黑龙江科学技术出版社

吴从炘　王廷辅　著

奥尔里奇空间及其应用

奥尔里奇空间及其应用

吴从炘　王廷辅　著

黑 龙 江 科 学 技 术 出 版 社

一九八三年·哈尔滨

责任编辑： 翟明秋
封面计设： 一 平

奥尔里奇空间及其应用

吴从炘 王廷辅 著

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区分部街28号）
建工学院印刷厂印刷・黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32・印张14 12/16・字数299千
1983年3月第一版・1983年3月第一次印刷
印数．1—2,750

书号：13217・050 定价：2.30元

前　　言

Orlicz 空间是泛函分析的一个分支学科。它细致、深入地研究一类比熟知的L^p空间更为广泛的函数空间。这门学科既为一般泛函分析提供了直观背景材料，又在许多领域中得到直接应用。

这一学科兴起于三十年代初，形成于五十年代末。1958年，М.А.Красносельский 和 Я.Б.Рутицкий 出版了第一本专著“凸函数与Orlicz空间”（以下均称“KR”专著），系统地总结了先前的，特别是他们本人的工作。在那以后的二十多年里这一学科继续发展：一方面，原已涉及到的空间和算子理论日趋完善，并不断推广和深化，导致各种广义Orlicz 空间相继出现；另一方面，在继续发展与积分方程联系的同时，又成功地应用于函数逼近论、偏微分方程、概率论及复变函数论等多门学科。这些年的文献积累，据不完全统计已近千篇，散见于各国数学期刊。

1978年出版了一本介绍 Orlicz 空间初等理论的书[Bund, Iracema Martin, Birnbaum-Orlicz Spaces, Universid-ade de sao Paulo, 1978ppiv+161]，至今还没有另一本专著问世。

六十年代，我国北京、济南、南京和哈尔滨的数学工作者也曾在这一领域中获得许多重要成果。经过十多年的中断，近几年里又有较快的恢复与发展。尤其可喜的是本领域中一批青年工作者已经涌现。

在1979年召开的全国第二次泛函分析学术讨论会上，我们曾以“Orlicz 空间理论二十年进展”为题做了综合报告，得到前辈泛函家和许多同行的鼓励。根据会议决定，我们编写了讲义“Orlicz 空间理论及应用Ⅰ、Ⅱ”，先后于1980、1981年在全国泛函（空间及应用组）学术讨论会上做了系统报告。这本书就是在讲义的基础上加工、修改而成的。

照顾各有关方面的要求，确定了如下编写原则。

① 先进性。我们普遍地查阅了二十年的有关文献，举凡书中涉及到的内容都尽量选取最好结果。考虑到KR原专著中证明方法过于单一，我们有意地介绍了多种主要证法，读者可以领略本领域中的丰富多彩的论证技巧。但是篇幅所限，不可能也不必要介绍全部Orlicz空间理论，更不用说与之相关的内容了。为弥补这一缺陷，我们写了综述“Orlicz空间进展”将发表于《数学研究与评论》2,3（1983），可与本书配合阅读。

② 可接受性。为了让这本书既有学术专著特点，又可作为研究生或高年级学生选修课教材，我们采取了相应的处理方法。第一，削枝强干，突出重点。第二，注意材料的“自给自足”，即除了通常教程中已有结果直接引用外，其它需要援引的命题一般以引理形式给出。但个别与主题关系不大，叙述起来特别冗长或与已有论述十分类似的命题，只陈述结果，注明出处而不加证明。第三，不过分追求一般性，近年文献中多把生成Orlicz空间的函数取为Young函数，把空间元素取为定义在抽象测度空间上的函数；而本书仍取N函数和定义在n维欧氏空间有界闭集上的函数。我们认为按

前一种处理方法，对其中许多问题都得增加相当多文字，而并不带来多少实质性的推广。按后一种处理方法，既简洁、易懂，又基本上不降低水平。第四，对引自原文献的定理，大都做了归纳、整理，对证明过程进行了简化或加细处理，有的还给出新的证法，使其易于接受。

③ 实用性。本书不仅在第四章里详尽介绍了线性积分算子，还开辟专章——第五章专门讨论 Orlicz 空间理论在非线性积分方程、偏微分方程、Fourier 级数和奇异积分等方面的应用。为方便其它分支的数学工作者能尽快读到他所感兴趣的部分，我们在章节划分上做了必要的处理。例如，为了读第五章，前面可只读第一章以及第二章 §1、§3—6，第四章 §1 即可。

④ 充分反映中国数学界的工作。考虑到我国数学工作者在六十年代和近年确有不少优秀的成果，而且涉及到的范围也很广泛。因此，我们在选材时，在保证质量前提下，尽可能地选取中国数学工作者的有关工作，其中有的尚未公开发表。

全书一共分五章；节的序号在章内排列；引理、定理、命题、定义和公式的序号在节内排列；推论不编号；每节后有附记，说明素材出处、选取思想及处理情况；末尾文献是本节直接用到的。较全面的文献目录，请参阅前边提到的综述文章。

由于我们水平所限，加上时间紧迫，书中难免有不当之处，望读者不吝赐教。

著　者

1982年4月15日　于哈尔滨

目　　录

第一章 N函数

关于N函数以及它的各种常用的条件(如Δ_2,Δ',Δ_3和Δ^2等）在KR的专著中已有较系统的论述，但也还有一些问题直到该书出版时仍未获得解决。不久之后，*T. Ando*全面解决了这一系列遗留问题，可以说N函数的基本性质已经很清楚了。

本章将以较短篇幅更系统地论述有关N函数的基本事实和主要结果。

§1 N函数与余N函数

定义1.1 我们称定义在$R^1=(-\infty,\infty)$上的实值函数$M(u)$为N函数，假如它具有下列性质：

1° $M(u)$为偶的连续凸函数且$M(0)=0$；

2° 当$u>0$时$M(u)>0$；

3° $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{M(u)}{u}=0$，$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{M(u)}{u}=\infty$。

定理1.1 $M(u)$为N函数的充要条件为存在定义在$[0,\infty)$上的实值函数$p(u)$，它满足下列条件：

(1) $p(u)$为右连续的非减函数；

(2) 当$u>0$时$p(u)>0$；

(3) $p(0)=0$，$p(\infty)=\infty$；

并且使得

$$M(u)=\int_0^{u} p(t)dt \qquad (1.1)$$

证 根据实函数论中的熟知定理可知$M(u)$具有性质1°当且仅当存在满足（1）的$p(u)$使得（1.1）成立；并且这时$p(u)$为$M(u)$的右导数。

注意由$p(t)$的非减性和(1.1)式即知当$u\geqslant 0$时

$$M(u)=\int_0^u p(t)dt\leqslant up(u),$$

$$M(2u)=\int_0^{2u} p(t)dt\geqslant\int_u^{2u} p(t)dt\geqslant up(u),$$

亦即有

$$\frac{M(u)}{u}\leqslant p(u),\ \frac{M(u)}{u}\geqslant\frac{1}{2}p\left(\frac{u}{2}\right)\quad (u\geqslant 0)$$

和

$$p(u)\geqslant\frac{M(u)}{u},\ p(u)\leqslant 2\cdot\frac{M(2u)}{2u}\quad (u\geqslant 0)$$

因此，从$p(u)$满足(2)，(3)便可推出$M(u)$具有性质2°,3°；并且从$M(u)$满足2°，3°也可推出$p(u)$具有性质(2)，(3)。

定义1.2 设$p(t)$满足定理1.1的条件,则称定义在$[0,\infty)$上的实值函数

$$q(s)=\sup_{p(t)<s} t=\inf_{p(t)>s} t$$

为$p(t)$的右反函数

当$p(t)$连续且渐升时$q(s)$就是$p(t)$的反函数。

定理1.2 $p(t)$的右反函数$q(s)$也满足定理1.1中的条件。

证 （1）$q(s)$非减是显然的。今证它右连续。

如若不然，则有$s_n \searrow s_0$使$q(s_n) \searrow t_0 > q(s_0)$，取$t_1$满足$t_0 > t_1 > q(s_0)$，则$t_1 < q(s_n) = \sup\limits_{p(t) \leqslant s_n} t$，故

$$p(t_1) \leqslant s_n (n = 1, 2, \cdots),$$

于是$p(t_1) \leqslant s_0$，从而$t_1 \leqslant \sup\limits_{p(t) \leqslant s_0} t = q(s_0)$，矛盾。

(2) 假如不成立，则有$s_0 > 0$使$q(s_0) = 0$，故存在$t_n \searrow$使$p(t_n) > s_0 (n = 1, 2, \cdots)$。另一方面由$p(t)$的右连续性可推出$\lim\limits_{n \to \infty} p(t_n) = p(0) = 0$，于是有正整数$n_0$使得当$n \geqslant n_0$时$p(t_n) \leqslant s_0$，矛盾。

(3) 显然。

定义1.3 设$M(u)$为N函数，$q(s)$为它的右导数$p(t)$的右反函数，则称

$$N(v) = \int_0^{|v|} q(s) ds$$

为$M(u)$ 的余N函数。

由定理1.1和1.2便知$N(v)$是N函数。

在本章以下的讨论中，如不特别声明，我们恒假定$M(u)$，$p(t)$，$q(s)$，$N(v)$的含意如定义1.3所示。

对于$M(u)$，$p(t)$，$q(s)$，$N(v)$有下列几个基本不等式。

Ⅰ 联系$M(u)$与$p(u)$的不等式。

$$M(u) \leqslant |u| p(|u|) \leqslant M(2u) \qquad (u \in R^1)$$

证 参看定理1.1之证。

Ⅱ 联系$p(t)$与$q(s)$的不等式。

$$q[p(t)] \geqslant t, \quad p[q(s)] \geqslant s \quad (s, t \geqslant 0),$$

$$q[p(t) - \varepsilon] \leqslant t \quad (t \geqslant 0, \ 0 < \varepsilon \leqslant p(t)),$$

$p[q(s)-\varepsilon]\leqslant s \quad (s\geqslant 0,\ 0<\varepsilon\leqslant q(s))$

证 若有正数t_0使$q[p(t_0)]<t_0$，则$\inf\limits_{p(t)>p(t_0)} t<t_0$，故$p(t_0)>p(t_0)$，矛盾。

若有正数 t_0和正数 $\varepsilon_0<p(t_0)$ 使 $q[p(t_0)-\varepsilon_0]>t_0$，则 $\sup\limits_{p(t)<p(t_0)-\varepsilon_0} t>t_0$，故$p(t_0)\leqslant p(t_0)-\varepsilon_0$，矛盾。

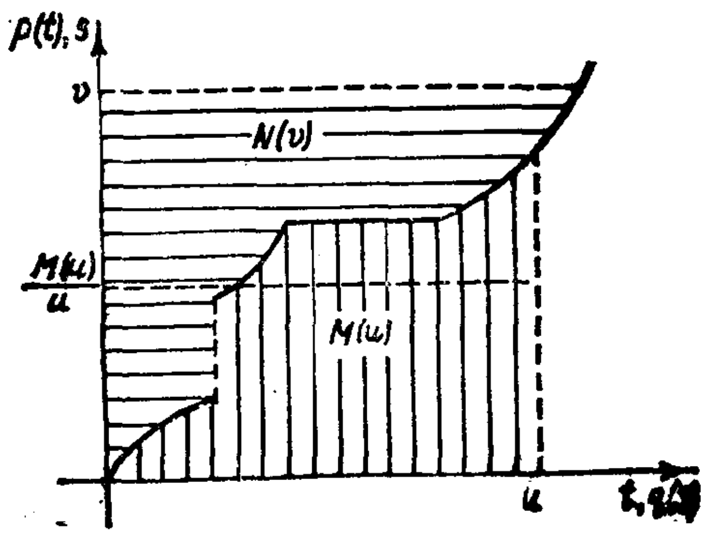
其它情形类似可证。

Ⅲ 联系$M(u)$与$N(v)$的不等式。

$$uv\leqslant M(u)+N(v) \qquad (u,v\in R^1)$$

并且等号成立当且仅当$v=p(|u|)\mathrm{sign}\,u$ 或$u=q(|v|)\mathrm{sign}\,v$。这就是$Young$不等式。

证 利用图1及$M(u)$与$N(v)$为偶函数容易推得。



(图 1)

Ⅳ 联系$M(u)$与$N(\mathrm{v})$的反函数的不等式.

$$\mathrm{v}<M^{-1}(\mathrm{v})N^{-1}(\mathrm{v})\leqslant 2\mathrm{v}\quad(\mathrm{v}>0)$$

证 显然反函数$M^{-1}(\mathrm{v})$，$N^{-1}(\mathrm{v})$均存在.

由不等式Ⅲ即得

$$M^{-1}(\mathrm{v})N^{-1}(\mathrm{v})\leqslant M[M^{-1}(\mathrm{v})]+N[N^{-1}(\mathrm{v})]=2\mathrm{v}\quad(\mathrm{v}>0)$$

另一方面，根据图1易知对任何$u>0$有

$$N\left[\frac{M(u)}{u}\right]<M(u),$$

故当$\mathrm{v}>0$时$N\left[\frac{\mathrm{v}}{M^{-1}(\mathrm{v})}\right]<\mathrm{v}$，从而$\frac{\mathrm{v}}{M^{-1}(\mathrm{v})}<N^{-1}(\mathrm{v})$，亦即有

$$M^{-1}(\mathrm{v})N^{-1}(\mathrm{v})>\mathrm{v}\quad(\mathrm{v}>0)$$

Ⅴ $M(u)$ 自身的不等式.

$$\frac{M(u')}{u'}<\frac{M(u)}{u}\quad(0<u'<u),$$

$$M(u)+M(\mathrm{v})\leqslant M(|u|+|\mathrm{v}|)\quad(u,\ \mathrm{v}\in R^{1})$$

证 显然要证$\frac{M(u)}{u}$对正的u为渐升只须证当$u>0$，$0<\alpha<1$时$M(\alpha u)<\alpha M(u)$（此时取$\alpha=\frac{u'}{u}$即得所需的不等式）.

如若不然，则有$u_0>0$，$\alpha_0\in(0,1)$使得

$$M(\alpha_0 u_0)=\alpha_0 M(u_0)$$

（注意从$M(u)$的凸性即得$M(\alpha u)\leqslant \alpha M(u)$），从而由凸

函数的Jensen不等式成为等式的情形便知对一切 $\alpha\in[0,1]$ 有$M(\alpha u_0)=\alpha M(u_0)$，于是

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{M(\alpha u_0)}{\alpha u_0}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha M(u_0)}{\alpha u_0}=\frac{M(u_0)}{u_0}\neq 0$$

这与定义1.1中的条件3°矛盾.

另外，对$u,v\in R^1$我们有

$$\begin{aligned}M(u)+M(v)&=\int_0^{|u|}p(t)dt+\int_0^{|v|}p(t)dt\\&\leqslant\int_0^{|u|}p(t)dt+\int_{|u|}^{|u|+|v|}p(t)dt\\&=\int_0^{|u|+|v|}p(t)dt=M(|u|+|v|)\end{aligned}$$

作为上述几个基本不等式的应用，我们讨论一下N函数与余N函数之间的关系.

定理1.3 若$N(v)$是$M(u)$的余N函数，则$M(u)$也是$N(v)$的余N函数，即它们互为余N函数.

证 我们只须证$q(s)$也是$p(t)$的右反函数，即若命

$$p^*(t)=\sup_{q(s)\leqslant t}s=\inf_{q(s)>t}s\qquad(t\geqslant 0),$$

则当$t\geqslant 0$时$p^*(t)=p(t)$.

事实上，由不等式Ⅱ可知对任何正数t和正数$\varepsilon\leqslant p(t)$恒有$q[p(t)-\varepsilon]\leqslant t$，即$p^*(t)\geqslant p(t)-\varepsilon$，亦即$p^*(t)\geqslant p(t)$. 今证反过来的不等式也成立. 若有$t_0\geqslant 0$使$p^*(t_0)>p(t_0)$，则由$p(t)$的右连续性有$\varepsilon_0>0$使$p^*(t_0)>p(t_0+\varepsilon_0)$，故$q[p(t_0+\varepsilon_0)]\leqslant t_0$，这与由不等式Ⅱ所推得的$q[p(t_0+\varepsilon_0)]\geqslant t_0+\varepsilon_0$矛盾.

定理1.4 $N(v)$为$M(u)$的余N函数当且仅当

$$N(v)=\max_{u\geq 0}(u|v|-M(u)) \qquad (1,2)$$

证 根据余 N 函数的存在性，我们只须证明它恰为(1．2)的形式．

因为由不等式Ⅲ $N(v)\geqslant u|v|-M(u)$ $(u\geqslant 0)$，又当$u=q(|v|)\mathrm{sign}v$时

$$q(|v|)|v|=M(q(|v|)\mathrm{sign}v)+N(v)=M(q(|v|))+N(v),$$

即$N(v)=q(|v|)|v|-M(q(|v|))$，故得证。

常用的N函数举例如下：

例1 $M^{(1)}(u)=\dfrac{|u|^{\alpha}}{\alpha}$ $(\alpha>1)$

此时$p^{(1)}(t)=t^{\alpha-1}$，$q^{(1)}(s)=s^{\beta-1}$，$N^{(1)}(v)=\dfrac{|v|^{\beta}}{\beta}$

$\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1\right)$

例2 $M^{(2)}(u)=e^{|u|}-|u|-1$

此时$p^{(2)}(t)=e^{t}-1,q^{(2)}(s)=\ln(s+1),N^{(2)}(v)=(1+|v|)\ln(1+|v|)-|v|$

例3 $M^{(3)}(u)=(1+|u|)\ln(1+|u|)-|u|$

即$M^{(2)}(u)$的余N函数。

例4 $M^{(4)}(u)=e^{|u|^{\delta}}-1$ $(\delta>1)$

因为$p^{(4)}(t)=\delta t^{\delta-1}e^{t^{\delta}}$，又当$t>0$时

$$p^{(4)\prime}(t)=\delta t^{\delta-2}e^{t^{\delta}}(\delta t^{\delta}+\delta-1)>0,$$

故易证$p^{(4)}(t)$满足定理1.1中的(1)——(3)，即$M^{(4)}(u)$为N函数。

例5 $M^{(5)}(u)=\dfrac{u^2}{\ln(e+|u|)}$

因为 $p^{(5)}(t)=\dfrac{2t(t+e)\ln(t+e)-t^2}{(t+e)\ln^2(t+e)}$，又当 $t\geqslant 0$ 时

$$p^{(5)\prime}(t)=\frac{2}{(t+e)^2\ln^3(t+e)}\Big[(t+e)^2\ln^2(t+e)$$

$$-2t(t+e)\ln(t+e)+t^2+\frac{t^2\ln(t+e)}{2}\Big]$$

$$>\frac{2}{(t+e)^2\ln^3(t+e)}[(t+e)\ln(t+e)-t]^2>0,$$

如同例4的讨论便知 $M^{(5)}(u)$ 为 N 函数。

例6 $M^{(6)}(u)=\begin{cases} e^{\ln^{r+1}|u|} & \text{当}|u|\geqslant e\text{时} \\ \dfrac{|u|^{r+1}}{e^r} & \text{当}0\leqslant |u|<e\text{时} \end{cases}$ $(r\geqslant 1)$

因为

$$p^{(6)}(t)=\begin{cases} e^{\ln t(\ln^r t-1)}\cdot(r+1)\ln^r t & \text{当}t\geqslant e\text{时} \\ \dfrac{(r+1)t^r}{e^r} & \text{当}0\leqslant t<e\text{时} \end{cases},$$

$$p^{(6)\prime}(t)=\begin{cases} e^{\ln t(\ln^r t-2)}\cdot(r+1)\ln^{r-1}t\cdot[(r+1)\ln^{r+1}t- \\ \qquad \ln t+r] & \text{当}t\geqslant e\text{ 时} \\ \dfrac{(r+1)rt^{r-1}}{e^r} & \text{当}0<t<e\text{ 时} \end{cases}$$

故当 $t>0$ 时，$p^{(6)\prime}(t)>0$，再仿照例4的讨论即知 $M^{(6)}(u)$ 为 N 函数。

在以后的讨论中，我们可以知道对于 N 函数 $M(u)$ 起作

用的只是当u充分大时的值，因此人们时常把$M(u)$对充分大的u的表达式叫做它的主部。这样，$M^{(6)}(u)$的主部就是$e^{\ln^{7+1}u}=u^{\ln^{7}u}$。

本节最后我们给出N函数的比较、等价与真快等概念。

定义1.4 我们称N函数$M_2(u)$快于$M_1(u)$，假如存在$\alpha>0$和$u_0\geqslant0$使当$u\geqslant u_0$时

$$M_1(u)\leqslant M_2(\alpha u),$$

这时记为$M_1(u)\prec M_2(u)$。

定理1.5 下列命题等价：

(1) $M_1(u)\prec M_2(u)$，

(2) 存在正数α_1，k_1以及$u_0'\geqslant0$使当$u\geqslant u_0'$时

$$p_1(u)\leqslant k_1p_2(\alpha_1u),$$

(3) 存在正数α_2，k_2以及$v_0'\geqslant0$使当$v\geqslant v_0'$时

$$q_1(v)\geqslant k_2q_2(\alpha_2v),$$

(4) $N_2(v)\prec N_1(v)$。

证 (1)⇒(2) 利用不等式Ⅰ便知取$u_0'=\dfrac{u_0}{2}$，$\alpha_1=k_1=2\alpha$，则当$u\geqslant u_0'$时

$$up_1(u)\leqslant M_1(2u)\leqslant M_2(2\alpha u)\leqslant2\alpha up_2(2\alpha u)=k_1up_2(\alpha_1u)$$

(2)⇒(3) 取$v_0'>0$使$q_1(v_0')\geqslant u_0'$，则当$v\geqslant v_0'$时由不等式Ⅱ有

$$q_2\left(\frac{1}{2k_1}v\right)\leqslant q_2\left(\frac{1}{2k_1}p_1[q_1(v)]\right)\leqslant q_2\left(\frac{1}{2}p_2[\alpha_1q_1(v)]\right)$$
$$\leqslant q_2(p_2[\alpha_1q_1(v)]-\varepsilon)\leqslant\alpha_1q_1(v),$$