数学物理方法

梁 家 宝

武 汉 大 学 出 版 社

数 学 物 理 方 法

梁家宝

•

武汉大学出版社出版
（武昌珞珈山）
湖北省新华书店发行　　武汉医学院印刷厂印刷

•

787×1092毫米　1/32　12印张　271千字
1985年1月第1版　1985年1月第1次印刷
印数：1—7,000

统一书号：13279·16　　定价：2.05元

内 容 简 介

本书是作者根据自己在武汉大学物理系和空间物理系多年施教的讲义编写而成的。全书分复变函数、数理方程和特殊函数三篇，较系统地讲述了有关的基本理论和重要方法，并着重于实际问题的分析和物理意义的讨论。尤其对于近代物理问题，本书予以足够的重视。

本书可作为综合大学、高等师范院校物理类专业的教材，也可作为工科院校有关专业的教学参考书。

编 写 说 明

这本《数学物理方法》是根据本人在武汉大学物理系和空间物理系使用多年的教学讲义，并参照高等学校理科物理类专业《数学物理方法》教学大纲的要求编写的。可供108学时讲授之用，习题课学时另行安排。

为了适应近代物理的需要，考虑到学生的接受能力，编写时增选了部分资料供教学中选用，如格林函数、希尔伯特变换、高斯方程等，均加了星号*。还辟专章讲授典型物理问题分析。另外，为金属物理和半导体物理专业选讲了扩散问题，为光学和电波传播专业选讲了埃里函数和推广的克希荷夫公式。

编者感谢李中辅同志所作有益的讨论和姚端正同志为本书增选了部分习题并给出习题答案。原稿承王治梁教授和李中辅、徐济仲副教授审阅并提出宝贵意见，在此一并致谢。

限于编者的水平，不妥之处，敬请指正。

编 者

1983年于武汉大学

目　　录

第一篇　复变函数

第二篇　数理方程

第三篇　特殊函数的一般理论

第一篇 复变函数

第一章 解析函数

§1. 引 言

关于复数和复变函数的概念在数学中早就出现了。远在十六世纪，卡旦解二次方程就遇到了$\sqrt{-1}$；18世纪欧拉引入$i=\sqrt{-1}$，建立了虚数论。直到十九世纪，复变函数的研究和实际问题结合起来，才出现了丰富的新内容，特别是静电问题和流体稳定流动的研究，促使建立起以严格和简洁著称的解析函数论，它在自然科学和工程技术部门都有广泛的应用。到本世纪出现了多复变函数论，在求解偏微分方程方面进行一些探讨。近似方法也取得了成果，如鞍点法等。应用方面，在空气动力学，弹性力学和断裂力学等领域都有所进展。

本课程的内容，首先是把数学分析中关于实函数的微商、积分和级数的概念推广到复变函数的领域，进一步研究复变函数中的新问题解析函数（在某区域中具有微商的复变函数）。复变函数的中心问题就是研究解析函数及其应用。

复变函数方法的主要应用有四个方面：一是求解某些数学物理方程的边值问题，例如保角变换和科希积分在求解拉普拉斯方程上的应用；二是留数定理在计算积分和级数求和上的应用；三是拉氏变换在求解常微分方程和求解某些偏微分方程以及在某些积分方程上的应用；四是研究特殊函数问题。

§2. 复数及其运算

数的概念必须超出实数才能得到所有代数方程的解。例如

$$x^2+1=0 \text{ 有} x_1=+\sqrt{-1},\ x_2=-\sqrt{-1}$$

这个$\sqrt{-1}$就不是实数，因为以后常用到，记为$i=\sqrt{-1}$，做为虚数的单位。这一点，通过对于一般的二次方程的求解，看得就更清楚了

$$az^2+2bz+c=0$$

式中a，b，c为实数。当$b^2-ac<0$时，方程就没有实数解。这时的解可以写成

$$z_{1,2}=\frac{1}{a}(-b\pm\sqrt{b^2-ac})=-\frac{b}{a}\pm i\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}$$

$$=\alpha\pm i\beta$$

此处$\alpha=-\frac{b}{a}$，$\beta=\frac{1}{a}\sqrt{ac-b^2}$仍为实数，而解$z_1=\alpha+i\beta$、$z^2=\alpha-i\beta$都不是实数了。它们都由两个实数按一定规则组成，这样就产生了复数的概念。

一对有序的实数(x,y)定义为复数，以z表示

$$z=(x,y)$$

这种新的数必须有下列性质

（1）包括全部实数。故令$y=0$时$(x,0)=x$，x称为z的实部，记为$Re(z)=x$。

（2）比实数更广泛。故令$x=0$时$(0,y)=iy$，y称为z的虚部，记为$Im(z)=y$。

（3）两个复数的实部与虚部分别相等即为相等。$x_1=x_2$，$y_1=y_2$时，$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$。可见，一个复等式相当两个实等式。

复数的几何表示，可用复平面或Z平面表示，取横轴为实轴x，单位为1，取纵轴为虚轴iy，单位为i，则复数

$$z=(x,y)=x+iy$$

可代表平面上的点或自由向量。

或以极坐标表示

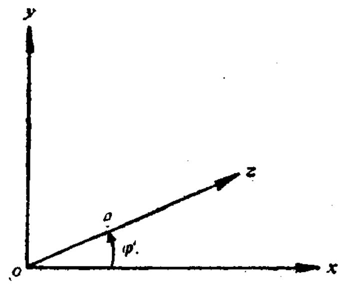

图 1.1

$$x=\rho\cos\varphi$$

$$y=\rho\sin\varphi$$

$$z=\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi=\rho e^{i\varphi}$$

式中$\rho=|z|$，称为z的模，是z点到原点的距离，或向量z的长度。$\varphi=\mathrm{Arg}z$，称为z的辐角，是向量z与x轴正向的夹角，是多值的（只能确定到相差2π的整数倍）。当$z\neq0$时辐角的许多值中（例如30°，30°+2π，30°+4π，……）只有一个值在$-\pi$与$+\pi$之间（可以等于π），此值称为辐角的主值（或主支），通常以$\arg z$表示，于是

$$\varphi=\mathrm{Arg}z=\arg z+2n\pi \qquad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

当$z=0$时，辐角$\mathrm{Arg}z$不确定。

复数的几何表示还可以在复球面上实现：如图1.2所示，复平面z上的每一点A与球面上的一点A'对应，反之亦真。这

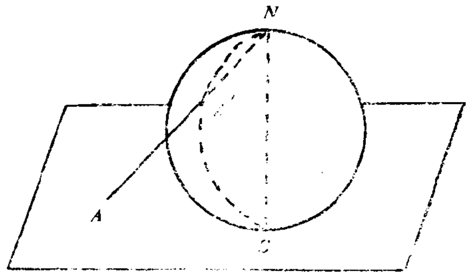

图 1.2

样，我们定义z平面的无限远点 $z=\infty$只有一点（与复球面上N点对应）就完全可以理解了。

复数的运算规则有：

（1）加减法

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

（2）乘法

$$\begin{aligned}z_1z_2&=|z_1|e^{i\,\mathrm{Arg}z_1}\cdot|z_2|e^{i\,\mathrm{Arg}z_2}\\&=|z_1||z_2|e^{i(\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2)}\end{aligned}$$

$\therefore$

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$$

$$\mathrm{Arg}\,z_1z_2=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2$$

（3）除法　　设$|z_2|\neq0$，则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|e^{i\,\mathrm{Arg}z_1}}{|z_2|e^{i\,\mathrm{Arg}z_2}}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2)}$$

$\therefore$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\mathrm{Arg}\,\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$$

（4）乘方

$$z^n=(|z|e^{i\mathrm{Arg}z})^n=|z|^n e^{in\mathrm{Arg}z}$$

$\therefore$ $$|z^n|=|z|^n$$

$$\mathrm{Arg}z^n=n\,\mathrm{Arg}\,z$$

特例 $z=e^{i\varphi}$, $z^n=(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi}$

$\therefore$ $$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

（5）开方

$$\sqrt[m]{z}=(|z|e^{i\mathrm{Arg}z})^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{|z|}\,e^{\frac{i}{m}\mathrm{Arg}Z}$$

$\therefore$ $$|\sqrt[m]{z}|=\sqrt[m]{|z|}$$

$$\mathrm{Arg}\sqrt[m]{z}=\frac{1}{m}\mathrm{Arg}\,z=\frac{1}{m}(\arg z+zn\pi)$$

值得注意，以上运算规则对z的共轭复数$z^*=x-iy$也成立。例如$z_1^*+z_2^*=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)$，可见由以上运算组成的任何方程，其中复数代以它的共轭复数，则仍成立。例如 运所[illegible]

$\because$ $$(z_1+z_2)^2=z_1^2+2z_1z_2+z_2^2$$

$\therefore$ $$(z_1^*+z_2^*)^2=z_1^{*2}+2z_1^*z_2^*+z_2^{*2}$$

§3. 复 数 序 列*

复数序列是一系列顺序排列的复数的集合

$$z_n=x_n+iy_n \qquad n=1,2,3,\cdots$$

即$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，$z_3=x_3+iy_3,\cdots,n\to\infty$就表示一个无限多个复数的集合。

如果给定任意小的$\varepsilon>0$，可找到一个正整数N，使得对于序列z_n的所有$n>N$的项，都满足

$$|z_n-z|<\varepsilon$$

则称点z为序列z_n的极限，表示为

$$z=\lim_{n\to\infty}z_n$$

或者说，序列z_n收敛于z。

从几何意义来说。序列z_n收敛于z，表示除去有限个点外，z_n所有其余的点（$n>N$）都在点z无论怎样小的ε邻域内。

以上是指$z\neq\infty$的情况。如果$z=\infty$，则$z=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$的条件为：

给定一个任意大的数$\varepsilon>0$，可找到N，使当$n>N$时，有$|z_n|>\varepsilon$。

序列$z_n=x_n+iy_n$收敛（即z_n有极限）于$z=x+iy$（$z\neq\infty$）的充分且必要条件是复数的实部、虚部分别所组成的实序列收敛，即两个实序列x_n,y_n分别收敛于x,y.

$$\because \quad |z_n-z|=|(x_n+iy_n)-(x+iy)|$$
$$=|(x_n-x)+i(y_n-y)|$$
$$\therefore \quad |z_n-z|=\sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2}$$

如果(x_n-x)和(y_n-y)能小于任意小的数，则$|z_n-z|$也能小于任意小的数，反之亦然。

因此，可以用分别判断实序列x_n,y_n是否收敛的办法来代替对复数序列z_n的判断。

最后讲一下科希判别法：序列z_n收敛的充分必要条件是给定任意小的$\varepsilon>0$，可找到一个自然数$N=N(\varepsilon)$，使对任意自然数m，有

$$|z_{N+m}-z_N|<\varepsilon$$

从几何意义来看，科希判别法意味着序列z_n只有在这样的情形下才是收敛的，即从号码N开始，它所有的点都在以点z_N为中心ε为半径的圆内。这个判别法的证明，可根据复序列收敛的充要条件和实序列的科希判别法得出。

§4. 复变函数

如果对z的一个值，有ω的一个（或一组）值以一定的规

则与之对应。那么就说，在z的定义区域σ给出了一个复变函数

$$\omega=f(z)$$

例如：线性函数$\omega=az+b$

幂函数 $\omega=z^n$ 根式函数$\omega=\sqrt[n]{z}$

指数函数$\omega=e^z$ 对数函数$\omega=\mathrm{Ln}z$

三角函数 $\omega=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=\sin z$

$\omega=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z$等等

值得注意，这些复函数虽然形式上和实函数一样，但性质上却是不同的。例如$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，但$\sin z$和$\cos z$的模可以大于1。

为了研究复变函数，我们将它分为实部和虚部。因为$z=x+iy$，$\omega=u+iv$，于是

$$\omega=f(z)$$

$$u+iv=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

即 $u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$

例如$\omega=z^2$

$$u+iv=(x+iy)^2=x^2+2iyx+(iy)^2$$

$$=(x^2-y^2)+i2xy$$

$\therefore$ $u=x^2-y^2$ $v=2xy$

可见，一个复变函数$w=f(z)$相当于两个二元实函数$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$。复变函数的研究化为实函数的研究，这是复变函数中研究的基本方法。

复变函数$w=f(z)$可以在全复平面上都有定义，也可以只在复平面上某一区域内有定义。对于这些区域我们可以区别它的内点，境界点和外点。例如这区域为以原点为中心的单位圆