的性质			
第三章　线性拓扑空间与线性算子			
§1　一般理论	47	216	344
1．拓扑、凸性与半范			
2．共轭空间			

3. 汉恩——巴拿赫定理
4. 巴拿赫空间
§2 线性算子 ………………………… 62 226 355
1 线性算子空间
2 紧集与紧算子
3 弗雷德霍姆算子理论
§3 函数空间与广义函数 ……………… 84 235 364
1 可积函数空间
2 连续函数空间
3 光滑函数空间
4 广义函数
5 广义函数的运算
§4 希尔伯特空间 ………………………106 252 382
1 希尔伯特空间的几何学
2 希尔伯特空间中的算子
第四章 傅立叶变换与调和分析初步
§1 交换群上的卷积 ……………………120 262 391
1 基本函数的卷积
2 广义函数的卷积
§2 傅立叶变换 …………………………132 268 397
1 交换群的特征
2 傅立叶级数
3 傅立叶积分
4 广义函数的傅立叶变换
第五章 算子的谱理论
§1 函项演算 ……………………………149 281 415
1 有限维空间中的算子函数
2 有界自共轭算子的函数
3 无界自共轭算子

§2 算子的谱分解 ································ 163 289 421
1 把算子化为乘以函数的乘积形式
2 谱理论

第一部分　理　论

第一章　集论与拓扑引论

§1　关系、选择公理与仓恩引理

设X是一个集，R是X×X内的一个子集.如果对X中的点x与y，有$(x, y)\in R$，就说x与y处于关系R中，并记为xRy。

关系的例子.1）相等关系：

$R=\Delta_X=\{(x,x)|x\in X\}$

2）实直线上的序关系：

$R=\{(x, y)|x\geqslant y\}$.

3）域K上线性空间内的线性相关关系：

$R=\{(x, y)|y=0$ 或 $x=\lambda y, \lambda\in K\}$.

关系R称为等价关系，如果R具有性质：

①自反性：$\forall x\in X$，$(x, x)\in R$（或$R\supset\Delta_X$）；

②对称性：$(x, y)\in R\Longrightarrow(y, x)\in R$（或$R'=R$），其中$R'$表示转置关系：$R'=\{(x, y)|(y, x)\in R\}$；

③传递性：$(x, y)\in R$与$(y, z)\in R\Longrightarrow(x, z)\in R$或$R\cdot R\subset R$，其中记号·表示关系的合成

$R_1\cdot R_2=\{(x, z)|\exists y: (x, y)\in R_1, (y, z)\in R_2\}$）.

设 R 是等价关系。这时就把 xRy 写成 $x \sim y$，并说x等价于y。我们用 R（x）表示X中等价于 x 的所有元的全体。由①，②，③推知，形如 R（x）的子集含于整个X，它们或者两两互不相交，或者全同。这些子集称为等价类。等价类的全体记为 X(R)，并称为 X 关于关系 R 的商集。

例 1）与已知线性空间 L 相联系着的投影空间 P（L）。

2）线性空间 L_1 关于子空间 L_2 的商空间 L_1/L_2（对 $x,y \in L_1$，认为 $x \sim y$，如果 $x-y \in L_2$）。

3）关于模n的剩余类。

4）作为自然数偶的等价类的全体正有理数或全体整数。

集 X 上的关系 R 称为一个半序关系，如果它具有性质：

①传递性（$R \cdot R \subset R$）；

②反对称性（$R \cap R' \subset \Delta_X$）。

通常把 xRy 记为 $x>y$，并说"x 位于y之后"。如果此外还有性质：

③$R \cup R' = X \times X$（即任意两个元素可比较），则关系称为一个序关系。

例 1）实直线上通常的序关系；

2）已知集中子集的包含关系（这个关系用符号$\subset$表示）是半序关系（但不是序关系）。

3）整数的可除性关系（通常表为符号$|$）也是半序关系。

半序集 X 的子集Y称为有上界（下界），如果它有强元（弱元），即有元素 $x \in X$，使对于一切 $y \in Y$，都有 $y<x$（或$y>x$）。

具有半序关系 R 的集 X 称为一个有向集，如果 X 具有性质 $R \cdot R' = X \times X$（换言之，对 X 中任意元x与 y，总存在一个元 z，使 z 既位于 x 之后也位于 y 之后）。若（X，R）是有向集，M 是任意集，则把 X 在 M 中的映射称为 M 中的有向线或网。如果 X 是具有通常序关系的自然数列，则网的概念是自然数列所

归结的序列概念的推广。

在高等数学教程中常说，“集的概念是如此普遍，以至难于给它任何一个定义”，因此仅仅指出一系列同义词：套，总和，簇等等。事实上，集的严格理论是存在的，在其中集的概念是有精确定义的（当然，不是综合其它更简单或者更普遍的概念，而是这个集所具有的性质的描述）。同时我们指出，决非任何“套”，“总和”，“簇”等等都可以认为是集（例如，众所周知，一切集的集这个概念是矛盾的）。但是存在着关于集的有相当丰富内容的无矛盾的理论。

为了大多数数学领域足以适用，在研究集时应至少包括一个无限集，并给出下列运算：

①并 $\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$；

②交 $\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$；

③差 $X\setminus Y$；

④构造 X 到 Y 内映射之集，表为 Y^X；

⑤积 $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$。

这里 X，Y，A 与所有 X_α，$\alpha\in A$ 都是集，我们假定，运算的结果也是集。

最后一个运算值得较详细地讨论，设 A 是某个集而每个元 $\alpha\in A$ 与非空集 X_α 相对应，按照定义，集 A 到 $\bigcap\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ 内的那种射映 $\alpha\to x_\alpha$ 是集 $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ 的元，其中对一切 $\alpha\in A$，$x_\alpha\in X_\alpha$。如果集 A 无限，那么这种映射的存在不是显而易见的（而且可以立刻看出，不能从这种映射对有限集 A 与其它自然公理的存在性推出它的一般存在性），因此对于非空的 X_α 关于 $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ 非空的论断应是独立的公理，它被称为选择公理或策墨罗公理。我们援引与这选择公理等价的两个结论。

仓恩(Zorn)引理 如果半序集 X 的每个序子集有上界(下界)，那么 X 中至少有一个极大元（极小元）x_0。

附注 术语“极大元”不是指 $x_0 > x$ 对一切 $x \in X$ 都成立（我们把这种元称为最大元）。元 x_0 的极大性质仅在于 X 中没有异于 x_0 且在 x_0 之后的元。

策墨罗（Zermelo）定理 每个集都可充分调整，即在此集上可引入一种序关系使得每个子集都含有极小元。

这样两个结论实质上是众所周知的数学归纳原理的推广，在研究不可列集的情况下可用以代替数学归纳原理。

想要较详细了解集论基础的读者可以查阅书〔6〕的“结果汇集”以及翻译该书的作者与编辑的序言。

§2 完备化

定义 度量空间 X 称为完备的，如果每个基本列都在 X 中有极限。

完备空间具有重要的性质：在完备空间中，有关闭球套的定理与压缩映象原理（参阅〔18〕的例子）成立，但是往往需要处理非完备的空间，有一个极好的构造方法，可以从每个非完备的空间构造其相应的完备空间，今择要概述几点如下。

定义 设 X 是度量空间，把度量空间Y称为 X 的完备化，如果它具有性质：

① Y 是完备空间；

②在 Y 中有子集 Y_0 与 X 等距；

③ Y_0 在 Y 中稠（即 Y_0 的闭包与Y相同；换言之，Y 中的每个点都是 Y_0 的极限点）。

例 实数集 R 是有理数集 Q 在通常距离意义下的完备化。

定理1. 每个度量空间 X 都有其完备化空间Y，空间X的任意两个完备化空间 Y' 与 Y'' 等距，并且使二者等距的的关系保

持 X 中的点不动。

证明就在于弄清完备化空间的结构。我们用字母 d 表示 X 上的距离，设 F 是 X 中所有基本列的集。若 $x=\{x_n\}$ 与 $y=\{y_n\}$ 是 F 中两个点，则由于 $|d(x_n, y_n)-d(x_m, y_m)|\leqslant d(x_n, x_m)+d(y_n, y_m)$，数列 $d(x_n, y_n)$ 是基本列，从而这个数列有极限，我们就用 $d(x, y)$ 表示这个极限，则量 $d(x, y)$ 具有距离的几乎所有性质。事实上，以 x，y，z 代替 x_n, y_n, z_n，由相应不等式与等式的极限过程容易得出不等式 $d(x, y)\geqslant 0$，$d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(y, z)$，与等式 $d(x, x)=0$，$d(x, y)=d(y, x)$。仅有个别性质不成立：一般说来，由 $d(x, y)=0$ 不能推由 $x=y$。

在 F 上引进关系 $R=\{(x, y)\mid d(x, y)=0\}$，由上面得出的量 $d(x, y)$ 的性质知，R是等价关系。取 $Y=F_{(R)}$ 并在 Y 上用 $d(R(x), R(y))=d(x, y)$ 来定义距离，请读者验证这个定义的正确性。

现在我们证明，Y 是 X的完备化。为此考虑映射 φ：$X\to Y$，φ 把每个点 x 映成包含常驻序列（也是基本序列）$\bar{x}=(x, x, x, \cdots, x\cdots)$ 的类 $\varphi(x)$。显然，φ 是等距映射，我们用 Y_0 表示 X 在映射 φ 下的像，再设y是 Y 中的任意元且 $\{x_n\}\in F$ 是类y中某个非零序列，那么

$$\lim_{n\to\infty} d(\varphi(x_n), y)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m)=0$$

这表明 y 是序列 $\{\varphi(x_n)\}$ 的极限，即是 Y_0 的一个极限点。

我们再证 Y 是完备的，设 $\{y_n\}$ 是 Y 中的基本列，因为 Y_0 在 Y 中稠，可在 Y 中找到这样的序列 $\{\varphi(x_n)\}$，使 $d(\varphi(x_n), y_n)\to 0$。显然，$\{y_n\}$ 与 $\{\varphi(x_n)\}$ 同敛散，但是序列 $\{\varphi(x_n)\}$ 以序列 $\{x_n\}$ 的类 y 作为自己的极限点。事实上，

$$\lim_{n\to\infty} d(\varphi(x_n), y)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} d(x_n、x_m)=0$$

现在设Y'与Y''是 X 的两个完备化空间，而$\varphi': X\to Y'_0$，$\varphi'': X\to Y''_0$是相应的等距映射。讨论由Y_0''到Y_0'内的映射$\psi_0=\varphi'\cdot(\varphi'')^{-1}$，此映射等距，即把基本列映成基本列，因为$Y'$与$Y''$完备，所以$Y_0'(Y_0'')$中的基本列在$Y'(Y'')$内是收敛的，令$\psi(\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_0(\psi_n)$，就使得等距映射$\psi_0: Y_0''\to y_0'$可延拓到等距映射$\psi: Y''\to Y'$。定理证完。

实际上，完备化空间常借助于其它结构来作出。

定理2. 设 M 是完备度量空间且 X 是M的子空间，则 X 是完备的当且仅当它在 M 中是闭的，特别地，可以取 X 在 M 中的闭包作为 X 的完备化空间。

（有关证明可参看习题31.）

例 在通常距离下，区间(a, b)在 R 内的闭包〔a, b〕是区间(a, b)的完备化。

§3 范畴与函子

数学中使用的许多定义和结构，都可由最近形成的特殊研究领域——范畴理论中的为数不多的一般概念较为方便地得出来，我们向读者介绍这个理论的初步知识。

称给定了范畴 K，如果已知范畴对象的总和 Ob(K)(一般来讲不是集，参看§1)且对每对对象A与B可规定由A到B的范畴泛射的集 Mor(A, B)；同时泛射可连乘，即给定泛射$f\in \mathrm{Mor}(A, B)$与$g\in \mathrm{Mor}(B, C)$的像属于$\mathrm{Mor}(A, C)$且表为$g\cdot f$的映射：

$$\mathrm{Mor}(A, B)\times \mathrm{Mor}(B, C)\to \mathrm{Mor}(A, C)。$$

假设泛射具有映射结构的一般性质：对$f\in \mathrm{Mor}(A, B)$，$g\in \mathrm{Mor}(B, C)$，$h\in \mathrm{Mor}(C, D)$，有$h\cdot(g\cdot f)=(h\cdot g)\cdot f$。此外，在集$\mathrm{Mor}(A, A)$中可找到表为$I_A$的单位泛射，它具有性质：
对一切$f\in \mathrm{Mor}(B, A)$，$g\in \mathrm{Mor}(A, B)$都有

$$I_A \cdot f = f,\quad g \cdot I_A = g。$$

为直观起见，常常用点表示范畴对象，而用连接这些点的箭头表示泛射。

例 1)集范畴(对象是集，泛射是集的映射)。

2)群范畴(或环范畴，代数范畴)(对象是群(或环，代数)，泛射是同态)。

3)拓扑空间范畴(对象是拓扑空间，泛射是连续映射)。

4)环 K 上的线性空间范畴(对象是 K 上的线性空间，泛射是线性算子)。

范畴 K 的两个对象 A 与 B 称为同构，如果存在泛射 $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$与$g \in \mathrm{Mor}(B, A)$，使

$$f \cdot g = I_B,\quad g \cdot f = I_A。$$

范畴 K 中的对象 A 称为泛斥对象，如果对 K 中任意对象 B，集 Mor(A, B)恰好由一个元素组成(直观表示为：由点 A 到另一任意点 B 只能引一个箭头)。

作为引进概念的练习，我们证明任意两个泛斥对象同构(如果它们存在的话)。事实上，设 f 是由 A 到 B 的唯一泛射，g 是由 B 到 A的唯一泛射，则 $f \cdot g \in \mathrm{Mor}(B, B)$，$g \cdot f \in \mathrm{Mor}(A, A)$，但 Mor(B, B)包含唯一的元$I_B$(因为 B 泛斥)而 Mor(A, A) 包含唯一元I_A(因为 A 泛斥)，这就意味着

$$f \cdot g = I_B,\quad g \cdot f = I_A$$

现在证明商集与完备化概念都是泛斥对象概念的特殊情况。第一章中我们研究了下列按照集 X 与关系 R 建立的范畴 K，把集 X 到另一集 Y(对每个对象本身)具有性质

$$xRy \Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

的映射 φ 认为是K的对象，把映射 χ：$Y \to Z$ 称为对象 φ：$X \to y$到对象 ψ：$X \to Z$ 内的泛射，对于映射 χ，图示是可换的，