

正交设计

——一种安排多因素试验的数学方法

北京大学数学力学系数学专业概率统计组编

正 交 设 计

——一种安排多因素试验的数学方法

北京大学数学力学系数学专业概率统计组

人 民 教 育 出 版 社

一九七六年

正交设计

——一种安排多因素试验的数学方法

北京大学数学力学系数学专业概率统计组

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

1976年2月第1版 1977年1月第1次印刷

书号 13012·028 定价 0.62 元

写在前面

无产阶级文化大革命以来，我国工农业生产和科技战线呈现一派欣欣向荣的大好形势。在党的领导下，一个轰轰烈烈的群众性的科学实验运动正在广泛深入地开展起来。其中，数学方法和理论的应用、创造也出现了生气勃勃的局面，正交设计方法日益广泛应用于生产实践，并取得了可喜的成绩。

正交设计是一种安排多因素试验的数学方法，它是从大量的生产实践和科学实验中总结出来的。事实证明，这一方法简单易行，应用广泛，效果良好。无论在提高定型产品的产量、质量，研究采用新工艺、新品种，了解新设备的工艺性能以及改进技术管理等方面，应用正交设计取得成功的生动事例很多。因此，有越来越多的生产、科研部门和有关人员迫切希望了解和掌握这一科学方法。为了适应群众性的科学实验运动广泛深入的开展，我们进行了本书编写工作。

本书是由我组 74 级工农兵学员和教员在开门办学的实践中集体编写的。在编写中我们努力用马克思主义、列宁主义、毛泽东思想为指导，结合我国生产实践中的实例和开门办学的体会，讲解正交设计的最基本最常用的一些方法。文字力求通俗，便于自学。

对本书的内容和使用方法作下列说明：

一、本书是普及读物，尽量少用抽象的符号，避免使用烦琐的公式。在分析试验结果时，采用“直观分析法”，对试验中的误差不去作数学上的精细处理。如有需要，读者可参阅其他有关书籍。本书不论述正交设计的数学理论，不介绍各种数学方法的数学根据，

但是力图从直观上作详细的解释,以帮助读者理解各种方法的基本思想。关于正交设计的数学理论,我们将另写专书。

二、本书内容由简单到复杂。第一部分“正交设计初步”,介绍各因素水平数相等、又不考虑交互作用的试验,这是正交设计的最基本部分,是本书的重点。学习班时间短的,可只学这一部分。如需进一步学习,可增学第二、第三部分。打“*”的节和例题在初学时可以不看。

三、本书通过大量实例来介绍方法。为了对各个部门的同志都有参考价值,我们选择了化工、冶金、机械、纺织、建筑材料、农业等各个方面的例子。读者在阅读自己不熟悉的实际例子时,应把注意力放在对数学方法的了解上,并结合本单位的实际来加以思考。

在编写过程中,我们学习和参考了许多兄弟单位介绍正交设计方法或应用成果的材料,受到很大的启发,并采纳了其中很多讲法和实例。

由于我们对毛泽东思想学习不够,实践经验和理论水平都有限,本书的错误和不当之处一定不少,欢迎批评指正。

北京大学数学力学系数学专业概率统计组

一九七六年一月

目 录

写在前面.....	(1)
第一部分 正交设计初步.....	(1)
§ 1. 正交设计简介.....	(1)
§ 2. L_9 表的用法.....	(16)
§ 3. 二水平表的用法.....	(24)
§ 4. 多水平表的用法.....	(62)
§ 5. 多指标的分析方法.....	(80)
*§ 6. 简化计算的方法.....	(90)
第二部分 混合水平的正交设计.....	(101)
§ 1. 混合水平的正交表	(102)
§ 2. 并列法	(112)
§ 3. 拟水平法	(127)
§ 4. 部分追加法	(137)
第三部分 有交互作用的正交设计.....	(148)
§ 1. 交互作用.....	(148)
§ 2. 水平数相同的有交互作用的正交设计.....	(164)
*§ 3. 混合水平有交互作用的正交设计.....	(195)
附表	
多因素试验常用正交表.....	(207)

第一部分 正交设计初步

§ 1. 正交设计简介

试制一种产品,改革一项工艺,寻找优良的生产条件,一般都需要做试验。实际问题是错综复杂的,影响试验结果的因素很多,有些因素单独起作用,有些因素则是互相制约、联合起作用。在安排试验时,常常感到要考察的因素很多,如果逐个进行比较,试验次数就要很多,有时不仅办不到,实际上也没有必要这样做。那么如何安排这种多因素的试验,既能使试验的次数少、耗费小,又能得到正确的结论,取得较好的效果,这就有一个方法问题。正如伟大领袖毛主席教导我们的:“我们不但要提出任务,而且要解决完成任务的方法问题。我们的任务是过河,但是没有桥或没有船就不能过。不解决桥或船的问题,过河就是一句空话。不解决方法问题,任务也只是瞎说一顿。”从事具体试验工作的同志,都有这样的体会,一项试验要达到预期的目的,除有正确的指导思想以外,和试验方法很有关系,安排得好,做几次或十几次试验就能得到明确的结论。相反,事先不作科学的安排而盲目地进行试验,即使做了几十次,甚至上百次的试验,还是说不出所以然来。

正交设计是在劳动人民长期生产实践中总结出来的,它是一种科学的安排多因素试验的方法,又叫正交试验法,有时也称为正交法。它的工具就是正交表——一种特制的表格。正交设计就是利用正交表来安排试验,利用正交表来计算和分析试验的结果。国内外的大量实践,特别是我国文化大革命以来的科学实验运动,证

明了正交设计简单易懂、行之有效、应用广泛，受到了广大工农兵的欢迎。天津市制药厂家属队的老大娘，在变“三废”为三宝中，运用正交设计法，她们深有体会地说：“正交试验好，好比月份表，全面来考虑，试验效果好。实践出真知，天才批倒了。”

为了便于同志们了解，这里先作一些简单的介绍，说明正交设计处理些什么样的问题，这个方法大致是怎么回事。

（一）正交设计处理什么样的问题

这里我们用建筑材料方面的问题作为例子加以说明。

某建筑材料研究所为了贯彻“综合利用”的精神，利用工业废料——烟灰来做砖，通过试验想摸索好的生产工艺，以保证烟灰砖的质量合乎要求。

质量指标是折断力，它可以用数量来表示，即每平方厘米多少公斤，这就是本项试验工作的指标，折断力是越大越好，试验的目的就是想寻找提高折断力的新工艺。

在烟灰砖的生产中，成型水分的多少、碾压时间的长短、每一次碾压时投多少料都会对折断力有影响。成型水分、碾压时间、一次碾压料重通常称为因素。在这项试验中，我们想考察这三个因素对折断力的影响。

对成型水分，要比较三个条件：9%、10%、11%，究竟那一个好；对碾压时间，也要比较三个条件：8分、10分、12分，究竟那一个好；对一次碾压的料重，也要比较三个条件：330公斤、360公斤、400公斤，究竟那一个好。每个因素要比较的各个条件，称为因素的水平，要比较几个条件，就是这个因素要比较几个水平。在这个例中，一共有三个因素，每个因素要比较三个水平，为了看起来清楚，往往列成表格的形式：

因 素	成型水分	碾压时间	一次碾压料重
一 水 平	9%	8 分	330 公斤
二 水 平	10%	10 分	360 公斤
三 水 平	11%	12 分	400 公斤

通过试验和对试验结果的分析, 希望回答下面三个问题:

1. 对指标的影响, 那个因素重要, 那个因素不重要?
2. 每个因素中以那个水平为好?
3. 各个因素依什么样的水平搭配起来对指标较好?

这是多因素试验中比较典型的几个问题, 正交设计就是解决这一类问题的一种数学方法。

(二) 正交设计的基本思想和方法

对上面这一类问题, 正交设计处理的方法就是用正交表这个工具来安排试验和计算、分析试验结果。

上面提到的烟灰砖问题, 三个因素都有三个水平, 各种不同的水平搭配可以产生 27 种不同的工艺条件:

	成型水分	碾压时间	一次碾压料重
(1)	9%	8 分	330 公斤
(2)	9%	8 分	360 公斤
(3)	9%	8 分	400 公斤
(4)	9%	10 分	330 公斤
(5)	9%	10 分	360 公斤
(6)	9%	10 分	400 公斤
(7)	9%	12 分	330 公斤
(8)	9%	12 分	360 公斤
(9)	9%	12 分	400 公斤

(续表)

	成型水分	碾压时间	一次碾压料重
(10)	10%	8 分	330 公斤
(11)	10%	8 分	360 公斤
(12)	10%	8 分	400 公斤
(13)	10%	10 分	330 公斤
(14)	10%	10 分	360 公斤
(15)	10%	10 分	400 公斤
(16)	10%	12 分	330 公斤
(17)	10%	12 分	360 公斤
(18)	10%	12 分	400 公斤
(19)	11%	8 分	330 公斤
(20)	11%	8 分	360 公斤
(21)	11%	8 分	400 公斤
(22)	11%	10 分	330 公斤
(23)	11%	10 分	360 公斤
(24)	11%	10 分	400 公斤
(25)	11%	12 分	330 公斤
(26)	11%	12 分	360 公斤
(27)	11%	12 分	400 公斤

如果把这 27 种不同的工艺逐个进行试验,就需要很多时间,需要花费不少的人力和物力。现在希望能从这 27 种不同的工艺中选出一小部分来进行试验,使这一小部分试验具有比较好的“代表性”,它们确实能反映出 27 种不同工艺的重要的差别。正交表这个工具就可以帮助我们来挑选具有“代表性”的一小部分试验。

本例可用代号是 L_9 的一张表来安排试验。这张表有九个横行,四个竖列,表中整齐地排着“1”、“2”、“3”三个数字:

表L₉

试 号 \ 列 号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

安排试验时,把三个因素随便放在这张表的三个列上,例如,把它们依次放在第 1、2、3 列上,就得到一个试验计划表。如把因素成型水分放在第 1 列,于是把第 1 列的数字“1”、“2”、“3”换成相应的三个水平所表示的具体条件:

第 1 列		第 1 列 成型水分
1		9%
1	数字 1 换成 9% →	9%
1		9%
2		10%
2	数字 2 换成 10% →	10%
2		10%
3		11%
3	数字 3 换成 11% →	11%
3		11%

同样地, 对第 2 列、第 3 列也作这样的改换:

第 2 列		第 2 列 碾压时间
1		8 分
2	数字 1 换成 8 分	10 分
3		12 分
1		8 分
2	数字 2 换成 10 分	10 分
3		12 分
1		8 分
2	数字 3 换成 12 分	10 分
3		12 分

第 3 列		第 3 列 一次碾压料重
1		330 公斤
2	数字 1 换成 330 公斤	360 公斤
3		400 公斤
2		360 公斤
3	数字 2 换成 360 公斤	400 公斤
1		330 公斤
3		400 公斤
1	数字 3 换成 400 公斤	330 公斤
2		360 公斤

第 4 列没有放因素, 把它删去, 这样就把下面左边的 L_9 改换成右边的一张表:

列号 试号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

列号 试号	1 成型水分	2 碾压时间	3 一次碾压料重
1	9%	8分	330公斤
2	9%	10分	360公斤
3	9%	12分	400公斤
4	10%	8分	360公斤
5	10%	10分	400公斤
6	10%	12分	330公斤
7	11%	8分	400公斤
8	11%	10分	330公斤
9	11%	12分	360公斤

上面右边一张表, 就是一张试验计划表, 它选出了第 1—9 号试验, 每一号试验的条件就是这号试验相应的横行中各因素的条件。例如表中的

第 1 号试验: 成型水分是 9% 碾压时间是 8 分 一次碾压料重 330 公斤,

第 5 号试验: 成型水分是 10% 碾压时间是 10 分 一次碾压料重 400 公斤,

第 7 号试验: 成型水分是 11% 碾压时间是 8 分 一次碾压料重 400 公斤。

从刚才安排的过程可以看出, 我们并不需要先写出全部 27 个试验, 然后去挑选, 而只要将具体因素往 L_9 表头上逐个放好, 把表中的数字换成这一列因素相应的水平所表示的具体条件, 就得到一张九次试验的计划表。

这样选出的九个试验的特点是: 均衡搭配。也就是说, 这样选出的九次试验, 在三个因素的各种水平之间, 搭配是均衡的, 这体现在下面两点上:

在表 L_9 所安排的九次试验中,

(i) 成型水分的三个水平 9%、10%、11% 各出现三次；碾压时间 8 分、10 分、12 分各出现三次；一次碾压料重 330 公斤、360 公斤、400 公斤各出现三次。

(ii) 每两个因素之间，各种水平搭配出现的次数是一样的。以成型水分和碾压时间为例，每个因素有三个水平，它们之间各种不同的水平搭配共有九种：

成型水分	碾压时间
9 %	8 分
9 %	10 分
9 %	12 分
10 %	8 分
10 %	10 分
10 %	12 分
11 %	8 分
11 %	10 分
11 %	12 分

从 L_9 排得的试验表上可以看到，这九种不同的搭配正好在第 1—9 号试验依次出现，每一种搭配出现一次。再看碾压时间和一次碾压料重这两个因素的水平搭配：

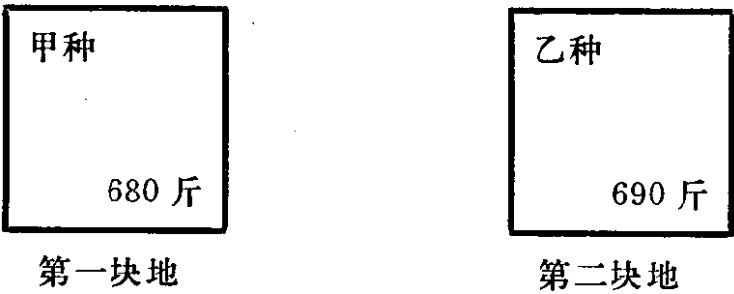
碾压时间	一次碾压料重	出现的试验号
8 分	330 公斤	1
8 分	360 公斤	4
8 分	400 公斤	7
10 分	330 公斤	8
10 分	360 公斤	2
10 分	400 公斤	5
12 分	330 公斤	6
12 分	360 公斤	9
12 分	400 公斤	3

也是各种水平搭配正好出现一次。同样地，大家可以自己验证一下成型水分和一次碾压料重之间水平搭配也具有均衡性。

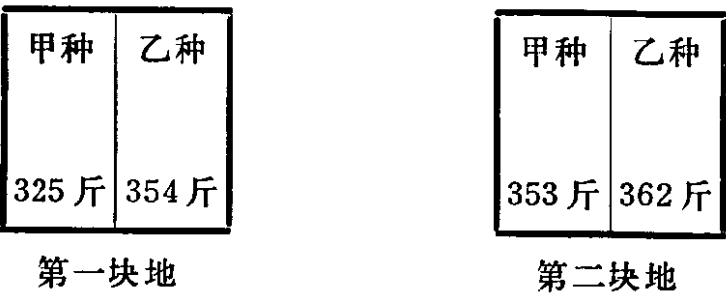
用正交表安排的试验一定是均衡搭配的，这就是正交表的优点。以后我们再详细地说明这一点。

为什么试验计划要安排得均衡搭配呢？不均衡搭配有什么缺点呢？如果试验计划不是均衡搭配的，那么试验做完了，对试验的结果就不好分析，或者分析不出正确的、可靠的结论。我们看一个简单的例子。为了比较两种不同的小麦，看看那一种在本地更能高产，常见的试验田的种法有两种：

第一种，选两块大小一样的地（都是一亩），把甲种小麦种在第一块地里，乙种小麦种在第二块地里，所得产量如下图：



第二种，同样还是上面选的两块地，但是把每块地再平均分为两半，分别种甲、乙两种小麦，所得产量如下图：



比较一下这两种方法，就会发现很有意义的问题。

在前一种方法里，乙种小麦亩产 690 斤，甲种小麦亩产 680 斤，能不能就说乙种小麦比甲种小麦好一些、产量高一些呢？这样下结论是不合适的。原因在于，两块地客观上存在着差异，虽然产

量 690 斤比 680 斤多出 10 斤,但是,这 10 斤是由于品种的改变所造成的呢,还是由于两块地的差异造成的呢,还是由于品种也不同、地块也不同共同引起的呢?现在分析不出来。

在后一种方法里,甲种小麦在两块地里产量之和是 678 斤,乙种小麦在两块地里产量之和是 716 斤,716 斤比 678 斤多了 38 斤,这 38 斤却能反映出品种不同对产量的影响,说明乙种小麦比甲种小麦高产,因为在两块地里,甲、乙两种小麦各占半块地,两块地的好坏对甲、乙两种小麦产生的影响应该是一样的,在两种小麦各自的总产量中也都反映出来,所以,这样的种植方法就抵消了土地的差别对产量造成的影响,而能比较真实地反映出品种的不同对产量造成的影响,比较出两种品种的小麦那一种更高产一些。

由此可见,后面这种方法比前一种方法要好,它好就好在甲、乙两种小麦分别在两块(不同的)地块上都种了一半,也就是说,把两种小麦和两个地块“均衡”地搭配起来了:

甲种小麦种在第一块地里;

乙种小麦种在第一块地里;

甲种小麦种在第二块地里;

乙种小麦种在第二块地里。

一方面,由于甲种小麦在第一块地 和 第二块地 中都种了一半,乙种小麦也是如此,因此,可以用甲种小麦 和 乙种小麦各自的总产量进行比较,判断那种小麦高产。另一方面,在第一块地中甲、乙两种小麦各占一半,在第二块地中情况也一样,因此,直接比较两块地的产量就可以看出两块地的好坏来:

第一块地的产量是 $325 + 354 = 679$ (斤);

第二块地的产量是 $353 + 362 = 715$ (斤),

它比第一块地多收 $715 - 679 = 36$ (斤)。可见,第二块地比第一块地好。

从上面的分析可以看出：同样是两种小麦种在两块地里，方法变一变，并不增加什么工，多费什么力，但是所得的结果却大不相同。前一种方法比不出两种小麦那种好，也看不出那块地好，达不到试验的预定目的。后一种方法既能比出品种的好坏，又能比出土地的差异，能使我们通过试验得到比较可靠的结论，达到预定的目的。因此，搞试验必须讲究方法，不仅要大破因循守旧思想，敢于开展科学试验，而且还要掌握科学地合理地安排试验的方法，善于试验。

数学的理论和大量的事实都证明了，具有“均衡搭配”性质的试验比没有“均衡搭配”性质的试验要好。正交设计就是利用正交表来安排具有均衡搭配特性的试验计划。计划安排好之后，按计划中的条件进行试验。那么对试验的结果该怎样进行计算和分析呢？还用烟灰砖的例子来讨论。把各号试验结果填入试验计划表的最右边，就得到：

试 号 \ 列 号	1 成型水分 (%)	2 碾压时间 (分)	3 一次碾压料重 (公斤)	试验结果 折断力 (公斤/厘米 ²)
1	1 9	1 8	1 330	16.9
2	1 9	2 10	2 360	19.1
3	1 9	3 12	3 400	16.7
4	2 10	1 8	2 360	19.8
5	2 10	2 10	3 400	23.7
6	2 10	3 12	1 330	19.0
7	3 11	1 8	3 400	25.3
8	3 11	2 10	1 330	20.4
9	3 11	3 12	2 360	23.1

由于试验计划是均衡搭配的，因此计算分析就比较简单。例如：为了比较三种不同成型水分对折断力的影响，把每一种成型水分的总的折断力算出来：