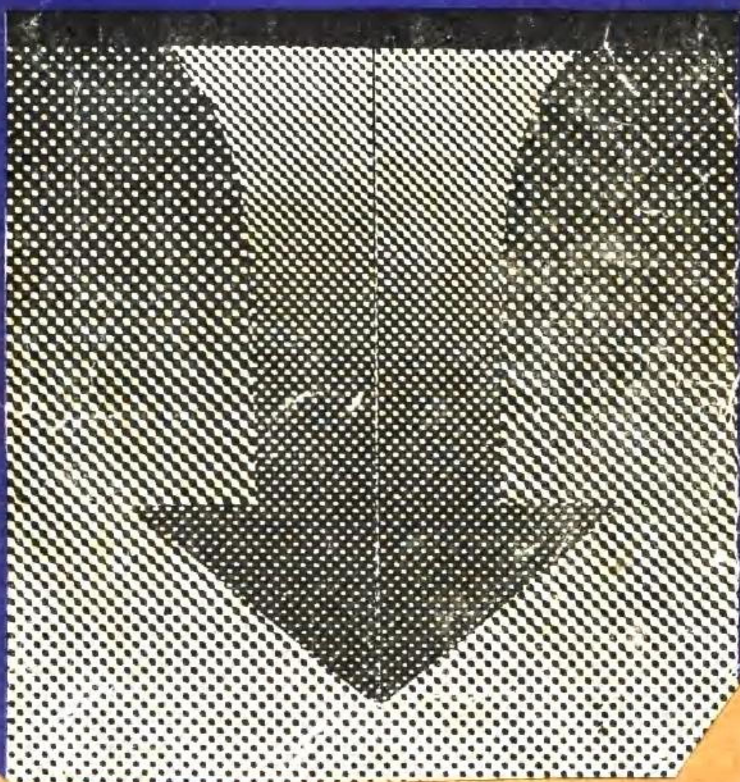
高等学校试用教材

袁小明　胡炳生　周焕山

数学思想发展简史

SHUXUE SIXIANG FAZHAN JIANSHI



高等学校试用教材

数学思想发展简史

袁小明　胡炳生　周焕山

高等教育出版社

(京)112号

内容提要

本书的编写采取数学史与数学思想史相结合叙述的方法；以18世纪以前的数学史内容为主。内容共分四编十二章，各编编名是：萌芽时期、常量数学时期、变量数学时期、近现代数学时期。可供高等师范院校、师专、教育学院数学系作为教材使用，也可供中学数学教师参考。

高等学校试用教材

数学思想发展简史

袁小明　胡炳生　周焕山

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 11.5　字数 270 000

1992年10月第1版　1992年10月第1次印刷

印数 00 001—1966

ISBN 7-04-003751-3/O·1107

定价 4.15 元

编者的话

近20年来，我国的数学史研究和教学受到了来自哲学、史学、科学、数学、心理学以及教育学等多方面的影响，正在蓬勃发展，其中数学教育的作用尤其值得注意.

数学教育是现实的，人们用现实的眼光观看现实的教育，制定为现实服务的策略和方法. 然而，没有脱离历史的现实. 不仅数学教育本身具有历史过程，而且每一个数学教育活动，比如教育目标的制定，教育内容的选择，教育方法的采用都离不开历史的参照. 至于数学教育中所传授的知识，那就更是历史的了. 人们之所以不把具体的教育内容当作史料来对待，那是因为载于教科书上的那些东西，经过长期的精选加工已经成为数学现实理论的组成部分. 数学教育使数学至少在形式上产生了一种独立的实体——学校数学或者说教育数学.

既然已经习惯于把历史上出现的数学概念及其理论加工成了现实的数学教育内容，那么为什么不可以将更富有教育价值的杰出的数学思维的典型的历史材料，蒸馏或者说按理性再造成对现代数学教育更有用的东西呢？这就是当代数学教育的呼声，从学术上说，即数学教育的历史观. 这一观点有效地推进了历史材料在数学教育中应用，也推进了数学教育中的数学史尤其是数学思想史的研究.

从一定意义上说，本书是现代数学教育观的产物. 事实上，国家教委高等学校理科数学教材编审委员会初等数学研究组正是从上述认识出发，把《数学思想发展简史》纳入数学教育系列教材之中的.

初等数学研究组提出：《数学思想简史》的编写目的是介绍数学思想、方法产生和发展的历史，使高师数学专业的学生对数学的意义，特别是中学数学内容有进一步的理解，掌握一定的史料，以利于今后从事中学数学教学工作. 根据这个意见，本书的撰写侧重于以下四个方面。

1. 数学的各主要分支及其重要概念、命题的产生背景和发展过程，着重介绍思想、方法的产生过程.

2. 中外杰出数学家生平及对数学发展的贡献.

3. 根据高师学生的特点，以与中学数学内容有关的数学史为主要内容，即以 18 世纪以前的数学史内容为主，并简要介绍 18 至 20 世纪数学思想发展的概况，以及现代数学发展的趋势.

4. 介绍中国古代数学的伟大成就及其对世界数学发展的贡献.

本书是一本讲述数学思想发展史的教材，它应不同于一般的数学史，更不是讲数学内容本身. 但是，讲数学思想的发展，又不能离开数学史. 对于尚未对数学史建立一般认识的学生来说，直接接受数学思想史知识将会相当困难，从而给教师的教学带来不便. 鉴于这一考虑，本书的编写采取了数学史与数学思想史相结合叙述的办法，即如本书审稿会会议纪要第三条所提到的“在具有一定史料的基础上突出数学思想的发展”的办法。

本书的编写过程中，曾经考虑了作为教材的适用性. 力求使其既能用于 72 学时的课程，也可在经过适当删节后用于 54 学时的课程. 全书的安排大致是 2 个学时一节。不过，由于内容的深浅程度不一，文字叙述的可教学性程度差距较大，所以教学的实际进度可能并不能按编者的愿望进行. 我们希望，在使用过一段时间以后，再由使用的同志聚会讨论，集思广益，力求使本书能成为一本比较适用的教材.

本书的撰写得到了沈康身、侯德润、刘逸、徐五光诸先生的关心和帮助．1990 年 12 月 7 日至 11 日，召开了本书的审稿会．会议之前和会议之中先生们对本书的初稿进行了认真而仔细的审议，提出了许多宝贵的意见．如果书稿的质量已有所提高的话，那是与诸位先生们的无私帮助分不开的．

本书由袁小明、胡炳生、周焕山三人共同撰写．其中，袁小明撰写了第一、第五、第八、第九各章；胡炳生撰写了第四、第五、第十、第十一各章；周焕山撰写了第二、第三、第六、第七、第十二各章，人名索引由周焕山编制．全书由袁小明统稿、修改并对一些章节作了改写．由于作者水平有限，书中的缺点和错误一定不少，恳请读者不吝指正．

编　　者

1991 年 6 月 14 日于上海

目　　录

第一编　萌芽时期

数学萌芽于一个不易为人察觉的漫长的历史过程．如果把数学的萌芽视为构成数学的最直接最基本的研究对象及对象间的初步关系，诸如，明确的数的概念及其符号，简单的几何图形及其关系，那么，比起人类的整个历史进程，比起天文、农业、艺术、医术等的萌芽来，却是比较晚才出现的，不会早于新石器时代晚期，距今大约六七千年以前．

萌芽时期的数学思想主要围绕着数和形两个概念展开，体现在数的概念方面的数学思想包括数的概念的形成，原始数论和数的计算等；体现在形的概念方面的数学思想则是图形概念的形成，关于图形各部分关系的认识和对图形特性的初步了解．

具有确定意义的数学萌芽主要出现在原始村落农业社会，如埃及、巴比伦和中国．

第一章　数学思想的萌芽

第一节　数与记数法的产生

1．数的概念产生的物质基础

数是"数(shǔ)"出来的．这句话确切地反映了数的概念产生的原由．早期的人类大约也没有数(shǔ)的必要．从现在尚存的

原始部落的语言中可以发现，他们甚至不具备表示3以上的数．美国人类学家柯尔(Curr)对澳洲原始部落研究后发现，很少有人会辨别四个东西．无须数（shǔ）数的原因之一，大约是占有物的贫乏．另外，没有物的集合体的概念也是产生不出数(shǔ)的活动的原因．例如，一些原始部落能区分出成百种不同的树木，并赋予它们各种不同的名称，却不存在“木”这一概括性概念．数是集合的一种性质，没有集合的概念，自然也就难以产生揭示其性质的活动．

大约在距今1万年之前，随着地球上河水消融、气候变化，人类中的一部分开始结束散居的游牧生活，在大河流域定居起来，于是农业社会出现了．农民既靠地又靠天，因此他们十分关心日月的运行和季节的变化．此外，种植和贮藏；土地划分和食粮分配；以及随之而出现的贸易和赋税等等，都潜在而又强烈地促使了数(shǔ)数的必要，为数的概念和记数方法的产生提供了坚实的物质基础．

2．数的概念的形成

数的概念是不可能一下子完善的．起初人们只能认识“有”还是“没有”，后来才渐渐地分辨出“多”与“少”．而在多与少的分辨中，认识1与多的区别又是必然而关键的一步．

从孩儿认识“1”的过程可以推测，人们最初对“1”的认识是由于人通常总是用一只手拿一件物品产生的．也就是说，它是由一只手与一件物品之间的反复对应，在人的头脑中形成的一种认识．

建立物体集合之间的一一对应关系是数“数”活动的第一步．在这一活动中，不仅可以比较出两个集合的元素之间的多或少，更主要的是可以发现相等关系，即所谓的等数性．在数的概念形成的过程中，对集合间等数性的认识具有决定性意义．它促使人们

使用某种特定的方式利用等数性来反映集合元素的多少.

根据考古发现，人们早先用于表示等数性的方法有很多，有将小石子、沙粒、树枝、贝壳等物积集的方法，也有打绳结或者在兽骨、泥块上刻痕的方法. 如我国的山顶洞人采取在骨管上打点的方法，一个圆点表示1，两个圆点表示2，三个圆点表示3. 总之，是将等数关系保存下来，达到记数的目的. 虽然如此记下的还不是真实意义的数，却是计数的一次深化了的实践. 在这样的实践的基础上，人们自然迈出了计数和形成抽象的数的概念的第一步.

从词源上看，拉丁文 calculi（计算）这个词，原意就是石子；abacus（算盘）的希腊文愿意是沙粒；汉字计算的“算”字，古文中与“策”相通，而“策”字据古籍《方言》记载，最初是一种不加人工制作的细木枝. 可见，石子、沙子、木枝等东西，在数的形成中起过重要的作用. 结绳也是较早使用的计数器. 我国有“上古结绳而治”的说法，据史书上记载，当时的结绳计数也就是将物品与绳结一一对应，从绳结的多少来反映物品的多少.

石子、泥粒、木枝等不仅是天然的计数器，而且还能将计数后的结果保存下来，达到记数的目的. 本世纪30年代，美国一个考古队曾在伊拉克境内发现一个蛋形的空心封口泥罐，泥罐的表面画着某种牲畜，里面放着48颗泥粒，经考古学家分析认为，这是一个记着数的凭据，它表示泥罐的主人曾经有过48头这种牲畜.

利用等数性以一对一的方式记数，好处是手续简单. 比如，羊圈里增加了三头羊，要记下来，主人只需要放上三颗泥丸或者墙上刻上三条痕迹就可以了，不要特别的记数符号. 但这样记下的毕竟不是现在意义上的数，它只是物体集合蕴含着的数量特性的形式转移.

完整的数的概念是建立在进位制基础上的. 早期的进位制的基数都很小，如2、3等. 2进制只需要两个记数符号，比如1与2，

其它的数可以由它们来表示，即 2+1，2+2，2+2+1……3 进制只需 3 个记数符号，比如 1、2、3，其它的数则可表示成 3+1，3+2，3+3，3+3+1 等等. 随着生活和生产实践的不断深入，基数才渐渐增大，出现了 5 进制、10 进制、20 进制以及 60 进制等. 一般认为，现在普遍使用的 10 进制记数法与人们曾采用 10 个指头计数有关.

手指计数出现于何时现在已难以考证，但可以肯定，它曾经是人们普遍使用过的一种计数方法. 有人认为，现在的罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ就分别是 1 至 4 个手指的形象， Ⅴ是四指并拢拇指张开时的形象，10 则画成 VV，表示双手，后来又画成X，是 VV 的对顶形式. 古代俄国把 1 叫做“手指头”，10 则称为“全部”. 这些都是古代手指计数的痕迹.

“10”既然被称为“全部”，也说明手指计数的范围是十分有限的，一双手的手指全部用上也只能计到 10，要想计更大的数目就得另想法子. 于是，一些地区的人们就不得不借助于脚趾、手指的关节等，来扩大计数范围. 还有一种办法是发明手势，利用手指弯曲而成的各种形状，或者结合人身上的其它器官，扩大计数.

3. 10 进制记数法的产生

10 进制记数法产生于解决手指计数局限性的另一条途径中，它不是借用脚趾、手指关节，或者设想出手势，而是借用了别人的手指计数后的自然结果. 当数目正好用二个人的手指计完时，就说这个数目是“二个人”，而当数目需要用三个人的全部手指和另一个人的四个手指计完时，那么就称其为“三人四指”. 这样的实践使人们产生了一个“满十进一”的思想. 不管所进上去的高一级单位叫“人”，还是别的什么，在计数的方法上，这种做法到是实实在在的 10 进制. 当人们意识到一个人的全部手指，可以用一块小

石头或者短树枝代替时，就不必担心借用其它人的手指所造成的麻烦了．在用完了自己的全部手指后，只要在地上放一块小石头或者短树枝之类的东西，于是两只手的手指就重新解放，又可以继续计数了．

原始的计数即数(shǔ)数，促使了数的概念的萌发，又通过记数而产生数字，并进一步完善数的概念．

4．数字的产生

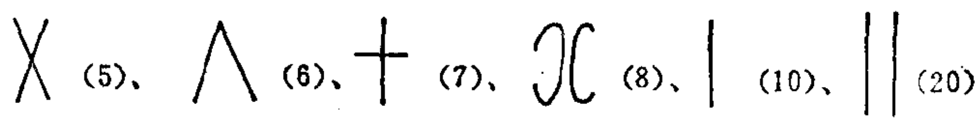
从现在的考古资料看，几乎所有的文明古国都经历过一个刻划记数的阶段，只是各自的形式不同而已．最初的刻划记数方法是刻痕与物品一一对应，一条刻痕表示 1，没有进位思想和法则．这种刻痕虽说是人们用来表示集合中元素数量特性的方式，但它还称不上是数字．理想的数字和记数系统“是由于私产意识的增长而偶然生出来的副产品”①．随着产品和物资的增加，出现了记帐的需要．需要记录在帐上的数目难免会很大，于是靠一一对应的划杠等的方法就不够用了，比如记号//////////////////(18)除非重新数上一遍，不然就无法看清它表示哪个数目．为了使所作的记号能一目了然地反映出它所表示的数目，记帐者不得不对上述记法作出改进．最容易想到的是分组表示，将刻痕 5 个一组或者 10 个一组排列起来，于是 18 就被写成 ///// ///// ///// /// 或者 ////////// ////////．后来的事实表明，10 个一组的写法曾被较普遍的采用．

1937 年，美国考古学家在维斯托尼斯发现一根幼狼的桡骨，上面有 55 条刻痕，长短不一．据分析认为，短刻痕是单位 1 的表示，而长刻痕则是 5 进制中的高一级单位．在爱沙尼亚以及楚瓦

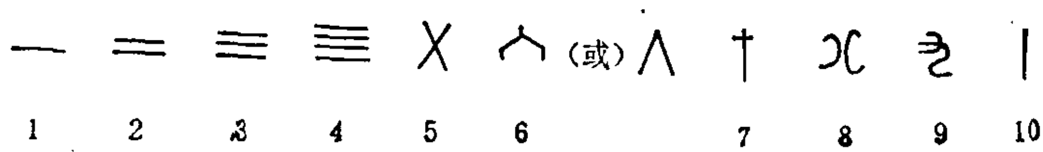
① Speises 语，转引自 J.D.Bernal«历史上的科学»，科学出版社，1981 年，第 65 页．

什等地则发现另一种刻痕记数的方法，有的是用刀痕的深浅表示不同的位值，深的刀痕是浅的刀痕的 100 倍；有的则用刀痕的样式区分数目：“ ”表示 1，“ ”表示 5，“ ”表示 10，还发现 $\frac{1}{2}$ 的刀痕“ ”．各种特殊的刀痕符号的发明，并与进位制思想相结合，必然产生出使用于各种进位制的记数符号——数目字．

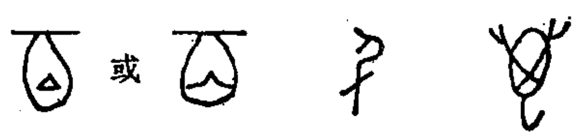
数目字在我国出现得很早，在距今约 6 千年的西安半坡村新石器时代遗址中有刻在陶器上的数目字，如：



等．我国系统的数目字大约出现在商代，当时用甲骨文书写的数目字是



另有百、千、万等高位值符号：



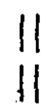
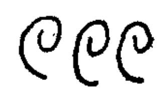
5．各种古老的记数法

抽象的数的概念，是通过具体的记数形式来体现的．世界上不少国家和地区都先后创制了自己的记数符号和记数方法，它们不仅为发展本民族的数学作出了贡献，而且有力地推动了世界数学的发展．

记数法发展得比较早的文明古国有：埃及、中国和印度、巴比伦．产生于欧洲的罗马记数法，也曾有过较大的影响．

古代埃及的地理位置与现在的区别不大，基本上位于尼罗河中下游地区，这是古代文明发展得最早的地区之一．大约在公元前 4000 年，埃及人就创造了自己的文字，他们在一种由松软的芦草经过挤压晒干而成的纸草上书写．最初的文字是象形的，数字也一样，它们是

1　10　100　1000　10000　100000　1000000　10000000

这是一套 10 进非位值制记数符号，记数时用符号重复写若干次表示这个符号所代表数的若干倍，例如  (6)  (300)等．埃及的象形文字后来被一种符号化的僧侣文代替，数字也随着符号化．

古代巴比伦，位于底格里斯河和幼发拉底河流域，大约在公元前 4 千年代中期，当地的苏美尔人就创造自己的文字．他们用削尖的木棒或芦杆压在半湿的软泥板上书写．由于落“笔”处印痕较为深宽，提“笔”处较为细狭，每一笔划的形状成楔形①，故称楔形文字．

苏美尔人的数字由两个基本符号构成：

 (1) 和  (10)

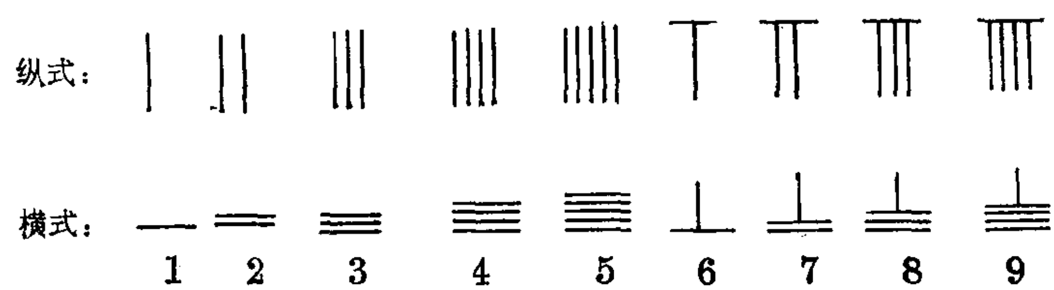
对于 100 以内的数，采用加法原则，将基本符号组合表示．如 23 写成 ，100 则表示成 ，于是 300 就被写成  (3×100)．苏美尔人除了采用 10 进非位值制记数

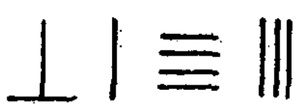
① 关于楔形文字的另一种说法是用一种截面为楔形的木棒在泥板上刻成的．

外，还创造了60进位值制．这种进位方法至今仍被广泛用于计算时间和角度等等．

中国在商代创立了甲骨文的10进非位值制记数法．此后，大约在春秋时期（前700～前476）又创造了一种筹算的10进位值制记数法．所谓“筹算”是用一种叫算筹的运算工具来进行数字运算的方式，好比用珠算盘进行运算，叫做珠算一样．算筹通常用竹制成，形如细筷子，但要短些，汉时算筹长约13厘米，后来逐渐改短，增粗．算筹是我国独创的一种计算工具．在明代珠算盘被普遍使用之前，我国古代一直是用算筹来进行数字运算，并创造出卓越数学成就的．

用算筹摆出的数字有纵横两种形式．



记数时，个位常用纵式，依次横纵相间，如6143的筹式是  ．各位数字纵横相间，不致看错．如遇零，便空一位，如306的筹式是  ．这种记数法实质上就是现在我们采用的10进位值制计数法，它用数字在数目中的位置来表示位值，从而用最少的数字符号来最有效地表示数目，是科学史上的一大发明．

印度记数法是现在通常使用的所谓阿拉伯记数法的前身，也是一种10进的位值制记数法．10进位值制记数法的关键数字是“0”．我国虽最早创用10进位值制记数法，但零是采用空位表示的，起初没有专门符号．符号“0”产生于印度，从现有的资料看，在公元