

数学物理方法

梁家宝

武汉大学出版社

数 学 物 理 方 法

梁家宝

•

武汉大学出版社出版

(武昌珞珈山)

湖北省新华书店发行 武汉医学院印刷厂印刷

•

787×1092毫米 1/32 12印张 271千字

1985年1月第1版 1985年1月第1次印刷

印数：1—7,000

统一书号：13279·18 定价：2.05元

内 容 简 介

本书是作者根据自己在武汉大学物理系和空间物理系多年施教的讲义编写而成的。全书分复变函数、数理方程和特殊函数三篇，较系统地讲述了有关的基本理论和重要方法，并着重于实际问题的分析和物理意义的讨论。尤其对于近代物理问题，本书予以足够的重视。

本书可作为综合大学、高等师范院校物理类专业的教材，也可作为工科院校有关专业的教学参考书。

编写说明

这本《数学物理方法》是根据本人在武汉大学物理系和空间物理系使用多年的教学讲义，并参照高等学校理科物理类专业《数学物理方法》教学大纲的要求编写的。可供108学时讲授之用，习题课学时另行安排。

为了适应近代物理的需要，考虑到学生的接受能力，编写时增选了部分资料供教学中选用，如格林函数、希尔伯特变换、高斯方程等，均加了星号*。还辟专章讲授典型物理问题分析。另外，为金属物理和半导体物理专业选讲了扩散问题，为光学和电波传播专业选讲了埃里函数和推广的克希荷夫公式。

编者感谢李中辅同志所作有益的讨论和姚端正同志为本书增选了部分习题并给出习题答案。原稿承王治梁教授和李中辅、徐济仲副教授审阅并提出宝贵意见，在此一并致谢。

限于编者的水平，不妥之处，敬请指正。

编者

· 1983年于武汉大学

目 录

第一篇 复变函数

第一章 解析函数	(1)
§ 1. 引言.....	(1)
§ 2. 复数及其运算.....	(2)
§ 3. 复数序列*	(5)
§ 4. 复变函数.....	(6)
§ 5. 微商.....	(10)
§ 6. 解析函数与调和函数.....	(14)
习题.....	(16)
第二章 保角变换	(18)
§ 1. 保角变换.....	(18)
§ 2. 线性变换.....	(20)
§ 3. 反演变换.....	(21)
§ 4. 分式线性变换.....	(22)
§ 5. 幂函数与根式函数.....	(25)
§ 6. 指数函数与对数函数.....	(28)
§ 7. 三角函数.....	(30)
§ 8. 儒可夫斯基函数.....	(31)
§ 9. 平面静电问题.....	(33)
习题.....	(36)

第三章 积分论	(38)
§ 1. 复积分.....	(38)
§ 2. 科希定理.....	(40)
§ 3. 不定积分·摩勒尔定理*	(43)
§ 4. 科希公式.....	(45)
§ 5. 希尔伯特变换*	(51)
§ 6. 圆的狄氏问题.....	(57)
习题.....	(59)
第四章 级数论	(62)
§ 1. 复级数.....	(62)
§ 2. 幂级数.....	(65)
§ 3. 泰勒级数.....	(66)
§ 4. 罗朗级数.....	(68)
§ 5. 解析延拓与奇点.....	(72)
习题.....	(75)
第五章 留数理论	(77)
§ 1. 留数定理.....	(77)
§ 2. 计算留数的方法.....	(80)
§ 3. 无限积分.....	(82)
§ 4. 含有三角函数的无限积分.....	(83)
§ 5. 多值函数积分的例子.....	(86)
§ 6. 级数求和问题*	(88)
§ 7. 含参变量的积分.....	(91)
§ 8. Γ 函数	(93)

习题.....	(100)
第六章 拉普拉斯变换.....	(103)
§ 1. δ 函数与积分变换.....	(103)
§ 2. 拉普拉斯变换的性质.....	(108)
§ 3. 函数微商和积分的拉氏变换.....	(111)
§ 4. 拉氏反变换.....	(113)
习题.....	(115)

第二篇 数理方程

第一章 导论.....	(117)
§ 1. 引言.....	(117)
§ 2. 几个典型的数理方程.....	(120)
§ 3. 定解条件.....	(128)
§ 4. 二元二阶线性偏微分方程的分类.....	(130)
习题.....	(135)
第二章 行波法.....	(137)
§ 1. 达朗贝公式.....	(137)
§ 2. 反射波.....	(142)
§ 3. 无界空间的波动问题.....	(145)
§ 4. 纯强迫振动.....	(150)
§ 5. 有源空间波·推迟解.....	(151)
习题.....	(153)
第三章 分离变量法.....	(156)
§ 1. 有界弦的自由振动.....	(156)

§ 2.	正交曲线坐标	(162)
§ 3.	特殊函数的微分方程	(170)
§ 4.	勒让德多项式	(175)
§ 5.	贝塞尔函数	(181)
§ 6.	球函数	(187)
§ 7.	圆柱函数	(191)
§ 8.	无界空间的扩散问题	(193)
§ 9.	金属中的扩散问题	(197)
§ 10.	激光照射下钢板表面温度场	(199)
	习题	(202)
第四章	积分公式法	(206)
§ 1.	格林公式及其应用	(206)
§ 2.	格林函数法	(209)
§ 3.	格林函数*	(215)
§ 4.	克希荷夫公式	(221)
§ 5.	克希荷夫公式的应用	(226)
§ 6.	推广的克希荷夫公式*	(229)
	习题	(234)
第五章	近似方法	(236)
§ 1.	变分法的基本问题	(236)
§ 2.	里兹方法	(240)
§ 3.	差分法	(243)
§ 4.	逐次近似法	(246)
	习题	(250)

第三篇 特殊函数的一般理论

第一章 斯特姆 - 刘维型方程	(251)
§ 1. 斯特姆 - 刘维问题.....	(251)
§ 2. 常点邻域的解.....	(260)
§ 3. 奇点邻域的解.....	(265)
§ 4. 正则奇点.....	(269)
§ 5. 高斯方程与退化的高斯方程*	(275)
习题.....	(277)
第二章 复函数方法	(279)
§ 1. 鞍点法*	(279)
§ 2. 母函数方法.....	(283)
§ 3. 函数按缔合勒让德函数展开为级数.....	(292)
§ 4. 柱函数的回路积分形式.....	(295)
§ 5. 沙宁积分及其推论.....	(302)
§ 6. 圆柱函数的渐近公式.....	(305)
§ 7. 虚变量的柱函数.....	(307)
§ 8. 埃里函数*	(309)
习题.....	(314)
第三章 典型物理问题分析	(317)
§ 1. 圆柱核反应堆的临界体积.....	(317)
§ 2. 粒子在库仑场中的运动.....	(321)
§ 3. 平面波在球面上的绕射.....	(326)
§ 4. 库仑散射.....	(328)
§ 5. 量子流体的运动.....	(334)

附录 1	常用正交函数组.....	(340)
附录 2	圆柱函数常用公式.....	(341)
附录 3	贝塞尔函数 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 的表.....	(347)
附录 4	拉氏变换表.....	(358)
附录 5	平面波按球函数的展开式.....	(362)
习题答案与提示.....		(364)
主要参考书.....		(372)

第一篇 复变函数

第一章 解析函数

§ 1. 引言

关于复数和复变函数的概念在数学中早就出现了。远在十六世纪，卡旦解二次方程就遇到了 $\sqrt{-1}$ ；18世纪欧拉引入 $i = \sqrt{-1}$ ，建立了虚数论。直到十九世纪，复变函数的研究和实际问题结合起来，才出现了丰富的新内容，特别是静电问题和流体稳定流动的研究，促使建立起以严格和简洁著称的解析函数论，它在自然科学和工程技术部门都有广泛的应用。到本世纪出现了多复变函数论，在求解偏微分方程方面进行一些探讨。近似方法也取得了成果，如鞍点法等。应用方面，在空气动力学，弹性力学和断裂力学等领域都有所进展。

本课程的内容，首先是把数学分析中关于实函数的微商、积分和级数的概念推广到复变函数的领域，进一步研究复变函数中的新问题解析函数（在某区域中具有微商的复变函数）。复变函数的中心问题就是研究解析函数及其应用。

复变函数方法的主要应用有四个方面：一是求解某些数学物理方程的边值问题，例如保角变换和科希积分在求解拉普拉斯方程上的应用；二是留数定理在计算积分和级数求和上的应用；三是拉氏变换在求解常微分方程和求解某些偏微分方程以及在某些积分方程上的应用；四是研究特殊函数问题。

§ 2. 复数及其运算

数的概念必须超出实数才能得到所有代数方程的解。例如

$$x^2 + 1 = 0 \text{ 有 } x_1 = +\sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}$$

这个 $\sqrt{-1}$ 就不是实数，因为以后常用到，记为 $i = \sqrt{-1}$ ，做为虚数的单位。这一点，通过对于一般的二次方程的求解，看得就更清楚了

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

式中 a, b, c 为实数。当 $b^2 - ac < 0$ 时，方程就没有实数解。这时的解可以写成

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{1}{a}(-b \pm \sqrt{b^2 - ac}) = -\frac{b}{a} \pm i \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \\ &= \alpha \pm i\beta \end{aligned}$$

此处 $\alpha = -\frac{b}{a}$ ， $\beta = \frac{1}{a}\sqrt{ac - b^2}$ 仍为实数，而解 $z_1 = \alpha + i\beta$ ， $z_2 = \alpha - i\beta$ 都不是实数了。它们都由两个实数按一定规则组成，这样就产生了复数的概念。

一对有序的实数 (x, y) 定义为复数，以 z 表示

$$z = (x, y)$$

这种新的数必须有下列性质

(1) 包括全部实数。故令 $y=0$ 时 $(x, 0) = x$ ， x 称为 z 的实部，记为 $Re(z) = x$ 。

(2) 比实数更广泛。故令 $x=0$ 时 $(0, y) = iy$ ， y 称为 z 的虚部，记为 $Im(z) = y$ 。

(3) 两个复数的实部与虚部分别相等即为相等。 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ 时， $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ 。可见，一个复等式相当两个实等式。

复数的几何表示，可用复平面或 Z 平面表示，取横轴为实轴 x ，单位为1，取纵轴为虚轴 iy ，单位为 i ，则复数

$$z=(x,y)=x+iy$$

可代表平面上的点或自由向量。

或以极坐标表示

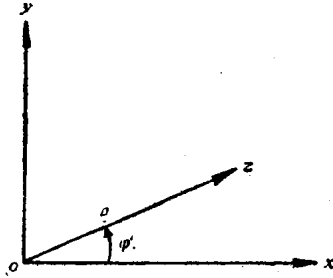


图 1.1

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi = \rho e^{i\varphi}$$

式中 $\rho = |z|$ ，称为 z 的模，是 z 点到原点的距离，或向量 z 的长度。 $\varphi = \text{Arg}z$ ，称为 z 的辐角，是向量 z 与 x 轴正向的夹角，是多值的（只能确定到相差 2π 的整数倍）。当 $z \neq 0$ 时辐角的许多值中（例如 30° ， $30^\circ + 2\pi$ ， $30^\circ + 4\pi$ ，……）只有一个值在 $-\pi$ 与 $+\pi$ 之间（可以等于 π ），此值称为辐角的主值（或主支），通常以 $\text{arg}z$ 表示，于是

$$\varphi = \text{Arg}z = \text{arg}z + 2n\pi \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$-\pi < \text{arg}z \leq \pi$$

当 $z=0$ 时，辐角 $\text{Arg}z$ 不确定。

复数的几何表示还可以在复球面上实现：如图1.2所示，复平面 z 上的每一点 A 与球面上的一点 A' 对应，反之亦真。这

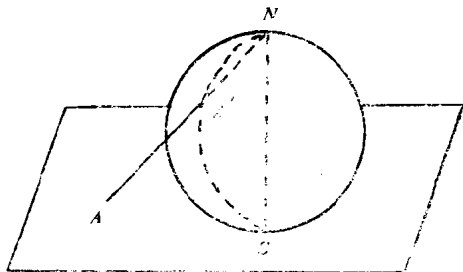


图 1.2

样，我们定义 z 平面的无限远点 $z=\infty$ 只有一点（与复球面上 N 点对应）就完全可以理解了。

复数的运算规则有：

(1) 加减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

(2) 乘法

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| e^{i \operatorname{Arg} z_1} \cdot |z_2| e^{i \operatorname{Arg} z_2} \\ &= |z_1| |z_2| e^{i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2)} \end{aligned}$$

$$\therefore |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

(3) 除法 设 $|z_2| \neq 0$ ，则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i \operatorname{Arg} z_1}}{|z_2| e^{i \operatorname{Arg} z_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2)}$$

$$\therefore \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$$

(4) 乘方

$$z^n = (|z|e^{i \operatorname{Arg} z})^n = |z|^n e^{i n \operatorname{Arg} z}$$

$$\therefore |z^n| = |z|^n$$

$$\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$$

特例 $z = e^{i\varphi}$, $z^n = (e^{i\varphi})^n = e^{i n \varphi}$

$$\therefore (\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

(5) 开方

$$\sqrt[m]{z} = (|z|e^{i \operatorname{Arg} z})^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{|z|} e^{\frac{i}{m} \operatorname{Arg} z}$$

$$\therefore |\sqrt[m]{z}| = \sqrt[m]{|z|}$$

$$\operatorname{Arg} \sqrt[m]{z} = \frac{1}{m} \operatorname{Arg} z = \frac{1}{m} (\arg z + z n \pi)$$

值得注意，以上运算规则对 z 的共轭复数 $z^* = x - iy$ 也成立。例如 $z_1^* + z_2^* = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$ ，可见由以上运算组成的任何方程，其中复数代以它的共轭复数，则仍成立。例如

$$\therefore (z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2$$

$$\therefore (z_1^* + z_2^*)^2 = z_1^{*2} + 2z_1^* z_2^* + z_2^{*2}$$

§ 3. 复数序列*

复数序列是一系列顺序排列的复数的集合

$$z_n = x_n + iy_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

即 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3, \dots, n \rightarrow \infty$ 就表示一个无限多个复数的集合。

如果给定任意小的 $\varepsilon > 0$ ，可找到一个正整数 N ，使得对于序列 z_n 的所有 $n > N$ 的项，都满足

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

则称点 z 为序列 z_n 的极限，表示为

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

或者说，序列 z_n 收敛于 z 。

从几何意义来说。序列 z_n 收敛于 z ，表示除去有限个点外， z_n 所有其余的点（ $n > N$ ）都在点 z 无论怎样小的 ε 邻域内。

以上是指 $z \neq \infty$ 的情况。如果 $z = \infty$ ，则 $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 的条件为：

给定一个任意大的数 $\varepsilon > 0$ ，可找到 N ，使当 $n > N$ 时，有 $|z_n| > \varepsilon$ 。

序列 $z_n = x_n + iy_n$ 收敛（即 z_n 有极限）于 $z = x + iy$ （ $z \neq \infty$ ）的充分且必要条件是复数的实部、虚部分别所组成的实序列收敛，即两个实序列 x_n, y_n 分别收敛于 x, y 。

$$\begin{aligned} \therefore |z_n - z| &= |(x_n + iy_n) - (x + iy)| \\ &= |(x_n - x) + i(y_n - y)| \end{aligned}$$

$$\therefore |z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$$

如果 $(x_n - x)$ 和 $(y_n - y)$ 能小于任意小的数，则 $|z_n - z|$ 也能小于任意小的数，反之亦然。

因此，可以用分别判断实序列 x_n, y_n 是否收敛的办法来代替对复数序列 z_n 的判断。

最后讲一下科希判别法：序列 z_n 收敛的充分必要条件是给定任意小的 $\varepsilon > 0$ ，可找到一个自然数 $N = N(\varepsilon)$ ，使对任意自然数 m ，有

$$|z_{N+m} - z_N| < \varepsilon$$

从几何意义来看，科希判别法意味着序列 z_n 只有在这样的情形下才是收敛的，即从号码 N 开始，它所有的点都在以点 z_N 为中心 ε 为半径的圆内。这个判别法的证明，可根据复序列收敛的充要条件和实序列的科希判别法得出。

§ 4. 复变函数

如果对 z 的一个值，有 ω 的一个（或一组）值以一定的规

别与之对应。那么就說，在 z 的定义区域 σ 给出了一个复变函数

$$\omega = f(z)$$

例如：线性函数 $\omega = az + b$

$$\text{幂函数 } \omega = z^n \quad \text{根式函数 } \omega = \sqrt[n]{z}$$

$$\text{指数函数 } \omega = e^z \quad \text{对数函数 } \omega = \text{Ln}z$$

$$\text{三角函数 } \quad \omega = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sin z$$

$$\omega = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z \text{ 等等}$$

值得注意，这些复函数虽然形式上和实函数一样，但性质上却是不同的。例如 $|\sin x| \leq 1$ ， $|\cos x| \leq 1$ ，但 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的模可以大于1。

为了研究复变函数，我们将它分为实部和虚部。因为 $z = x + iy$ ， $\omega = u + iv$ ，于是

$$\omega = f(z)$$

$$u + iv = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\text{即 } \quad u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$$

例如 $\omega = z^2$

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 + 2iyx + (iy)^2$$

$$= (x^2 - y^2) + i2xy$$

$$\therefore \quad u = x^2 - y^2 \quad v = 2xy$$

可见，一个复变函数 $w = f(z)$ 相当于两个二元实函数 $u = u(x, y)$ ， $v = v(x, y)$ 。复变函数的研究化为实函数的研究，这是复变函数中研究的基本方法。

复变函数 $w = f(z)$ 可以在全复平面上都有定义，也可以只在复平面上某一区域内有定义。对于这些区域我们可以区别它的内点，境界点和外点。例如这区域为以原点为中心的圆